Приводимые задания предлагались в трех возрастных категориях (9, 10, 11 классы) по два равноценных по сложности варианта в 9 и 10 классах и по два равноценных по сложности варианта в каждом из трех групп часовых поясов (ЗАПАД, СИБИРЬ, ВОСТОК) для участников 11 класса. Тематика отдельных задач в разных классах пересекается, при этом младшим классам предлагались более легкие варианты заданий.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

9 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Найдите пять простых чисел, образующих арифметическую прогрессию с разностью 12. Ответ обоснуйте.

2. Катя и Юра играют в следующую игру. Имеется пустая таблица из одной строки, состоящая из $k = 100$ пустых ячеек: $(a_1 \ , \dots , \ a_k)$, которые игроки заполняют числами от 0 до 6. Первым ходит Юра, который выбирает число t такое, что $1 \le t \le 99$ и заполняет t ячеек.

Второй ходит Катя, которая заполняет оставшиеся ячейки. Победитель определяется по следующему правилу: если в результате получается «счастливая» комбинация чисел – полностью заполненная таблица, в которой числа можно разбить на две непересекающиеся группы, суммы чисел в которых одинаковы, то выигрывает Катя, в противном случае выигрывает Юра. Например, комбинация $(1,5,3,4,6)$ не является «счастливой», так как в ней присутствует нечетное число нечетных чисел. С другой стороны, комбинация $(6,5,3,6,4)$ является «счастливой», так как $6+6=5+3+4$. У кого из игроков имеется выигрышная стратегия? Ответ обоснуйте.

3. а) перестановка f чисел $\{0,1,\dots,6\}$ задана таблицей:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	0	4	6	5	1

Например, $f(2)=0$. Найдите две перестановки g и h такие, что для всех $x\in\{0,1,\dots,6\}$ выполняется $f(x)=\big(g(x)+h(x)\big)(mod\ 7)$.

b) перестановка f задана на чётном количестве чисел $\{0,1,\dots,2n-1\}$ таблицей:

x	0	1	2	..	$2n-2$	$2n-1$
$f(x)$	i_0	i_1	i_2	..	i_{2n-2}	i_{2n-1}

Здесь $(i_0,i_1,\dots,i_{2n-1})$ – перестановка чисел $\{0,1,\dots,2n-1\}$.

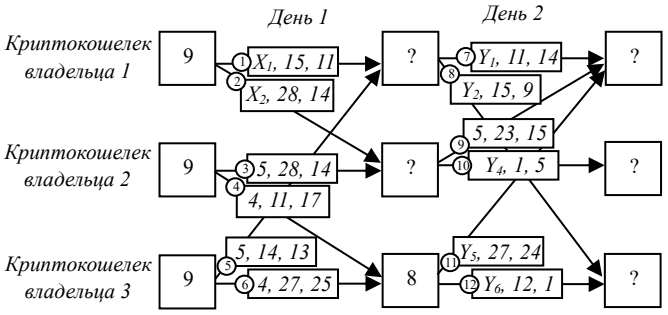
Докажите, что не существует перестановок g и h таких, что для всех $x\in\{0,1,\dots,2n-1\}$ выполняется $f(x)=\big(g(x)+h(x)\big)(mod\ (2n))$.

4. В криптосистеме RSA (знания алгоритма шифрования не требуется для решения задачи) элементы надёжности определяются несколькими параметрами. В частности, выбором числа $N=p\cdot q$, где p,q – различные нечётные простые числа, и значением $\varphi(N)=(p-1)\cdot(q-1)$. Известна следующая теорема (малая теорема Ферма): если p – простое число, a – целое число, не делящееся на p, то $a^{p-1}=1(mod\ p)$. Используя это:

a) докажите, что $x^{\frac{\varphi(N)}{2}+1}=x(mod\ N)$ для всех $x\in\{1,2,\dots,N-1\}$.

b) найдите p и q, если известно, что $N=44814101$ и $x^{22400353}=x(mod\ N)$ для всех $x\in\{1,2,\dots,N-1\}$.

5. Каждый из трех владельцев криптокошельков имеет на своем счету по 9 криптокойнов. Каждый из двух дней ими совершаются по две транзакции: по переводу части криптокойнов со своего криптокошелька на криптокошелек другого владельца и по возврату оставшихся криптокойнов обратно на свой кошелек. У каждого имеется свой секретный ключ $S\in\{1,2,\dots,28\}$. При совершении транзакции указываются три числа (X,a,b), где X - число переводимых криптокойнов, (a,b) - электронная подпись перевода. Электронная подпись находится по правилу: выбираем произвольное $k\in\{1,2,\dots,28\}$, затем находим $a=r_{29}(2^k)$, $b=r_{28}(Xa+Sk)$, где $r_N(M)$ – остаток от деления числа M на N.



На рисунке указаны совершенные транзакции (пронумерованы числами в кружках) за два дня. Сколько будет криптокойнов у каждого владельца криптокошелька по окончании двух дней?

6. Вася хочет заполнить квадратную таблицу (*криптографическую мозаику*) размера 4×4 целыми числами от 0 до 16 по следующему правилу. Сначала он выбирает четыре целых числа $b_1,b_2,b_3,b_4\in\{0,1,\dots,16\}$. Затем первую строку Вася заполняет числами $a_i^{(1)}=(b_i+1)(mod\ 17), i=1,2,3,4$, вторую строку – числами $a_i^{(2)}=(b_i+4)(mod\ 17), i=1,2,3,4$,

третью $a_i^{(3)} = (b_i + 13)(mod\ 17), i = 1,2,3,4$ и, аналогично, четвертую $a_i^{(4)} = (b_i + 16)(mod\ 17), i = 1,2,3,4$. При этом числа b_1, b_2, b_3, b_4 Вася выбрать должен так, чтобы все числа в таблице оказались различными и не было числа 8. Сумеет ли Вася это сделать? Если да, то чему равны b_1, b_2, b_3, b_4

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

ОТВЕТ: 5,17,29,41,53.

Задача 2

Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда игрок, делающий первый ход, заполняет максимально возможное число ячеек, равное $k-1$. Расположим эти $k-1$ число в порядке не убывания: $a_{i_1} \le a_{i_2} \le \cdots \le a_{i_{k-1}}$.

Здесь в индексах указаны номера позиций, на которых стоят эти числа в таблице. Образуем два множества позиций, которые заполнены: $\{i_1, i_3, \dots\}$ и $\{i_2, i_4, \dots\}$, беря указанные числа через одно. Тогда суммы чисел на этих позициях могут отличаться друг от друга не более, чем на 6. Поэтому оставшуюся незаполненной позицию можно заполнить числом от 0 до 6 так, чтобы получилась «счастливая» комбинация

ОТВЕТ: Если первым ходит Юра, то Катя всегда может выиграть.

Задача 3

а) Так как НОД(2,7)=НОД(6,7)=1, то $g(x) = 2f(x)(mod\ 7)$ и $h(x) = 6f(x)(mod\ 7)$ являются перестановками. Но тогда, например, $g(x) = 2f(x)$, $h(x) = 6f(x)$ и выполняется

$g(x) + h(x) = 2f(x) + 6f(x) = f(x)(mod\ 7)$.

b) $\sum_{i=0}^{2n-1} f(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} x = (2n+1)n = n(mod\ (2n))$.

С другой стороны, если указанное условии пункта b) представление существует, то

$\sum_{i=0}^{2n-1} f(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} g(x) + \sum_{i=0}^{2n-1} h(x) = 2(2n+1)n = 0(mod\ (2n))$.

Что доказывает невозможность указанного представления.

Задача 4

а) из условия задачи и равенства $a^{p-1} = 1(mod\ p)$ следует $a^{k(p-1)+1} = a(mod\ p)$ для любого натурального k. Тогда при $k = \frac{q-1}{2}$ получим $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(mod\ p)$.

Аналогично $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(mod\ q)$. Так как p, q – простые числа, то из этих полученных выше равенств следует $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(mod\ N)$. Пункт а) доказан.

b) предположим, что $\frac{\varphi(N)}{2} + 1 = 22400353$. Тогда получим систему уравнений $p \cdot q = 44814101, \quad (p-1) \cdot (q-1) = 44800704.$

Решая полученную систему, находим $p = 6949, q = 6449$.

ОТВЕТ: $p = 6949, q = 6449$.

Задача 5

Сначала по рисунку выпишем очевидные соотношения:

$X_1 + X_2 = 9$ (1)
$Y_1 + Y_2 = X_1 + 5$ (2)
$5 + Y_4 = X_2 + 5$ (3)
$Y_5 + Y_6 = 8$ (4)

Необходимо найти: $\Sigma_1 = Y_1 + 5 + Y_5$, $\Sigma_2 = Y_4$, $\Sigma_3 = Y_2 + Y_6$.

Далее, заметим, что транзакции №1 и №8 осуществлены одним и тем же владельцем – владельцем 1. То есть использовался один и тот же секретный ключ S_1, при этом использовалось одно и то же значение k в подписи, поэтому:
$11 = (15X_1 + S_1k)(mod\ 28)$,
$9 = (15Y_2 + S_1k)(mod\ 28)$.
Отсюда получим: $2 = 30 = (15(X_1 - Y_2))(mod\ 28)$.
Следовательно, $X_1 - Y_2 = 2$.
С учетом (2) имеем: $Y_1 = X_1 - Y_2 + 5 = 7$.

Аналогичное свойство замечаем у транзакций №6 и №11:
$25 = (27 \cdot 4 + S_3k)(mod\ 28)$,
$24 = (27Y_5 + S_3k)(mod\ 28)$.
Отсюда получим: $1 = -27 = (27(4 - Y_5))(mod\ 28)$. Следовательно, $Y_5 = 5$ и уже находится $\Sigma_1 = 7 + 5 + 5 = 17$.

Теперь обратим внимание на транзакцию №10, у которой $a = 1 = 2^0(mod\ 29)$, т.е. $k = 0(mod\ 28) = 28$. Значит $5 = (Y_4 + S_2 \cdot 28)(mod\ 28) = Y_4$ и $\Sigma_2 = 5$.

Т.к. исходная сумма криптокойнов была равна 27, то $\Sigma_3 = 27 - \Sigma_1 - \Sigma_2 = 5$.

ОТВЕТ: (17,5,5).

Задача 6

Задачу можно решить древовидным перебором всех вариантов. Существование подобных мозаик для других простых чисел является открытой проблемой. Гипотеза утверждает, что такие мозаики существуют только для простых чисел Ферма: 3,5,17,257.

ОТВЕТ: 0,6,10,16.

10 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Найдите пять простых чисел, образующих арифметическую прогрессию с разностью 12. Ответ обоснуйте.

2. Катя и Юра играют в следующую игру. Имеется пустая таблица из одной строки, состоящая из $k = 100$ пустых ячеек: $(a_1, \dots, a_k)$, которые игроки заполняют числами от 0 до 6. Первым ходит Юра, который выбирает число t такое, что $1 \le t \le 99$ и заполняет t ячеек. Второй ходит Катя, которая заполняет оставшиеся ячейки. Победитель определяется по следующему правилу: если в результате получается «счастливая» комбинация чисел – полностью заполненная таблица, в которой числа можно разбить на две непересекающиеся группы, суммы чисел в которых одинаковы, то выигрывает Катя, в противном случае выигрывает Юра. Например, комбинация $(1,5,3,4,6)$ не является «счастливой», так как в ней присутствует нечетное число нечетных чисел. С другой стороны, комбинация $(6,5,3,6,4)$ является «счастливой», так как $6 + 6 = 5 + 3 + 4$. У кого из игроков имеется выигрышная стратегия? Ответ обоснуйте.

3. а) перестановка f чисел $\{0,1,\dots,6\}$ задана таблицей:
Например, $f(2) = 0$. Найдите две перестановки g и h такие, что для всех $x \in \{0,1,\dots,6\}$ выполняется
$f(x) = \big(g(x) + h(x)\big)(mod\ 7)$.

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	2	3	0	4	6	5	1

b) перестановка f задана на чётном количестве чисел $\{0,1,\dots,2n-1\}$ таблицей:

x	0	1	2	…	$2n-2$	$2n-1$
$f(x)$	i_0	i_1	i_2	…	i_{2n-2}	i_{2n-1}

Здесь $(i_0, i_1, \dots, i_{2n-1})$ – перестановка чисел $\{0,1,\dots,2n-1\}$.

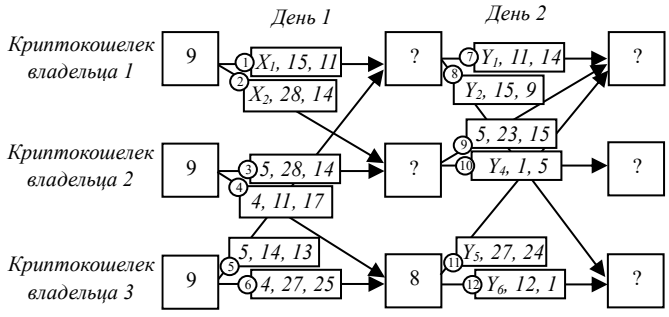
Докажите, что не существует перестановок g и h таких, что для всех $x \in \{0,1,\dots,2n-1\}$ выполняется $f(x) = \big(g(x)+h(x)\big)(mod\ (2n))$.

4. В криптосистеме RSA (знания алгоритма шифрования не требуется для решения задачи) элементы надёжности определяются несколькими параметрами. В частности, выбором числа $N = p \cdot q$, где p, q – различные нечётные простые числа, и значением $\varphi(N) = (p-1)\cdot(q-1)$. Известна следующая теорема (малая теорема Ферма): если p – простое число, a – целое число, не делящееся на p, то $a^{p-1} = 1(mod\ p)$. Используя это:

c) докажите, что $x^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = x(mod\ N)$ для всех $x \in \{1,2,\dots,N-1\}$.

d) найдите p и q, если известно, что $N = 44814101$ и $x^{22400353} = x(mod\ N)$ для всех $x \in \{1,2,\dots,N-1\}$.

6. Каждый из трех владельцев криптокошельков имеет на своем счету по 9 криптокойнов. Каждый из двух дней ими совершаются по две транзакции: по переводу части криптокойнов со своего криптокошелька на криптокошелек другого владельца и по возврату оставшихся криптокойнов обратно на свой кошелек. У каждого имеется свой секретный ключ $S \in \{1,2,\dots,28\}$. При совершении транзакции указываются три числа (X, a, b), где X - число переводимых криптокойнов, (a, b) - электронная подпись перевода. Электронная подпись находится по правилу: выбираем произвольное $k \in \{1,2,\dots,28\}$, затем находим $a = r_{29}(2^k)$, $b = r_{28}(Xa + Sk)$, где $r_N(M)$ – остаток от деления числа M на N.



На рисунке указаны совершенные транзакции (пронумерованы числами в кружках) за два дня. Сколько будет криптокойнов у каждого владельца криптокошелька по окончании двух дней?

7. Вася хочет заполнить квадратную таблицу (*криптографическую мозаику*) размера 4×4 целыми числами от 0 до 16 по следующему правилу. Сначала он выбирает четыре целых числа $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \{0,1,\dots,16\}$. Затем первую строку Вася заполняет числами $a_i^{(1)} = (b_i + 1)(mod\ 17), i = 1,2,3,4$, вторую строку – числами $a_i^{(2)} = (b_i + 4)(mod\ 17), i = 1,2,3,4$, третью $a_i^{(3)} = (b_i + 13)(mod\ 17), i = 1,2,3,4$ и, аналогично, четвертую $a_i^{(4)} = (b_i + 16)(mod\ 17), i = 1,2,3,4$. При этом числа b_1, b_2, b_3, b_4 Вася выбрать должен так, чтобы все числа в таблице оказались различными и не было числа 8. Сумеет ли Вася это сделать? Если да, то чему равны b_1, b_2, b_3, b_4

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

ОТВЕТ: 5,17,29,41,53.

Задача 2

Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда игрок, делающий первый ход, заполняет максимально возможное число ячеек, равное $k-1$. Расположим эти $k-1$ число в порядке не убывания: $a_{i_1} \le a_{i_2} \le \dots \le a_{i_{k-1}}$.

Здесь в индексах указаны номера позиций, на которых стоят эти числа в таблице. Образуем два множества позиций, которые заполнены: $\{i_1, i_3, \dots\}$ и $\{i_2, i_4, \dots\}$, беря указанные числа через одно. Тогда суммы чисел на этих позициях могут отличаться друг от друга не более, чем на 6. Поэтому оставшуюся незаполненной позицию можно заполнить числом от 0 до 6 так, чтобы получилась «счастливая» комбинация

ОТВЕТ: Если первым ходит Юра, то Катя всегда может выиграть.

Задача 3

а) Так как НОД(2,7)=НОД(6,7)=1, то $g(x) = 2f(x)(mod\ 7)$ и $h(x) = 6f(x)(mod\ 7)$ являются перестановками. Но тогда, например, $g(x) = 2f(x), h(x) = 6f(x)$ и выполняется

$g(x) + h(x) = 2f(x) + 6f(x) = f(x)(mod\ 7)$.

b) $\sum_{i=0}^{2n-1} f(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} x = (2n+1)n = n(mod\ (2n))$.

С другой стороны, если указанное условии пункта b) представление существует, то

$\sum_{i=0}^{2n-1} f(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} g(x) + \sum_{i=0}^{2n-1} h(x) = 2(2n+1)n = 0(mod\ (2n))$.

Что доказывает невозможность указанного представления.

Задача 4

а) из условия задачи и равенства $a^{p-1} = 1(mod\ p)$ следует $a^{k(p-1)+1} = a(mod\ p)$ для любого натурального k. Тогда при $k = \frac{q-1}{2}$ получим $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(mod\ p)$.

Аналогично $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(mod\ q)$. Так как p, q – простые числа, то из этих полученных выше равенств следует $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(mod\ N)$. Пункт а) доказан.

c) предположим, что $\frac{\varphi(N)}{2} + 1 = 22400353$. Тогда получим систему уравнений $p \cdot q = 44814101, \quad (p-1) \cdot (q-1) = 44800704$.

Решая полученную систему, находим $p = 6949, q = 6449$.

ОТВЕТ: $p = 6949, q = 6449$.

Задача 5

Сначала по рисунку выпишем очевидные соотношения:

$X_1 + X_2 = 9$ (1)
$Y_1 + Y_2 = X_1 + 5$ (2)
$5 + Y_4 = X_2 + 5$ (3)
$Y_5 + Y_6 = 8$ (4)

Необходимо найти: $\Sigma_1 = Y_1 + 5 + Y_5$, $\Sigma_2 = Y_4$, $\Sigma_3 = Y_2 + Y_6$.

Далее, заметим, что транзакции №1 и №8 осуществлены одним и тем же владельцем – владельцем 1. То есть использовался один и тот же секретный ключ S_1, при этом использовалось одно и то же значение k в подписи, поэтому:
$11 = (15X_1 + S_1 k)(mod\ 28)$,
$9 = (15Y_2 + S_1 k)(mod\ 28)$.
Отсюда получим: $2 = 30 = (15(X_1 - Y_2))(mod\ 28)$.
Следовательно, $X_1 - Y_2 = 2$.
С учетом (2) имеем: $Y_1 = X_1 - Y_2 + 5 = 7$.

Аналогичное свойство замечаем у транзакций №6 и №11:
$25 = (27 \cdot 4 + S_3 k)(mod\ 28)$,
$24 = (27Y_5 + S_3 k)(mod\ 28)$.
Отсюда получим: $1 = -27 = (27(4 - Y_5))(mod\ 28)$. Следовательно, $Y_5 = 5$ и уже находится $\Sigma_1 = 7 + 5 + 5 = 17$.

Теперь обратим внимание на транзакцию №10, у которой $a = 1 = 2^0 (mod\ 29)$, т.е. $k = 0(mod\ 28) = 28$. Значит $5 = (Y_4 + S_2 \cdot 28)(mod\ 28) = Y_4$ и $\Sigma_2 = 5$.

Т.к. исходная сумма криптокойнов была равна 27, то $\Sigma_3 = 27 - \Sigma_1 - \Sigma_2 = 5$.

ОТВЕТ: (17,5,5).

Задача 6

Задачу можно решить древовидным перебором всех вариантов. Существование подобных мозаик для других простых чисел является открытой проблемой. Гипотеза утверждает, что такие мозаики существуют только для простых чисел Ферма: 3,5,17,257.

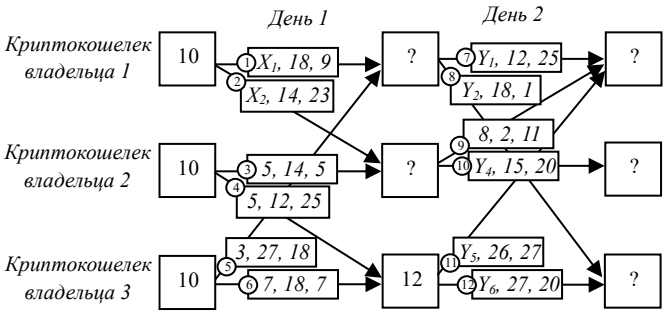
ОТВЕТ: 0,6,10,16.

11 КЛАСС

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

1. Катя и Юра играют в следующую игру. Имеется пустая таблица из одной строки, состоящая из $k = 2023^2$ пустых ячеек: $(a_1 \ , \dots , \ a_k)$, которые игроки заполняют числами от 0 до 2022. Первым ходит Юра, который выбирает число t такое, что $1 \le t \le k - 1$ и заполняет t ячеек. Второй ходит Катя, которая заполняет оставшиеся ячейки. Победитель определяется по следующему правилу: если в результате получается «счастливая» комбинация чисел – полностью заполненная таблица, в которой числа можно разбить на две непересекающиеся группы, суммы чисел в которых одинаковы, то выигрывает Катя, в противном случае выигрывает Юра. Например, комбинация (7,5,3,4,6) не является «счастливой», так как в ней присутствует нечетное число нечетных чисел. С другой стороны, комбинация (4,5,1,6,8) является «счастливой», так как $4 + 8 = 5 + 1 + 6$. У кого из игроков имеется выигрышная стратегия? Ответ обосновать.

2. Каждый из трех владельцев криптокошельков имеет на своем счету по 10 криптокойнов. Каждый из двух дней ими совершаются по две транзакции: по переводу части криптокойнов со своего криптокошелька на криптокошелек другого владельца и по возврату оставшихся криптокойнов обратно на свой кошелек. У каждого имеется свой секретный ключ S$\in \{1,2,\dots,28\}$. При совершении транзакции указываются три числа (X, a, b), где X - число переводимых криптокойнов, (a, b) - электронная подпись перевода. Электронная подпись находится по правилу: выбираем произвольное $k \in \{1,2,\dots,28\}$, затем находим $a = r_{29}(2^k)$, $b = r_{28}(Xa + Sk)$, где $r_N(M)$ – остаток от деления числа M на N. На рисунке указаны совершенные транзакции (пронумерованы числами в кружках) за два дня. Сколько будет криптокойнов у каждого владельца криптокошелька по окончании двух дней?



3. а) перестановка f чисел $\{0,1,\dots,6\}$ задана таблицей:

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	3	2	4	0	5	6	1

Например, $f(2) = 4$. Найдите две различные перестановки g и h такие, что для всех $x \in \{0,1,\dots,6\}$ выполняется

$f(x) = \big(g(x) + h(x)\big)(mod\ 7)$.

b) перестановка f задана на чётном количестве чисел $\{0,1,\dots,2n-1\}$ таблицей:

x	0	1	2	..	$2n-2$	$2n-1$
$f(x)$	i_0	i_1	i_2	..	i_{2n-2}	i_{2n-1}

Здесь $(i_0, i_1, \dots, i_{2n-1})$ – перестановка чисел $\{0,1,\dots,2n-1\}$.

Докажите, что не существует перестановок g и h таких, что для всех $x \in \{0,1,\dots,2n-1\}$ выполняется $f(x) = \big(g(x) + h(x)\big)(mod\ (2n))$?

4. В криптосистеме RSA (знания алгоритма шифрования не требуется для решения задачи) элементы надёжности определяются несколькими параметрами. В частности, выбором числа $N = p \cdot q$, где p, q – различные нечётные простые числа, и значением $\varphi(N) = (p-1)\cdot(q-1)$. Известна следующая теорема (малая теорема Ферма): если p – простое число, a – целое число, не делящееся на p, то $a^{p-1} = 1(mod\ p)$. Используя это:

a) докажите, что $x^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = x(mod\ N)$ для всех $x \in \{1,2,\dots,N-1\}$.

b) найдите p и q, если известно, что $N = 42494861$ и $x^{21240913} = x(mod\ N)$ для всех $x \in \{1,2,\dots,N-1\}$.

5. Четыре компьютера, расположенные в вершинах квадрата $ABCD$, соединены прямолинейными отрезками проводов с сервером, который находится в точке O пересечения диагоналей. Сторона квадрата равна 2 м. Несложно заметить, что для такого подключения потребуется $4\sqrt{2}$ метров провода. Чтобы уменьшить длину проводов, вам разрешается передвинуть сервер из точки O в любую другую точку O_1, а также компьютер из точки A в любую другую точку A_1 так, чтобы новая суммарная длина проводов $S = O_1A_1 + O_1B + O_1C + O_1D$ была как можно меньше. Разрешается компьютеры и сервер размещать в одной точке (например, точка A_1 может совпасть с точкой B). Компьютеры в вершинах B, C, D двигать нельзя. Чему равно минимальное значение S.

6. Вася хочет заполнить квадратную таблицу (*криптографическую мозаику*) размера 4×4 целыми числами от 1 до 16 по следующему правилу. Сначала он выбирает четыре целых числа $b_1, b_2, b_3, b_4 \in \{0, 1, \dots, 16\}$. Затем первую строку Вася заполняет числами $a_i^{(1)} = (b_i + 1)(mod\ 17), i = 1,2,3,4$, вторую строку – числами $a_i^{(2)} = (b_i + 4)(mod\ 17), i = 1,2,3,4$, третью $a_i^{(3)} = (b_i + 13)(mod\ 17), i = 1,2,3,4$ и, аналогично, четвертую $a_i^{(4)} = (b_i + 16)(mod\ 17), i = 1,2,3,4$. При этом числа b_1, b_2, b_3, b_4 Вася выбрать должен так, чтобы все числа в таблице оказались различными. Сумеет ли Вася это сделать? Если да, то чему равны b_1, b_2, b_3, b_4?

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

Очевидно, что достаточно рассмотреть случай, когда игрок, делающий первый ход, заполняет максимально возможное число ячеек, равное $k-1$. Расположим эти $k-1$ число в порядке не убывания: $a_{i_1} \le a_{i_2} \le \dots \le a_{i_{k-1}}$.

Здесь в индексах указаны номера позиций, на которых стоят эти числа в таблице. Образуем два множества позиций, которые заполнены: $\{i_1, i_3, \dots\}$ и $\{i_2, i_4, \dots\}$, беря указанные числа через одно. Тогда суммы чисел на этих позициях могут отличаться друг от друга не более, чем на 2023. Поэтому оставшуюся незаполненной позицию можно заполнить числом от 0 до 2023 так, чтобы получилась «счастливая» комбинация.

ОТВЕТ: Если первым ходит Юра, то Катя всегда может выиграть.

Задача 2

Сначала по рисунку выпишем очевидные соотношения:
$X_1 + X_2 = 10$ (1)
$Y_1 + Y_2 = X_1 + 3$ (2)
$8 + Y_4 = X_2 + 5$ (3)
$Y_5 + Y_6 = 12$ (4)
Необходимо найти: $\Sigma_1 = Y_1 + 8 + Y_5$, $\Sigma_2 = Y_4$, $\Sigma_3 = Y_2 + Y_6$.

Далее, заметим, что транзакции №1 и №8 осуществлены одним и тем же владельцем – владельцем 1. То есть использовался один и тот же секретный ключ S_1, при этом использовалось одно и то же значение k в подписи, поэтому:
$9 = (18X_1 + S_1 k)(mod\ 28)$,
$1 = (18Y_2 + S_1 k)(mod\ 28)$. Отсюда получим $8 = 36 = (18(X_1 - Y_2))(mod\ 28)$.
Следовательно, $X_1 - Y_2 = 2$. С учетом (2) имеем: $Y_1 = X_1 - Y_2 + 3 = 5$.

Аналогичное свойство замечаем у транзакций №5 и №12:
$18 = (27 \cdot 3 + S_3 k)(mod\ 28)$,
$20 = (27Y_6 + S_3 k)(mod\ 28)$. Отсюда получим $-2 = 54 = (27(3 - Y_6))(mod\ 28)$.
Следовательно, $3 - Y_6 = 2$, $Y_6 = 1$.
С учетом (4) имеем: $Y_5 = 11$ и уже находится $\Sigma_1 = 5 + 8 + 11 = 24$.

Теперь обратим внимание на транзакции №9 и №10, осуществленные владельцем 2, для которых, как нетрудно заметить, использовались одинаковые k, но с разными знаками, т.к. $(2 \cdot 15) = 1(mod\ 29)$.
Поэтому:
$11 = (2 \cdot 8 + S_2 k)(mod\ 28)$,
$20 = (15Y_4 - S_2 k)(mod\ 28)$.
Отсюда получим: $15Y_4 = 31 - 16 = 15(mod\ 28)$, $Y_4 = 1 = \Sigma_2$.

Т.к. исходная сумма криптокойнов была равна 30, то $\Sigma_3 = 30 - \Sigma_1 - \Sigma_2 = 5$

ОТВЕТ: (24,1,5).

Задача 3

a) Так как НОД(2,7)=НОД(6,7)=1, то $g(x) = 2f(x)(mod\ 7)$ и $h(x) = 6f(x)(mod\ 7)$ являются перестановками. Но тогда, например, $g(x) = 2f(x)$, $h(x) = 6f(x)$ и выполняется
$g(x) + h(x) = 2f(x) + 6f(x) = f(x)(mod\ 7)$.
b) $\sum_{i=0}^{2n-1} f(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} x = (2n+1)n = n(mod\ (2n))$.
С другой стороны, если указанное условии пункта b) представление существует, то
$\sum_{i=0}^{2n-1} f(x) = \sum_{i=0}^{2n-1} g(x) + \sum_{i=0}^{2n-1} h(x) = 2(2n+1)n = 0(mod\ (2n))$.
Что доказывает невозможность указанного представления.

Задача 4

a) из условия задачи и равенства $a^{p-1} = 1(mod\ p)$ следует $a^{k(p-1)+1} = a(mod\ p)$ для любого натурального k. Тогда при $k = \frac{q-1}{2}$ получим $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(mod\ p)$.

Аналогично $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(mod\ q)$. Так как p, q – простые числа, то из этих полученных выше равенств следует $a^{\frac{\varphi(N)}{2}+1} = a(mod\ N)$. Пункт а) доказан.

d) предположим, что $\frac{\varphi(N)}{2} + 1 = 21240913$. Тогда получим систему уравнений
$p \cdot q = 42494861$, $(p-1) \cdot (q-1) = 21240913$.
Решая полученную систему, находим $p = 6547, q = 7057$

ОТВЕТ: $p = 6547, q = 7057$.

Задача 5

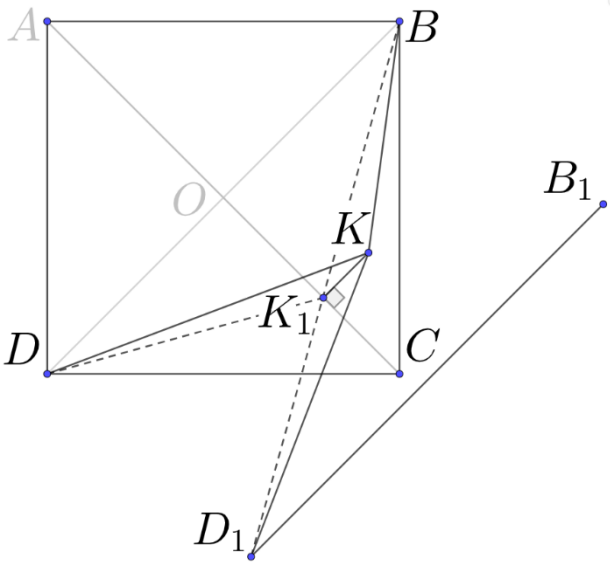
Заметим, что точки A_1 и O_1 совпадают. Действительно, пусть минимум достигается на конфигурации, где это не так. Но тогда, сдвинув точку A_1 в точку O_1, мы длину проводов уменьшим. Таким образом, компьютер A_1 и сервер O_1 должны оказаться в некоторой точке K ($K = A_1 = O_1$).

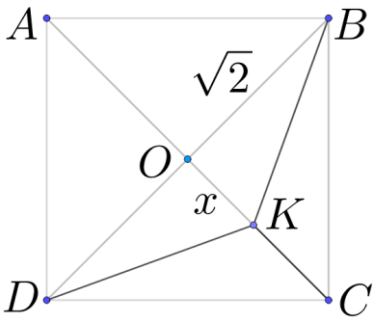
Покажем, что K лежит на диагонали AC. Предположим обратное. Пусть K_1 – основание перпендикуляра, опущенного из точки K на прямую AC. Покажем, что сумма расстояний от точки K_1 до вершин B, C, D, которую обозначим $S_{K_1} = K_1B + K_1C + K_1D$, меньше аналогичной суммы $S_K = KB + KC + KD$. Длина проекции меньше длины наклонной, поэтому $K_1C < KC$. Чтобы доказать, что

$$K_1D + K_1B < KD + KB, \qquad (1)$$

отразим отрезок BD относительно прямой KK_1 (при этом точка B перейдет в точку B_1, точка D – в точку D_1). Точки B, K_1, D_1 окажутся на одной прямой. Тогда $K_1D + K_1B = K_1D_1 + K_1B = D_1B$, и при этом $KD + KB = KD_1 + KB > D_1B$. Неравенство (1) доказано. Следовательно, $S_{K_1} < S_K$, а значит искомая точка K должна лежать на диагонали.

Пусть $OK = x$. Тогда $S(x) = KC + KB + KD = 2\sqrt{x^2 + 2} + \sqrt{2} - x$. На отрезке $[0, \sqrt{2}]$





функция $S(x)$ имеет (единственный) минимум в точке $x_0 = \sqrt{2/3}$ (x_0 – корень уравнения $S'(x) = 2x/\sqrt{x^2 + 2} - 1 = 0$), и $S(x_0) = 2\sqrt{2/3 + 2} + \sqrt{2} - \sqrt{2/3} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$.

ОТВЕТ: $\sqrt{6} + \sqrt{2}$.

Задача 6

Задачу можно решить древовидным перебором всех вариантов. Существование подобных мозаик для других простых чисел является открытой проблемой. Гипотеза утверждает, что такие мозаики существуют только для простых чисел Ферма: 3,5,17,257.

ОТВЕТ: 2,8,9,15.