11 класс – день 3

1. а) Для каждого целого k $(-36 \leqslant k \leqslant 15)$ Петя выписал на доску трёхчлен $y = x^2 + kx + 117$. После чего Вася для каждого из этих трёхчленов выписал его действительные корни (если они есть). Чему равна сумма выписанных Васей чисел?

Ответ: 435.

Решение. Для того, чтобы у трёхчлена были действительные корни, нужно, чтобы $D = k^2 - 4 \cdot 117 \geqslant 0$. То есть $k^2 \geqslant 468$. Так как k – целое, то $|k| \geqslant 22$. Значит, нам подходят значения k от -36 до -22. Заметим, что при этих значениях k дискриминант D не обращается в ноль. Поэтому все такие трёхчлены имеют по два корня. По теореме Виета сумма корней трёхчлена $y = x^2 + kx + 117$ равна $-k$, поэтому сумма выписанных Васей чисел равна $36 + 35 + 34 + \ldots + 22 = 435$.

б) Для каждого целого k $(-11 \leqslant k \leqslant 33)$ Петя выписал на доску трехчлен $y = x^2 + kx + 95$. После чего Вася для каждого из этих трехчленов выписал его действительные корни (если они есть). Чему равна сумма выписанных Васей чисел?

Ответ: -371.

в) Для каждого целого k $(-42 \leqslant k \leqslant 19)$ Петя выписал на доску трехчлен $y = x^2 + kx + 207$. После чего Вася для каждого из этих трехчленов выписал его действительные корни (если они есть). Чему равна сумма выписанных Васей чисел?

Ответ: 497.

г) Для каждого целого k $(-21 \leqslant k \leqslant 39)$ Петя выписал на доску трехчлен $y = x^2 + kx + 151$. После чего Вася для каждого из этих трехчленов выписал его действительные корни (если они есть). Чему равна сумма выписанных Васей чисел?

Ответ: -480.

2. а) Ваня выписал на доску подряд все целые части от деления каждого из чисел 1^2, 2^2, …, 2024^2 на 2024, пропуская все повторяющиеся значения. Сколько всего чисел он выписал?
Ответ: 1 519.

Решение. Поскольку разница между двумя соседними числами $\frac{k^2}{2024}$ и $\frac{(k+1)^2}{2024}$ меньше единицы при $(2k+1) < 2024$, т. е. $k \leq 1011$, среди целых частей $\frac{1^2}{2024}, \ldots, \frac{1011^2}{2024}$ присутствуют все последовательные целые числа от 0 до 505. Несложно заметить, что все оставшиеся числа имеют различные целые части — этих чисел 1 013. Итого Вася выпишет $506 + 1\,013 = 1\,519$ чисел.

б) Ваня выписал на доску подряд все целые части от деления каждого из чисел 1^2, 2^2, …, 3024^2 на 3024, пропуская все повторяющиеся значения. Сколько всего чисел он выписал?
Ответ: 2 269.

в) Ваня выписал на доску подряд все целые части от деления каждого из чисел 1^2, 2^2, …, 4024^2 на 4024, пропуская все повторяющиеся значения. Сколько всего чисел он выписал?
Ответ: 3 019.

г) Ваня выписал на доску подряд все целые части от деления каждого из чисел 1^2, 2^2, …, 5024^2 на 5024, пропуская все повторяющиеся значения. Сколько всего чисел он выписал?
Ответ: 3 769.

3. а) Вася выписал в строку натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{10}$. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 25. Какое наименьшее значение может принимать число a_{10}?

Ответ: 30.

Решение. Заметим, что сумма выписанных чисел равна 250. Пусть $a_{10} = n$. Тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10} \leqslant (n-9) + (n-8) + \ldots + n = 5(2n-9)$. То есть $250 \leqslant 5(2n-9)$. Откуда $n \geqslant 29{,}5$. Значит, $n \geqslant 30$. Заметим, что числа 16, 22, 23, 24, …, 30 подходят.

б) Вася выписал в строку натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{12}$. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 27. Какое наименьшее значение может принимать число a_{12}?

Ответ: 33.

в) Вася выписал в строку натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{14}$. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 29. Какое наименьшее значение может принимать число a_{14}?

Ответ: 36.

г) Вася выписал в строку натуральные числа $a_1 < a_2 < \ldots < a_{16}$. Оказалось, что среднее арифметическое этих чисел равно 31. Какое наименьшее значение может принимать число a_{16}?

Ответ: 39.

4. а) Даны два прямых круговых конуса, основания которых — концентрические круги, расположенные в плоскости α. Известно, что конусы расположены по одну сторону от плоскости α, их объёмы равны 1, а отношение радиусов оснований равно 3. Найдите объём общей части конусов. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.
Ответ: 0,2426.
Решение. Так как объёмы конусов равны, и отношение радиусов оснований равно $k = 3$, то отношение высот конусов равно $1/k^2$. Пусть O — центр основания конусов, S_1 и S_2 — их вершины (притом $OS_1 > OS_2$). Пусть S_1A_1 и S_2A_2 — образующие конусов, пересекающиеся в точке B. По теореме Менелая для треугольника OS_1A_1 и секущей S_2B

$$\frac{OS_2}{S_2S_1}\cdot\frac{S_1B}{BA_1}\cdot\frac{A_1A_2}{A_2O}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{k^2-1}\cdot\frac{S_1B}{BA_1}\cdot\frac{k-1}{k}=1 \Leftrightarrow \frac{S_1B}{BA_1}=k(k+1) \Rightarrow \frac{S_1B}{S_1A_1}=\frac{k^2+k}{k^2+k+1}.$$

По теореме Менелая для треугольника OA_2S_2 и секущей A_1B

$$\frac{OA_1}{A_1A_2}\cdot\frac{A_2B}{BS_2}\cdot\frac{S_2S_1}{S_1O}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{k-1}\cdot\frac{A_2B}{BS_2}\cdot\frac{k^2-1}{k^2}=1 \Leftrightarrow \frac{A_2B}{BS_2}=\frac{k^2}{k+1} \Rightarrow \frac{S_2B}{S_2A_2}=\frac{k+1}{k^2+k+1}.$$

Тогда искомый объём равен

$$\left(\frac{S_2B}{S_2A_2}\right)^3\cdot 1+\left(1-\left(\frac{S_1B}{S_1A_1}\right)^3\right)\cdot 1=\frac{3k^2+4k+2}{(k^2+k+1)^2}=\frac{41}{169}.$$

б) Даны два прямых круговых конуса, основания которых — концентрические круги, расположенные в плоскости α. Известно, что конусы расположены по одну сторону от плоскости α, их объёмы равны 1, а отношение радиусов оснований равно 2,5. Найдите объём общей части конусов. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.
Ответ: 0,3235.

в) Даны два прямых круговых конуса, основания которых — концентрические круги, расположенные в плоскости α. Известно, что конусы расположены по одну сторону от плоскости α, их объёмы равны 1, а отношение радиусов оснований равно $\frac{4}{3}$. Найдите объём общей части конусов. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.
Ответ: 0,7495.

г) Даны два прямых круговых конуса, основания которых — концентрические круги, расположенные в плоскости α. Известно, что конусы расположены по одну сторону от плоскости α, их объёмы равны 1, а отношение радиусов оснований равно $\frac{7}{4}$. Найдите объём общей части конусов. Ответ округлите до четырёх знаков после запятой.
Ответ: 0,5383.

(а) $\frac{41}{169}$; (б) $\frac{164}{507}$; (в) $\frac{1026}{1369}$; (г) $\frac{1552}{2883}$.

5. а) Числа a, b таковы, что $|a| \leqslant 6$, $|b| \leqslant 6$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $a^3b - 3a^2b^2$?

Ответ: 108.

Решение. • Если хотя бы одно из чисел a, b равно нулю, то значение выражения равно нулю.

• Если числа a, b разных знаков, то значение выражения отрицательно.

• Пусть числа a, b одного знака. Без ограничения общности можно считать, что они положительны. Заметим, что $a^3b - 3a^2b^2 = a^2b(a - 3b) > 0$, если $a > 3b > 0$ (по условию $a \leqslant 6$). Тогда по неравенству Коши $4(3b)(a - 3b) \leqslant \big((3b) + (a - 3b)\big)^2 = a^2$, причём неравенство обращается в равенство при $3b = a - 3b$, то есть при $a = 6b$. Значит, $a^2b(a - 3b) \leqslant \frac{a^4}{12} \leqslant \frac{6^4}{12} = 108$. Неравенство обращается в равенство при $a = 6, b = 1$.

б) Числа a, b таковы, что $|a| \leqslant 6$, $|b| \leqslant 6$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $a^3b - 2a^2b^2$?

Ответ: 162.

в) Числа a, b таковы, что $|a| \leqslant 6$, $|b| \leqslant 6$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $a^3b - 6a^2b^2$?

Ответ: 54.

г) Числа a, b таковы, что $|a| \leqslant 6$, $|b| \leqslant 6$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $a^3b - 5a^2b^2$?

Ответ: 64,8.

6. а) При каком наименьшем значении параметра a каждое решение неравенства $\log_{x+1}(3-ax)>0$ удовлетворяет неравенству $x^2+\frac{2a-5}{2a}x-\frac{5}{2a}>0$?

Ответ: $-2{,}5$.

Решение. Найдём искомое минимальное значение a в множестве отрицательных чисел, тогда

$$\log_{x+1}(3-ax)>0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x+1>0,\\ 3-ax>0,\\ x(2-ax)>0\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>-1,\\ x>\frac{3}{a},\\ x\left(x-\frac{2}{a}\right)>0.\end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>0, & \text{если } a\in[-2;0),\\ x\in\left(-1;\frac{2}{a}\right)\cup(0;+\infty), & \text{если } a\in[-3;-2),\\ x\in\left(\frac{3}{a};\frac{2}{a}\right)\cup(0;+\infty) & \text{если } a<-3.\end{cases} \qquad (1)$$

$$x^2+\frac{2a-5}{2a}x-\frac{5}{2a}>0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left(x-\frac{5}{2a}\right)(x+1)>0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\in\left(-\infty;\frac{5}{2a}\right)\cup(-1;+\infty), & \text{если } a\in\left[-\frac{5}{2};0\right),\\ x\in(-\infty;-1)\cup\left(\frac{5}{2a};+\infty\right), & \text{если } a\in\left[-\infty;-\frac{5}{2}\right).\end{cases} \qquad (2)$$

Поскольку нужно наименьшее значение параметра, сначала рассматриваем промежуток $a<-3$. Несложно видеть, что тогда не каждое решение первого неравенства является решением второго (целый промежуток решений первого $\left(\frac{3}{a};\frac{5}{2a}\right]$ не удовлетворяет второму неравенству).

Если же $-3\leqslant a\leqslant-\frac{5}{2}$, то чтобы множество решений (1) было подмножеством множества решений (2), необходимо условие $-1\geqslant\frac{5}{2a}$. Наименьшее a, удовлетворяющее этому неравенству, равно $-2{,}5$.

б) При каком наименьшем значении параметра a каждое решение неравенства $x^2+\left(3-2a^2\right)x-2a^2+2<0$ удовлетворяет неравенству $\log_{1-ax}(x+2)<0$?

Ответ: -1.

в) При каком наименьшем значении параметра a каждое решение неравенства $\log_{1-x}(2+ax)>0$ удовлетворяет неравенству $x^2+\frac{3-2a}{2a}x-\frac{3}{2a}>0$?

Ответ: $-1{,}5$.

г) При каком наибольшем значении параметра a каждое решение неравенства $8x^2+\left(12-2a^2\right)x-a^2+4<0$ удовлетворяет неравенству $\log_{1+ax}(2x+2)<0$?

Ответ: 2.

7. а) В треугольнике PQR на стороне PQ выбрана точка K, а на стороне QR — точка L. Отрезки PL и KR пересекаются в точке T. Чему равна площадь треугольника PQR, если $S_{PKT} = 10, S_{PTR} = 11, S_{RTL} = 12$?
Ответ: 5 313.
Решение. Пусть $S_{KTQ} = x, S_{LTQ} = y$. Так как $\frac{S_{PTQ}}{S_{TLQ}} = \frac{PT}{TL} = \frac{S_{PTR}}{S_{TLR}}$, то $\frac{10+x}{y} = \frac{11}{12}$. Аналогично, из равенства $\frac{S_{KTQ}}{S_{RTQ}} = \frac{KT}{RT} = \frac{S_{KTP}}{S_{RTP}}$ получаем, что $\frac{x}{12+y} = \frac{10}{11}$. Решая систему из этих уравнений, получаем, что $x = 2\,520$, $y = 2\,760$. Значит, $S_{PQR} = 2520 + 2760 + 10 + 11 + 12 = 5313$.

б) В треугольнике PQR на стороне PQ выбрана точка K, а на стороне QR — точка L. Отрезки PL и KR пересекаются в точке T. Чему равна площадь треугольника PQR, если $S_{PKT} = 11, S_{PTR} = 12, S_{RTL} = 13$?
Ответ: 6 900.

в) В треугольнике PQR на стороне PQ выбрана точка K, а на стороне QR — точка L. Отрезки PL и KR пересекаются в точке T. Чему равна площадь треугольника PQR, если $S_{PKT} = 12, S_{PTR} = 13, S_{RTL} = 14$?
Ответ: 8 775.

г) В треугольнике PQR на стороне PQ выбрана точка K, а на стороне QR — точка L. Отрезки PL и KR пересекаются в точке T. Чему равна площадь треугольника PQR, если $S_{PKT} = 9, S_{PTR} = 10, S_{RTL} = 11$?
Ответ: 3 990.

8. а) Из точки M проведены две перпендикулярные друг другу касательные к параболе $y = x^2+3x+2$. Найдите минимально возможную ординату точки M.

Ответ: $-0{,}5$.

Решение. Пусть угловые коэффициенты касательных равны k и $-\frac{1}{k}$. Так как $y' = 2x+3$, абсциссы точек касания x_1 и x_2 удовлетворяют соотношениям $2x_1+3=k$, $2x_2+3=-\frac{1}{k}$, откуда $x_1=\frac{k-3}{2}$, $x_2=-\frac{3k+1}{2k}$. Уравнения касательных имеют вид

$$y = k\left(x-\frac{k-3}{2}\right)+\frac{k^2-1}{4} \quad \text{и} \quad y=-\frac{1}{k}\left(x+\frac{3k+1}{2k}\right)+\frac{1-k^2}{4k^2}.$$

Умножая второе уравнение на k^2 и складывая, получаем $\left(k^2+1\right)y=-\frac{k^2+1}{2}$, откуда следует, что $y=-\frac{1}{2}$. Таким образом, ординаты всех точек пересечения таких касательных одинаковы и равны $-\frac{1}{2}$.

б) Из точки M проведены две перпендикулярные друг другу касательные к параболе $y = x^2+4x+3$. Найдите минимально возможную ординату точки M.

Ответ: $-1{,}25$.

в) Из точки M проведены две перпендикулярные друг другу касательные к параболе $y = x^2+2x+1$. Найдите минимально возможную ординату точки M.

Ответ: $-0{,}25$.

г) Из точки M проведены две перпендикулярные друг другу касательные к параболе $y = x^2+5x+4$. Найдите минимально возможную ординату точки M.

Ответ: $-2{,}5$.

Для параболы $y=x^2+px+q$ ордината точки M постоянна и равна $q-\dfrac{p^2}{4}-\dfrac{1}{4}$.

9. а) Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является диаметром, а $AB = BD$. Известно, что радиус его описанной окружности равен 5, а расстояние от вершины C до точки пересечения диагоналей равно 1. Найдите косинус угла ABD.

Ответ: 0,125.

Решение. Пусть J — точка пересечения диагоналей, $\angle BAC = \alpha$. Так как AC диаметр, а дуги AB и BD равны, находим, что

$$\angle ADB = \frac{1}{2}\smile{AB} = \frac{1}{2}\left(180^\circ - \smile{BC}\right) = 90^\circ - \alpha.$$

Так как треугольник ABD равнобедренный, $\angle ABD = 2\alpha$. Тогда $\angle AJB = 180^\circ - 3\alpha$, $AB = AC\cos\alpha = 10\cos\alpha$. По теореме синусов для треугольника ABJ получаем, что

$$\frac{AB}{\sin\angle AJB} = \frac{AJ}{\sin\angle ABJ} \quad\Leftrightarrow \frac{10\cos\alpha}{\sin 3\alpha} = \frac{9}{\sin 2\alpha}.$$

Решая уравнение, находим, что $\sin\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$, поэтому $\cos\angle ABD = \cos 2\alpha = \frac{1}{8}$.

б) Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является диаметром, а $AB = BD$. Известно, что радиус его описанной окружности равен 6, а расстояние от вершины C до точки пересечения диагоналей равно 2. Найдите косинус угла ABD.

Ответ: 0,25.

в) Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является диаметром, а $AB = BD$. Известно, что радиус его описанной окружности равен 8, а расстояние от вершины C до точки пересечения диагоналей равно 3. Найдите косинус угла ABD.

Ответ: 0,3.

г) Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является диаметром, а $AB = BD$. Известно, что радиус его описанной окружности равен 7, а расстояние от вершины C до точки пересечения диагоналей равно 3. Найдите косинус угла ABD.

Ответ: 0,375.

10. а) Каждый из 11 учеников записал к себе в тетрадь какие-то натуральные числа, не превосходящие N. Оказалось, что если взять любых 6 учеников, то в их тетрадях можно найти любое натуральное число, не превосходящее N , а если взять любых 5 учеников — нет (то есть найдется число, которого нет ни в одной тетради этих 5 учеников). При каком наименьшем N такое может быть?

Ответ: 462.

Решение. По условию для любых 5 учеников найдется число, которого у них нет в тетрадях. Зафиксируем одно такое число для каждой пятёрки. Заметим, что для разных пятёрок зафиксированные числа различны, в противном случае найдется число, которого нет у некоторых 6 учеников. Поэтому N не меньше количества пятёрок, которые можно выбрать из 11 человек, то есть $C_{11}^5 = 462$. С другой стороны, если $N = 462$, а каждому из чисел соответствует своя пятёрка (числа нет ни у кого из этой пятёрки), то условие задачи выполняется.

б) Каждый из 12 учеников записал к себе в тетрадь какие-то натуральные числа, не превосходящие N. Оказалось, что если взять любых 7 учеников, то в их тетрадях можно найти любое натуральное число, не превосходящее N, а если взять любых 6 учеников — нет (то есть найдется число, которого нет ни в одной тетради этих 6 учеников). При каком наименьшем N такое может быть?

Ответ: 924.

в) Каждый из 13 учеников записал к себе в тетрадь какие-то натуральные числа, не превосходящие N. Оказалось, что если взять любых 6 учеников, то в их тетрадях можно найти любое натуральное число, не превосходящее N, а если взять любых 5 учеников — нет (то есть найдется число, которого нет ни в одной тетради этих 5 учеников). При каком наименьшем N такое может быть?

Ответ: 1 287.

г) Каждый из 14 учеников записал к себе в тетрадь какие-то натуральные числа, не превосходящие N. Оказалось, что если взять любых 7 учеников, то в их тетрадях можно найти любое натуральное число, не превосходящее N, а если взять любых 6 учеников — нет (то есть найдется число, которого нет ни в одной тетради этих 6 учеников). При каком наименьшем N такое может быть?

Ответ: 3 003.

11 класс – день 2

1. а) Олег выписал в строку 110 последовательных натуральных чисел, больших 50 000. Оказалось, что 12-е число делится на 12, 75-е — на 75, а 110-е — на 110. Какое наименьшее число могло быть среди выписанных Олегом чисел?

   Ответ: 52 801.

   Решение. Пусть $12k$ — двенадцатое из выписанных чисел. Тогда при прибавлении к нему 63 должно выйти число, делящееся на 75, откуда получаем уравнение $12k + 63 = 75n$ с двумя целочисленными переменными. решая его, находим, что $k = 1 + 25p$, $n = 1 + 4p$, $p \in \mathbb{Z}$. Значит, $12k = 12(1+25p) = 12+300p$. Если к 12-ому числу прибавить 98, получится 110-ое число, которое должно делится на 110. Отсюда следует, что $12+300p+98 = 110m$, т.е. $30p = 11(m-1)$, откуда следует, что p — произвольное целое число, кратное 11. Значит, $p = 11q$, а $12k = 12+300p = 12+3300q$. Так как это двенадцатое число, первое число равно $3300q+1$. Решая неравенство $3300q+1 > 50\,000$, находим, что минимальное значение $q = 16$. Соответствующее значение первого выписанного на доску числа равно 52 801.

   б) Олег выписал в строку 110 последовательных натуральных чисел, больших 50 000. Оказалось, что 36-е число делится на 36, 40-е — на 40, а 110-е — на 110. Какое наименьшее число могло быть среди выписанных Олегом чисел?

   Ответ: 51 481.

   в) Олег выписал в строку 130 последовательных натуральных чисел, больших 50 000. Оказалось, что 12-е число делится на 12, 50-е — на 50, а 130-е — на 130. Какое наименьшее число могло быть среди выписанных Олегом чисел?

   Ответ: 50 701.

   г) Олег выписал в строку 130 последовательных натуральных чисел, больших 50 000. Оказалось, что 24-е число делится на 24, 45-е — на 45, а 130-е — на 130. Какое наименьшее число могло быть среди выписанных Олегом чисел?

   Ответ: 51 481.

2. а) Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $4x^2 - y^2 = 31^{405}$.
Ответ: 812.
Решение. Раскладывая левую часть на множители, получаем $(2x + y)(2x - y) = 31^{405}$. Так как каждый из множителей должен быть целым числом, получаем

$$\begin{cases} 2x + y = 31^k, \\ 2x - y = 31^{405-k} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2x + y = -31^k, \\ 2x - y = -31^{405-k}, \end{cases} \quad \text{где} \quad 0 \leqslant k \leqslant 405, k \in \mathbb{Z}. \qquad (1)$$

Рассмотрим первую систему. Решая её, находим, что $x = \frac{31^k + 31^{405-k}}{4}$, $y = \frac{31^k - 31^{405-k}}{2}$. В выражении для y в числителе дроби при любом k записана разность двух нечётных чисел; она чётна и потому делится на 2, то есть $y \in \mathbb{Z}$. Что касается x, нужно исследовать, делится ли числитель на 4. Так как $31^k \equiv (-1)^k \pmod 4$, $31^{405-k} \equiv (-1)^{405-k} \pmod 4$, получаем $31^k + 31^{405-k} \equiv (-1)^k + (-1)^{405-k} \pmod 4$. При любом целом k числа k и $405 - k$ имеют разную чётность, следовательно, $(-1)^k + (-1)^{405-k} = 0$, и числитель дроби делится на 4. Итак, при любых значениях k получаем, что x и y — целые. Таким образом, первая система (1) имеет 406 решений. Аналогично устанавливается, что и вторая система имеет 406 решений, и общее количество решений составляет 812.

б) Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $4x^2 - y^2 = 43^{453}$.
Ответ: 908.

в) Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $9x^2 - y^2 = 23^{501}$.
Ответ: 1004.

г) Найдите количество пар целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих уравнению $9x^2 - y^2 = 41^{417}$.
Ответ: 836.

3. а) Про вещественное число x известно, что $\sin x + 1001\cos x = 1000$. Найдите максимальное значение выражения $|1001\sin x - \cos x|$. Ответ округлите до трёх знаков после запятой.
Ответ: 44,744.
Решение.

$$a^2+1 = (\sin^2 x + \cos^2 x)(a^2+1) =$$
$$= (\sin^2 x + 2a\sin x\cos x + a^2\cos^2 x) + (a^2\sin^2 x - 2a\sin x\cos x + \cos^2 x) =$$
$$= (\sin x + a\cos x)^2 + (a\sin x - \cos x)^2.$$

Отсюда $|a\sin x - \cos x| = \sqrt{a^2-b^2+1}$.

б) Про вещественное число x известно, что $\sin x + 2003\cos x = 2002$. Найдите максимальное значение $|2003\sin x - \cos x|$. Ответ округлите до трёх знаков после запятой.
Ответ: 63,293.

в) Про вещественное число x известно, что $\sin x + 3002\cos x = 3000$. Найдите максимальное значение выражения $|3002\sin x - \cos x|$. Ответ округлите до трёх знаков после запятой.
Ответ: 109,567.

г) Про вещественное число x известно, что $\sin x + 4001\cos x = 4000$. Найдите максимальное значение выражения $|4001\sin x - \cos x|$. Ответ округлите до трёх знаков после запятой.
Ответ: 89,454.

4. а) Натуральное число N имеет 198 различных натуральных делителей (включая единицу и само число N), а количество различных натуральных делителей числа $13N$ (включая единицу и само число $13N$) равно 264. Определите минимально возможное значение N.

Ответ: 7 787 520.

Решение. Пусть разложение числа N на простые множители имеет вид $N = 13^m \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$. Тогда количество его делителей составляет

$$(m+1)(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_n+1).$$

После домножения на 13 получаем число $13N = 13^{m+1} \cdot p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$, количество делителей которого равно

$$(m+2)(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_n+1).$$

Разделив одно равенство на другое, получаем $\frac{m+2}{m+1} = \frac{4}{3}$, поэтому $m = 2$. Отсюда следует, что

$$(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_n+1) = 66 = 2 \cdot 3 \cdot 11.$$

Так как в правой части равенства три простых множителя, количество множителей в его левой части не превосходит трёх. Несложно видеть, что минимальное значение исходного числа получается при $k_1 = 10$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$. Это значение равно $2^{10} \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13^2 = 7\,787\,520$.

б) Натуральное число N имеет 280 различных натуральных делителей (включая единицу и само число N), а количество различных натуральных делителей числа $17N$ (включая единицу и само число $17N$) равно 350. Определите минимально возможное значение N.

Ответ: 127 344 960.

в) Натуральное число N имеет 468 различных натуральных делителей (включая единицу и само число N), а количество различных натуральных делителей числа $27N$ (включая единицу и само число $27N$) равно 702. Определите минимально возможное значение N.

Ответ: 174 182 400.

г) Натуральное число N имеет 120 различных натуральных делителей (включая единицу и само число N), а количество различных натуральных делителей числа $529N$ (включая единицу и само число $529N$) равно 180. Определите минимально возможное значение N.

Ответ: 8 760 240.

5. а) Расстояние между центрами двух квадратов со стороной 1 равно 0,8, а одна из сторон первого квадрата параллельна одной из сторон второго. Какую наименьшую площадь может иметь их общая часть?

Ответ: 0,18.

Решение. Пусть начало координат находится в середине стороны первого квадрата, ось Ox направлена вдоль его стороны, а ось Oy проходит через его центр так, что он находится в точке с координатами $(0, 1/2)$. Пересечение двух квадратов — прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. Обозначим через a и b длины сторон этого прямоугольника, параллельные осям Ox и Oy соответственно. Тогда с помощью теоремы Пифагора несложно показать, что расстояние d между центрами квадратов удовлетворяет равенству

$$d^2 = (1/2 - a + 1/2)^2 + (3/2 - b - 1/2)^2 = (1 - a)^2 + (1 - b)^2.$$

Пусть $S = ab$. Тогда $d^2 = (a+b)^2 - 2(a+b) + 2 - 2S$, откуда $2S = (a+b-1)^2 + 1 - d^2$. Минимальная площадь равна $(1 - d^2)/2$.

б) Расстояние между центрами двух квадратов со стороной 1 равно 0,9, а одна из сторон первого квадрата параллельна одной из сторон второго. Какую наименьшую площадь может иметь их общая часть?

Ответ: 0,095.

в) Расстояние между центрами двух квадратов со стороной 1 равно 0,75, а одна из сторон первого квадрата параллельна одной из сторон второго. Какую наименьшую площадь может иметь их общая часть?

Ответ: 0,21875.

г) Расстояние между центрами двух квадратов со стороной 1 равно 0,85, а одна из сторон первого квадрата параллельна одной из сторон второго. Какую наименьшую площадь может иметь их общая часть?

Ответ: 0,13875.

6. а) В треугольнике ABC со стороной $BC = 3\sqrt{193}$ ортогональные проекции медианы BM на прямые AB и AC равны и имеют длину 25,2. Найдите длину биссектрисы AL треугольника ABC.

Ответ: 8.

Решение. Поскольку проекции отрезка BM на прямые AB и AC равны, этот отрезок образует равные углы с прямыми. Обозначим $\angle ABM = \angle AMB = \alpha$, $AB = x$. У треугольника ABM два угла равны, значит, он равнобедренный, следовательно, $AC = 2AM = 2AB = 2x$, $\angle BAM = 180^\circ - 2\alpha$.

Далее находим: $BM = 2x\cos\alpha$, проекция BM на сторону AC равна $BM\cos\alpha = 2x\cos^2\alpha$. Из условия получаем, что $2x\cos^2\alpha = 25{,}2$, поэтому $x(1+\cos 2\alpha) = \frac{126}{5}$, $\cos 2\alpha = \frac{126}{5x} - 1$. Кроме того, по теореме косинусов для треугольника ABC имеем равенство $BC^2 = x^2 + 4x^2 - 2\cdot x\cdot 2x\cdot\cos(180^\circ - 2\alpha)$, то есть $5x^2 + 4x^2\cos 2\alpha = 9\cdot 193$. Подставляя сюда найденное выше значение $\cos 2\alpha$, получаем квадратное уравнение относительно x, имеющее единственный положительный корень $x = 15$. Тогда $\cos 2\alpha = \frac{17}{25}$, $\sin\alpha = \frac{2}{5}$.

Искомая биссектриса находится по формуле

$$AL = \frac{2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\angle BAC\right)}{AB + AC} = \frac{4x^2\cos(90^\circ - \alpha)}{3x} = \frac{4x}{3}\sin\alpha = 8.$$

б) В треугольнике ABC со стороной $BC = 12\sqrt{217}$ ортогональные проекции медианы BM на прямые AB и AC равны и имеют длину 115,2. Найдите длину биссектрисы AL треугольника ABC.

Ответ: 16.

в) В треугольнике ABC со стороной $BC = 15\sqrt{34}$ ортогональные проекции медианы BM на прямые AB и AC равны и имеют длину 56,25. Найдите длину биссектрисы AL треугольника ABC.

Ответ: 10.

г) В треугольнике ABC со стороной $BC = 9\sqrt{73}$ ортогональные проекции медианы BM на прямые AB и AC равны и имеют длину 48. Найдите длину биссектрисы AL треугольника ABC.

Ответ: 12.

7. а) В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение $3x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{x_{2022}-x_{2020}}{x_{2025}-x_{2021}}$. При необходимости ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 2,7.

Решение. Заметим, что данное в условии равенство можно записать в виде $3(x_{n+2} - x_{n+1}) = (x_{n+1} - x_n)$. Если обозначить $x_{n+1} - x_n = y_n$, это равенство принимает вид $3y_{n+1} = y_n$. Искомое отношение при этом равно

$$\frac{(x_{2022} - x_{2021}) + (x_{2021} - x_{2020})}{(x_{2025} - x_{2024}) + (x_{2024} - x_{2023}) + (x_{2023} - x_{2022}) + (x_{2022} - x_{2021})} =$$
$$= \frac{y_{2021} + y_{2020}}{y_{2024} + y_{2023} + y_{2022} + y_{2021}} = \frac{81y_{2024} + 27y_{2024}}{y_{2024} + 3y_{2024} + 9y_{2024} + 27y_{2024}} = \frac{27}{10} = 2{,}7.$$

Итак, искомое отношение определено однозначно и равно 2,7.

б) В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение $5x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{x_{2025}-x_{2021}}{x_{2022}-x_{2020}}$. При необходимости ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 0,208.

в) В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение $7x_{n+2} - 8x_{n+1} + x_n = 0$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{x_{2022}-x_{2020}}{x_{2025}-x_{2021}}$. При необходимости ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 6,86.

г) В бесконечной числовой последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ не все члены равны между собой. Для всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение $10x_{n+2} - 11x_{n+1} + x_n = 0$. Найдите наибольшее возможное значение выражения $\frac{x_{2025}-x_{2021}}{x_{2022}-x_{2020}}$. При необходимости ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 0,101.

8. а) Площади трёх земельных участков образуют геометрическую прогрессию. С трёх участков берётся налог общей суммы S, которая распределяется пропорционально площади участков. Площадь каждого участка увеличили на 13 гектаров, в результате чего площадь большего участка стала ровно в 2 раза больше площади меньшего. Если теперь налог той же суммы S распределить по трём участками пропорционально их площади, то окажется, что с меньшего участка надо взять на 3,5 тысячи рублей больше налога, а с большего — на 4 тысячи рублей меньше налога. Найдите первоначальную площадь наименьшего участка. Ответ укажите в гектарах.

Ответ: 52.

Решение. Пусть x, xq, xq^2 (га) — площади участков (без ограничения общности $q > 1$). После увеличения площадей участков, их площади равны соответственно

$$x + 13, \quad xq + 13, \quad xq^2 + 13. \tag{2}$$

По условию $xq^2 + 13 = 2(x + 13)$, поэтому $x = \frac{13}{q^2-2}$. Подставляя это значение x в (2), получаем что новые площади участков равны

$$\frac{13(q-1)(q+1)}{q^2-2}, \quad \frac{13(q-1)(q+2)}{q^2-2}, \quad \frac{13(q-1)(2q+2)}{q^2-2}. \tag{3}$$

Первоначально налог распределялся в отношении $1 : q : q^2$, а после увеличения площадей участков — в отношении $(q+1) : (q+2) : (2q+2)$. Отсюда получаем уравнения

$$\frac{S(q+1)}{4q+5} - \frac{S}{1+q+q^2} = \frac{7}{2}, \quad \frac{S(2q+2)}{4q+5} - \frac{Sq^2}{1+q+q^2} = -4.$$

Делим первое уравнение на второе (в результате чего получаем уравнение с одной переменной q), и после преобразований получаем уравнение $2q^3 - 3q^2 - 4q + 6$, откуда $(2q-3)\left(q^2-2\right) = 0$. Так как второй множитель не может обращаться в ноль, $q = \frac{3}{2}$ и $x = \frac{13}{q^2-2} = 52$.

б) Площади трёх земельных участков образуют геометрическую прогрессию. С трёх участков берётся налог общей суммы S, которая распределяется пропорционально площади участков. Площадь каждого участка уменьшили на 5 гектаров, в результате чего площадь большего участка стала ровно в 10 раз больше площади меньшего. Если теперь налог той же суммы S распределить по трём участками пропорционально их площади, то окажется, что с меньшего участка надо взять на 67,5 тысяч рублей меньше налога, а с большего — на 90 тысяч рублей больше налога. Найдите первоначальную площадь наименьшего участка. Ответ укажите в гектарах.

Ответ: 12.

в) Площади трёх земельных участков образуют геометрическую прогрессию. С трёх участков берётся налог общей суммы S, которая распределяется пропорционально площади участков. Площадь каждого участка увеличили на 4 гектара, в результате чего площадь большего участка стала ровно в 5 раз больше площади меньшего. Если теперь налог той же суммы S распределить по трём участками пропорционально их площади, то окажется, что с меньшего участка надо взять на 5 тысяч рублей больше налога, а с большего — на 7 тысяч рублей меньше налога. Найдите первоначальную площадь наименьшего участка. Ответ укажите в гектарах.

Ответ: 4.

г) Площади трёх земельных участков образуют геометрическую прогрессию. С трёх участков берётся налог общей суммы S, которая распределяется пропорционально площади участков. Площадь каждого участка уменьшили на 1 гектар, в результате чего площадь большего участка стала ровно в 5 раз больше площади меньшего. Если теперь налог той же суммы S распределить по трём участками пропорционально их площади, то окажется, что с меньшего участка надо взять на 21 тысячу рублей меньше налога, а с большего — на

27 тысяч рублей больше налога. Найдите первоначальную площадь наименьшего участка. Ответ укажите в гектарах.
Ответ: 25.

9. а) В треугольной пирамиде боковые грани, имеющие площади $\frac{1625}{4}$, $\frac{1885}{4}$, 585, образуют равные углы с основанием. Площадь основания равна 360. Какой наименьший объём может иметь такая пирамида? Если необходимо, ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 3 780.

Решение. Известно, что в пирамиде, боковые грани которой образуют равные двугранные углы с основанием, вершина проецируется в центр вписанной окружности основания, а высоты боковых граней, проведённых из вершины пирамиды, равны. Обозначим через h длины этих высот, а через H — высоту пирамиды, проведённую из вершины к основанию. Обозначим также через α величину двугранного угла, под которым боковые грани наклонены к основанию пирамиды. Если S_0 — площадь основания, а S_1, S_2 и S_3 — площади боковых граней, то из формулы площади ортогональной проекции получаем

$$(S_1+S_2+S_3)\cos\alpha=S_0.$$

Объём пирамиды V будем вычислять по формуле

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_0\cdot H=\frac{1}{3}\cdot S_0\cdot h\sin\alpha.$$

Остаётся вычислить высоту боковой грани h, проведённую к ребру основания пирамиды. Заметим, что стороны основания пирамиды равны $\dfrac{2S_1}{h}$, $\dfrac{2S_2}{h}$ и $\dfrac{2S_3}{h}$. Если $\overline{S}=S_1+S_2+S_3$, то из формулы Герона следует, что

$$S_0^2=\frac{1}{h^4}\cdot\overline{S}\cdot(\overline{S}-2S_1)\cdot(\overline{S}-2S_2)\cdot(\overline{S}-2S_3).$$

Итак, получаем окончательно, что

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_0\cdot\sin\alpha\cdot\sqrt[4]{\frac{\overline{S}\cdot(\overline{S}-2S_1)\cdot(\overline{S}-2S_2)\cdot(\overline{S}-2S_3)}{S_0^2}}.$$

б) В треугольной пирамиде боковые грани, имеющие площади 286, $\frac{507}{2}$, $\frac{221}{2}$, образуют равные углы с основанием. Площадь основания равна 330. Какой наименьший объём может иметь такая пирамида? Если необходимо, ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 1 232.

в) В треугольной пирамиде боковые грани, имеющие площади 130, 125, 85, образуют равные углы с основанием. Площадь основания равна 204. Какой наименьший объём может иметь такая пирамида? Если необходимо, ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 544.

г) В треугольной пирамиде боковые грани, имеющие площади 175, $\frac{500}{3}$, $\frac{325}{3}$, образуют равные углы с основанием. Площадь основания равна 126. Какой наименьший объём может иметь такая пирамида? Если необходимо, ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 672.

10. а) В некоторые из 40 конвертов положили по одной открытке. Известно, что количество положенных открыток чётно. За одну операцию можно выбрать любые два конверта и узнать, есть ли в этих конвертах хотя бы одна открытка. За какое наименьшее количество таких операций можно гарантированно найти какой-нибудь конверт с открыткой?

Ответ: 39.

Решение. Занумеруем конверты числами от 1 до 40. Покажем, что за 39 операций можно найти конверт с открыткой. Зададим вопросы про пары конвертов $(1, 2)$, $(1, 3)$, $\ldots$, $(1, 40)$. Если все ответы «да», то в первом конверте лежит открытка (иначе есть еще хотя бы один пустой конверт, и один из ответов был бы «нет»). Если есть ответ «нет», то первый конверт пустой, и открытки будут лежать в тех конвертах, про которые ответили «да».

Покажем, что меньшего количества операций может не хватить. Предположим, что существует стратегия, позволяющая гарантированно найти конверт с открыткой за меньшее число операций. Будем всегда отвечать «да». Тогда максимум после 38 операций можно будет указать на конверт с открыткой (будем считать, что это конверт 1). Но тогда какого-то из вопросов вида $(1, N)$ задано не будет. Положим открытки во все конверты, кроме 1 и N. Тогда все ответы будут «да», но в конверте 1 открытки не будет. Противоречие.

б) В некоторые из 50 конвертов положили по одной открытке. Известно, что количество положенных открыток чётно. За одну операцию можно выбрать любые два конверта и узнать, есть ли в этих конвертах хотя бы одна открытка. За какое наименьшее количество таких операций можно гарантированно найти какой-нибудь конверт с открыткой?

Ответ: 49.

в) В некоторые из 60 конвертов положили по одной открытке. Известно, что количество положенных открыток чётно. За одну операцию можно выбрать любые два конверта и узнать, есть ли в этих конвертах хотя бы одна открытка. За какое наименьшее количество таких операций можно гарантированно найти какой-нибудь конверт с открыткой?

Ответ: 59.

г) В некоторые из 70 конвертов положили по одной открытке. Известно, что количество положенных открыток чётно. За одну операцию можно выбрать любые два конверта и узнать, есть ли в этих конвертах хотя бы одна открытка. За какое наименьшее количество таких операций можно гарантированно найти какой-нибудь конверт с открыткой?

Ответ: 69.

11 класс – день 1

1. а) Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P. Известно, что $AP = 1$, $BP : PC = 2$, а высота BH треугольника ABC равна 0,5. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP.
   Ответ: 3.

   б) Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P. Известно, что $AP = 2$, $BP : PC = 0{,}5$, а высота BH треугольника ABC равна 3. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP.
   Ответ: 1 или -1.

   в) Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P. Известно, что $AP = \sqrt{2}$, $BP : PC = 3$, а высота BH треугольника ABC равна 2. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP.
   Ответ: 2.

   г) Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P. Известно, что $AP = 4$, $BP : PC = 1{,}5$, а высота BH треугольника ABC равна 5. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP.
   Ответ: 4.

Серединный перпендикуляр к стороне AC треугольника ABC пересекает сторону BC в точке P. Известно, что $AP = a$, $BP : PC = k$, а высота BH треугольника ABC равна h. Найдите наименьшее возможное значение радиуса окружности, описанной около треугольника ACP.

Ответ: $\frac{a^2(k+1)}{2h}$.

Решение. Так как точки серединного перпендикуляра к отрезку равноудалены от концов этого отрезка, $CP = AP = a$. Следовательно, $BP = k \cdot CP = ak$. Обозначим $\angle ACP = \gamma$. Из прямоугольного треугольника BCH следует, что $\sin\gamma = \frac{BH}{BC} = \frac{h}{ak+a}$. Но тогда по теореме синусов радиус окружности, описанной около треугольника ACP, находится однозначно:

$$R = \frac{AP}{2\sin\gamma} = a : \frac{2h}{a(k+1)} = \frac{a^2(k+1)}{2h}.$$

Если конструкция не существует, принимаются также ответы “-1” или “нет решений”.

2. а) Числа p и q — простые, и при этом выполнено равенство $7p + q^5 = 17\,528$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $p + q$.

Ответ: 110.

Решение. Так как $q^5 = 17\,528 - 7p = 7(2\,504 - p)$, число q^5 должно делиться на 7. Но ввиду того, что оно простое, возможно только, что $q = 7$. Тогда $p = 103$. Таким образом, сумма $p + q$ определяется однозначно, и она равна 110.

б) Числа p и q — простые, и при этом выполнено равенство $7p + q^5 = 17\,556$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $p + q$.

Ответ: 114.

в) Числа p и q — простые, и при этом выполнено равенство $11p + q^4 = 15\,752$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $p + q$.

Ответ: 112.

г) Числа p и q — простые, и при этом выполнено равенство $11p + q^4 = 15\,774$. Найдите наибольшее возможное значение суммы $p + q$.

Ответ: 114.

3. а) Ваня с родителями ест плитку шоколада. Сначала мама откусила 13-ую часть плитки, а оставшуюся часть отдала Ване. Затем Ваня откусил 13-ую часть от того, что осталось, и отдал остальное папе. После этого папа откусил 13-ую часть от полученного и отдал остаток маме. Далее мама снова откусила 13-ую часть, отдала остаток Ване и так далее (до бесконечности). Во сколько раз больше шоколада, чем Ваня, съели мама и папа вместе? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 2,006.

Решение. Пусть первый раз мама откусила x от шоколадки. Так как Ване достаётся $\frac{12}{13}$ от исходной шоколадки, он в первый раз откусывает $\frac{12x}{13}$. Аналогично, папа откусывает $\frac{144x}{169}$. Таким образом, первые куски шоколада, съеденные мамой, Ваней и папой, относятся как

$$x : \frac{12x}{13} : \frac{144x}{169} = 169 : 156 : 144.$$

Отношения всех последующих кусков точно такие же, поэтому общие количества съеденного шоколада находятся в таком же отношении. Значит, мама и папа съели в $\frac{169+144}{156}$ раз больше. Округляя, получаем 2,006.

б) Ваня с родителями ест плитку шоколада. Сначала мама откусила 7-ую часть плитки, а оставшуюся часть отдала папе. Затем папа откусил 7-ую часть от того, что осталось, и отдал остальное Ване. После этого Ваня откусил 7-ую часть от полученного и отдал остаток маме. Далее мама снова откусила 7-ую часть, отдала остаток папе и так далее (до бесконечности). Во сколько раз больше шоколада, чем папа, съели Ваня и мама вместе? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 2,024.

в) Ваня с родителями ест плитку шоколада. Сначала мама откусила 12-ую часть плитки, а оставшуюся часть отдала Ване. Затем Ваня откусил 12-ую часть от того, что осталось, и отдал остальное папе. После этого папа откусил 12-ую часть от полученного и отдал остаток маме. Далее мама снова откусила 12-ую часть, отдала остаток Ване и так далее (до бесконечности). Во сколько раз больше шоколада, чем папа, съели мама и Ваня вместе? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 2,281.

г) Ваня с родителями ест плитку шоколада. Сначала мама откусила 14-ую часть плитки, а оставшуюся часть отдала папе. Затем папа откусил 14-ую часть от того, что осталось, и отдал остальное Ване. После этого Ваня откусил 14-ую часть от полученного и отдал остаток маме. Далее мама снова откусила 14-ую часть, отдала остаток папе и так далее (до бесконечности). Во сколько раз больше шоколада, чем мама, съели Ваня и папа вместе? Ответ округлите до трёх знаков после запятой.

Ответ: 1,791.

4. а) Сколько существует способов выбрать из натуральных чисел от 1 до 302 три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Ответ: $C_{100}^3 + 2 \cdot C_{101}^3 + 100 \cdot (100+1)^2 = 1\,515\,100$.

Решение. Найдем количество способов выбрать нужные три числа из натуральных чисел от 1 до $3n+2$. Все способы разобьём на два класса: к первому отнесём все те тройки, в которых остатки всех трёх чисел от деления на 3 одинаковы, а ко второму — тройки, в которых все три остатка от деления на 3 встречаются по одному разу. Общее число способов из первого класса равно $C_n^3 + 2 \cdot C_{n+1}^3$, поскольку чисел, кратных 3 — всего n, а чисел, имеющих остатки 1 и 2 при делении на 3 — по $n+1$ штук. Число способов из второго класса, соответственно, равно $n \cdot (n+1)^2$. Получаем ответ $C_n^3 + 2 \cdot C_{n+1}^3 + n \cdot (n+1)^2$.

б) Сколько существует способов выбрать из натуральных чисел от 1 до 272 три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Ответ: $C_{90}^3 + 2 \cdot C_{91}^3 + 90 \cdot (90+1)^2 = 1\,105\,740$.

в) Сколько существует способов выбрать из натуральных чисел от 1 до 242 три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Ответ: $C_{80}^3 + 2 \cdot C_{81}^3 + 80 \cdot (80+1)^2 = 777\,680$.

г) Сколько существует способов выбрать из натуральных чисел от 1 до 212 три различных числа так, чтобы их сумма делилась на 3?

Ответ: $C_{70}^3 + 2 \cdot C_{71}^3 + 70 \cdot (70+1)^2 = 521\,920$.

5. а) Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P. Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT = 3$, $EP = 4$.
Ответ: 5,76.

б) Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P. Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT = 5$, $EP = 10$.
Ответ: 20.

в) Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P. Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT = 12$, $EP = 6$.
Ответ: 28,8.

г) Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P. Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT = 4$, $EP = 12$.
Ответ: 14,4.

Биссектрисы прямоугольного треугольника ABC с гипотенузой AC пересекаются в точке P. Окружность с диаметром BP пересекает катеты AB и BC в. точках K и M соответственно. Прямые KP и MP пересекают гипотенузу в точках E и T соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $KBMP$, если $PT = b$, $EP = a$.
Ответ: $\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.
Решение. Углы BMP и BKP — прямые, так как вписаны в окружность и опираются на её диаметр BP. Значит, в четырёхугольнике $KBMP$ три прямых угла, и он прямоугольник. Диагональ BP этого четырёхугольника является биссектрисой его угла B, поэтому он является квадратом. Заметим также, что $MT \parallel AB$, $EK \parallel BC$.
Пусть BS — биссектриса треугольника ABC. Так как биссектриса делит противоположную сторону пропорционально двум другим сторонам,

$$\frac{BP}{PS} = \frac{AB}{AS} \quad \text{(свойство биссектрисы для } \triangle ABS), \tag{4}$$

$$\frac{AS}{SC} = \frac{AB}{BC} \Longleftrightarrow \frac{AS}{AC - AS} = \frac{AB}{BC} \Longleftrightarrow AS = \frac{AB \cdot AC}{AB + BC}. \tag{5}$$

Подставляя выражение для AS из (5) в (4), получаем $\frac{BP}{PS} = \frac{AB+BC}{AC}$. Поскольку треугольники ABC и TPE подобны, отсюда следует, что $\frac{AB+BC}{AC} = \frac{PT+PE}{ET} = \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
Известно, что если стороны треугольника равны x и y, а угол между ними равен α, его биссектриса, проведённая из вершины этого угла, определяется формулой $l = \frac{2xy\cos\frac{\alpha}{2}}{x+y}$. Следовательно, $PS = \frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. Но тогда $BP = \frac{a+b}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{ab\sqrt{2}}{a+b} = \frac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Значит, площадь квадрата $KBMP$ есть $S = \frac{1}{2}BP^2 = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$.

6. а) У Серёжи имеется новогодний подарок из N конфет, в котором есть конфеты только трёх типов: карамельки, шоколадные и ириски. Серёжа заметил, что если он сейчас съест несколько ирисок, то

- вероятность того, что он вытянет шоколадную конфету, удвоится;
- вероятность того, что он вытянет ириску, будет равна вероятности вытянуть карамельку из нераспакованного подарка.

Какое минимальное число ирисок может быть в изначальном подарке, если известно, что шоколадных конфет в нём 10, а всех конфет N — не менее 40?

Ответ: 26.

Решение. Пусть n, m, k — количества карамелек, шоколадных конфет и ирисок в изначальном новогоднем подарке соответственно. Обозначим за x то количество ирисок, которое Серёжа должен съесть, чтобы выполнялись условия задачи. Тогда из первого условия получаем равенство

$$2\frac{m}{N} = \frac{m}{N-x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad N = 2x.$$

Из второго условия следует, что

$$\frac{k-x}{N-x} = \frac{n}{N} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n = 2(k-x).$$

Так как шоколадных конфет 10, то получаем, что сумма всех конфет первоначального набора равна $2x = 2(k-x) + 10 + k$, поэтому $4x - 3k = 10$. У получившегося диофантова уравнения решениями являются пары $x = 4 + 3t$, $k = 2 + 4t$, где t — произвольное целое число. Так как $N = 2x = 2(4+3t) \geqslant 40$, то $t \geqslant 6$, поэтому минимальное количество ирисок равно $k = 2 + 4t = 26$. Остаётся заметить, что при $n = 8$, $m = 10$, $k = 26$, $N = 44$, $x = 22$ условие задачи выполнено.

б) У Серёжи имеется новогодний подарок из N конфет, в котором есть конфеты только трёх типов: карамельки, шоколадные и ириски. Серёжа заметил, что если он сейчас съест несколько шоколадных конфет, то

- вероятность того, что он вытянет ириску, удвоится;
- вероятность того, что он вытянет шоколадную конфету, будет равна вероятности вытянуть карамельку из нераспакованного подарка.

Какое минимальное число шоколадных конфет может быть в изначальном подарке, если известно, что ирисок в нём 11, а всех конфет N — не менее 50?

Ответ: 31.

в) У Серёжи имеется новогодний подарок из N конфет, в котором есть конфеты только трёх типов: карамельки, шоколадные и ириски. Серёжа заметил, что если он сейчас съест несколько ирисок, то

- вероятность того, что он вытянет шоколадную конфету, утроится;
- вероятность того, что он вытянет ириску, будет равна вероятности вытянуть карамельку из нераспакованного подарка.

Какое минимальное число ирисок может быть в изначальном подарке, если известно, что шоколадных конфет в нём 15, а всех конфет N — не менее 60?

Ответ: 48.

г) У Серёжи имеется новогодний подарок из N конфет, в котором есть конфеты только трёх типов: карамельки, шоколадные и ириски. Серёжа заметил, что если он сейчас съест несколько шоколадных конфет, то

- вероятность того, что он вытянет ириску, утроится;
- вероятность того, что он вытянет шоколадную конфету, будет равна вероятности вытянуть карамельку из нераспакованного подарка.

Какое минимальное число шоколадных конфет может быть в изначальном подарке, если известно, что ирисок в нём 12, а всех конфет N — не менее 57?

Ответ: 42.

7. а) Пункт B расположен на на прямолинейной дороге между пунктами A и C, причём $AB : BC = 8$. Первоначально Тигра и Пятачок находятся в пункте A, Винни-Пух – в пункте B, а Кролик – в пункте C. Они одновременно начинают движение, при этом Тигра и Пятачок идут из A в C, Винни-Пух – из B в C, а Кролик – из C в A. Наблюдая за передвижением своих друзей, Кристофер Робин заметил, что

- Пятачок и Винни-Пух встретились у домика Совы;
- Кролик и Тигра встретились у домика Совы;
- Тигра и Винни-Пух встретились у дупла с мёдом;
- Пятачок и Кролик встретились у дупла с мёдом;
- скорости Пятачка и Тигры различны.

Найдите отношение скорости Кролика к скорости Винни-Пуха. (Все движутся с постоянными скоростями; домик Совы и дупло с мёдом расположены в различных точках дороги между A и C.)

Ответ: 1,125.

Решение. Зададим на прямой AC координаты так, чтобы пункт A был расположен в начале координат, B — в точке $8x_0$, а C — в точке с координатой $9x_0$. Пусть П, В, К и Т — числа, обратные скоростям Пятачка, Винни-Пуха, Кролика и Тигры соответственно. Тогда законы изменения координаты Пятачка и Тигры в зависимости от времени τ имеют вид $\tau = \text{П}x$ и $\tau = \text{Т}x$ соответственно, а Винни-Пуха и Кролика, соответственно, $\tau = \text{В}(x - 8x_0)$ и $\tau = -\text{К}(x - 9x_0)$. Поскольку у домика Совы (координата x_1) встретились как Пятачок и Винни-Пух, так и Кролик и Тигра,

$$\begin{cases} \text{П}x_1 = \text{В}(x_1 - 8x_0), \\ \text{Т}x_1 = -\text{К}(x_1 - 9x_0). \end{cases}$$

Отсюда $\frac{\text{В}-\text{П}}{\text{Т}+\text{К}} = \frac{8\text{В}}{9\text{К}}$. Аналогично, поскольку встречи Тигры и Винни-Пуха, а также Пятачка и Кролика произошли у дупла с мёдом (координата x_2),

$$\begin{cases} \text{П}x_2 = -\text{К}(x_2 - 9x_0), \\ \text{Т}x_2 = \text{В}(x_2 - 8x_0). \end{cases}$$

Из этой системы $\frac{\text{В}-\text{Т}}{\text{К}+\text{П}} = \frac{8\text{В}}{9\text{К}}$. Из полученных выше соотношений

$$\frac{\text{В}-\text{П}}{\text{Т}+\text{К}} = \frac{8\text{В}}{9\text{К}}, \qquad \frac{\text{В}-\text{Т}}{\text{К}+\text{П}} = \frac{8\text{В}}{9\text{К}} \tag{6}$$

следует, что $\frac{\text{В}-\text{П}}{\text{Т}+\text{К}} = \frac{\text{В}-\text{Т}}{\text{К}-\text{П}}$. Перемножая и приводя подобные слагаемые, имеем:

$$\text{ВП} - \text{ПК} - \text{П}^2 = \text{ВТ} - \text{КТ} - \text{Т}^2 \Leftrightarrow (\text{П} - \text{Т})(\text{В} - \text{П} - \text{К} - \text{Т}) = 0.$$

По условию скорости Пятачка и Тигры различны, поэтому $\text{В} = \text{П} + \text{К} + \text{Т}$. Но тогда соотношения (6) принимают вид $1 = \frac{8\text{В}}{9\text{К}}$, а это значит, что отношение скорости Кролика к скорости Винни Пуха равно $\frac{\text{В}}{\text{К}} = \frac{9}{8} = 1{,}125$.

б) Пункт B расположен на на прямолинейной дороге между пунктами A и C, причём $AB : BC = 0{,}5$. Первоначально Тигра и Пятачок находятся в пункте A, Винни-Пух – в пункте B, а Кролик – в пункте C. Они одновременно начинают движение, при этом Тигра и Пятачок идут из A в C, Винни-Пух – из B в C, а Кролик – из C в A. Наблюдая за передвижением своих друзей, Кристофер Робин заметил, что

- Пятачок и Винни-Пух встретились у домика Совы;
- Кролик и Тигра встретились у домика Совы;
- Тигра и Винни-Пух встретились у дупла с мёдом;
- Пятачок и Кролик встретились у дупла с мёдом;

- скорости Пятачка и Тигры различны.

Найдите отношение скорости Кролика к скорости Винни-Пуха. (Все движутся с постоянными скоростями; домик Совы и дупло с мёдом расположены в различных точках дороги между A и C.)
Ответ: 3.

в) Пункт B расположен на на прямолинейной дороге между пунктами A и C, причём $AB : BC = 5 : 3$. Первоначально Тигра и Пятачок находятся в пункте A, Винни-Пух – в пункте B, а Кролик – в пункте C. Они одновременно начинают движение, при этом Тигра и Пятачок идут из A в C, Винни-Пух – из B в C, а Кролик – из C в A. Наблюдая за передвижением своих друзей, Кристофер Робин заметил, что

- Пятачок и Винни-Пух встретились у домика Совы;
- Кролик и Тигра встретились у домика Совы;
- Тигра и Винни-Пух встретились у дупла с мёдом;
- Пятачок и Кролик встретились у дупла с мёдом;
- скорости Пятачка и Тигры различны.

Найдите отношение скорости Кролика к скорости Винни-Пуха. (Все движутся с постоянными скоростями; домик Совы и дупло с мёдом расположены в различных точках дороги между A и C.)
Ответ: 1,6.

г) Пункт B расположен на на прямолинейной дороге между пунктами A и C, причём $AB : BC = 4 : 7$. Первоначально Тигра и Пятачок находятся в пункте A, Винни-Пух – в пункте B, а Кролик – в пункте C. Они одновременно начинают движение, при этом Тигра и Пятачок идут из A в C, Винни-Пух – из B в C, а Кролик – из C в A. Наблюдая за передвижением своих друзей, Кристофер Робин заметил, что

- Пятачок и Винни-Пух встретились у домика Совы;
- Кролик и Тигра встретились у домика Совы;
- Тигра и Винни-Пух встретились у дупла с мёдом;
- Пятачок и Кролик встретились у дупла с мёдом;
- скорости Пятачка и Тигры различны.

Найдите отношение скорости Кролика к скорости Винни-Пуха. (Все движутся с постоянными скоростями; домик Совы и дупло с мёдом расположены в различных точках дороги между A и C.)
Ответ: 2,75.

8. а) Дана треугольная пирамида $SABC$. Известно, что ортогональные проекции ребер SA, SB, SC на плоскость ABC имеют равные длины. Также равные длины имеют ортогональная проекция ребра SC на плоскость SAB и ортогональная проекция ребра SB на плоскость SAC. Найдите отношение $AB : AC$, если известно, что оно не равно 1, а $\sin\angle SAB = \frac{10}{\sqrt{149}}$.

Ответ: 0,7.

Решение. Так как проекции боковых рёбер на плоскость основания равны, то и сами боковые рёбра равны, т.е. $SA = SB = SC$. Проекции равных рёбер SB и SC на противоположные им боковые грани равны между собой, поэтому равны и высоты пирамиды, проведённые из вершин B и C на грани SAC и SAB. Но из формулы объёма пирамиды отсюда следует равенство площадей этих граней.

Грани SAB и SAC — это равнобедренные треугольники с одинаковыми боковыми сторонами, причём ввиду того, что $AB \neq AC$, эти треугольники не равны между собой.. Из равенства их площадей следует, что $\sin\angle ASB = \sin\angle ASC$, а так как эти углы не равны, $\angle ASB + \angle ASC = \pi$. Пусть $\angle SAB = \alpha$. Тогда $\angle ASB = \pi - 2\alpha$, $\angle ASC = 2\alpha$, $\angle SAC = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Отсюда имеем

$$1 = \frac{S_{SAB}}{S_{SAC}} = \frac{0{,}5AS \cdot AB\sin\alpha}{0{,}5AS \cdot AC\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{AB}{AC} \cdot \operatorname{tg}\alpha \quad \Rightarrow \quad AB : AC = \operatorname{ctg}\alpha.$$

б) Дана треугольная пирамида $SABC$. Известно, что ортогональные проекции ребер SA, SB, SC на плоскость ABC имеют равные длины. Также равные длины имеют ортогональная проекция ребра SC на плоскость SAB и ортогональная проекция ребра SB на плоскость SAC. Найдите отношение $AB : AC$, если известно, что оно не равно 1, а $\sin\angle SAB = \frac{8}{\sqrt{73}}$.

Ответ: 0,375.

в) Дана треугольная пирамида $SABC$. Известно, что ортогональные проекции ребер SA, SB, SC на плоскость ABC имеют равные длины. Также равные длины имеют ортогональная проекция ребра SC на плоскость SAB и ортогональная проекция ребра SB на плоскость SAC. Найдите отношение $AB : AC$, если известно, что оно не равно 1, а $\sin\angle SAB = \frac{4}{\sqrt{41}}$.

Ответ: 1,25.

г) Дана треугольная пирамида $SABC$. Известно, что ортогональные проекции ребер SA, SB, SC на плоскость ABC имеют равные длины. Также равные длины имеют ортогональная проекция ребра SC на плоскость SAB и ортогональная проекция ребра SB на плоскость SAC. Найдите отношение $AB : AC$, если известно, что оно не равно 1, а $\sin\angle SAB = \frac{5}{\sqrt{146}}$.

Ответ: 2,2.

9. а) Сколько пар натуральных чисел $(a; b)$ таких, что сумма $a+b$ чётна, удовлетворяют равенству $(a+1)a+7b = 1\,000\,001$?

Ответ: 144.

Решение. Правая часть равенства имеет остаток 2 от деления на 7. Левая часть имеет остаток 2 от деления на 7, только если a имеет остаток 1 или 5 от деления на 7.

Разберём эти случаи.

Пусть $a = 7k+1$, где k — целое неотрицательное число. Тогда равенство можно преобразовать к виду $7k^2+3k+b = 142\,857$. Заметим, что для каждого целого k такого, что $7k^2+3k < 142\,857$ число b определяется однозначно и является натуральным. Также заметим, что $7k^2+3k$ всегда чётно, поэтому b нечётно. Тогда сумма $a+b = 7k+1+b$ будет чётной, если k — чётное число. Значит, количество пар в этом случае равно количеству чётных $k \geqslant 0$ таких, что $7k^2+3k < 142\,857$, то есть $k \leqslant 142$. Отсюда количество пар равно 72.

Пусть $a = 7k+5$. Тогда равенство можно преобразовать к виду $7k^2+11k+b = 142\,853$. Аналогично предыдущему случаю получаем, что количество пар равно количеству чётных $k \geqslant 0$ таких, что $7k^2+11k < 142\,853$, то есть $k \leqslant 142$. Отсюда количество пар равно 72.

Общее количество пар равно $72+72 = 144$.

б) Сколько пар натуральных чисел $(a; b)$ таких, что сумма $a+b$ чётна, удовлетворяют равенству $(a+1)a+7b = 3\,000\,006$?

Ответ: 247.

в) Сколько пар натуральных чисел $(a; b)$ таких, что сумма $a+b$ чётна, удовлетворяют равенству $(a+1)a+7b = 4\,000\,005$?

Ответ: 286.

г) Сколько пар натуральных чисел $(a; b)$ таких, что сумма $a+b$ чётна, удовлетворяют равенству $(a+1)a+7b = 5\,000\,004$?

Ответ: 319.

10. а) В вершинах правильного 30-угольника разместили 28 белых и 2 чёрных фишки, причем чёрные фишки лежат в соседних вершинах. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

Ответ: 80.

Решение. Опишем вокруг многоугольника окружность. Если три вершины образуют прямоугольный треугольник, то гипотенуза является диаметром этой окружности.

Возможны два случая.

1. Угол с чёрной фишкой – прямой. Тогда гипотенузу для каждой из чёрных фишек можно выбрать $(30-4):2=13$ способами. Всего в этом случае получаем $2\cdot 13=26$ способов.

2. Угол с чёрной фишкой – не прямой. Значит, диаметр с концами в вершинах с белой и чёрной фишками является гипотенузой. Оставшуюся вершину прямого угла можно выбрать $30-3=27$ способами. Всего в этом случае получаем $2\cdot 27=54$ способа.

Общее количество способов есть $26+54=80$.

б) В вершинах правильного 34-угольника разместили 32 белых и 2 чёрных фишки, причем чёрные фишки лежат в соседних вершинах. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

Ответ: 92.

в) В вершинах правильного 40-угольника разместили 38 белых и 2 чёрных фишки, причем чёрные фишки лежат в соседних вершинах. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

Ответ: 110.

г) В вершинах правильного 44-угольника разместили 42 белых и 2 чёрных фишки, причем чёрные фишки лежат в соседних вершинах. Сколькими способами можно выбрать две белых и одну чёрную фишку так, чтобы они лежали в вершинах прямоугольного треугольника?

Ответ: 122.