

11-12th degree

Task 1.

1. Известно, что есть ровно 2^{2024} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее нечётное число элементов. Чему равно количество элементов множества A ?

There are exactly 2^{2024} ways to select from a finite set A a subset containing an odd number of elements. What is the number of elements in the set A ?

Answer: 2025

2. Известно, что есть ровно 2^{2024} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее чётное (возможное, нулевое) число элементов. Чему равно количество элементов множества A ?

There are exactly 2^{2024} ways to select from a finite set A a subset containing an even (possibly, zero) number of elements. What is the number of elements in the set A ?

Answer: 2025

3. Известно, что есть ровно 2^{101} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее нечётное число элементов. Чему равно количество элементов множества A ?

There are exactly 2^{101} ways to select from a finite set A a subset containing an odd number of elements. What is the number of elements in the set A ?

Answer: 102

4. Известно, что есть ровно 2^{101} способов выбрать из конечного множества A подмножество, содержащее чётное (возможное, нулевое) число элементов. Чему равно количество элементов множества A ?

There are exactly 2^{101} ways to select from a finite set A a subset containing an even (possibly, zero) number of elements. What is the number of elements in the set A ?

Answer: 102

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Зафиксируем некоторый элемент x множества A . Теперь разобьём все его подмножества на пары, отличающиеся только наличием (либо отсутствием) элемента x . Очевидно, в каждой паре одно подмножество содержит чётное (возможно, нулевое) число элементов, а другое – нечётное число элементов. Таким образом, «чётных» подмножеств столько же, сколько и «нечётных» – значит, если множество A содержит n элементов и, как следствие, 2^n подмножеств (включая пустое), то количество «нечётных» подмножеств равно $2^n : 2 = 2^{n-1}$. По условию это количество равно 2^{2024} ,

откуда $n = 2025$.

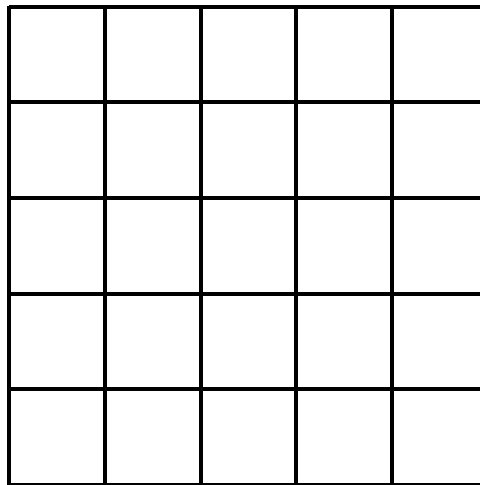
Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

Lets fix some element x of the set A . Now we divide all its subsets into pairs that differ only in the presence (or absence) of element x . Obviously, in each pair one subset contains an even (possibly zero) number of elements, and the other – an odd number of elements. Thus, there are as many «even» subsets as «odd» ones – by that, if set A contains n elements and (as a consequence) 2^n subsets (including the empty one), then the number of «odd» subsets is $2^n : 2 = 2^{n-1}$. By the task's condition, the number is 2^{2024} , thus $n = 2025$.

Task 2.

1. Город N состоит из 5×5 кварталов, каждый из которых – квадрат со стороной 100 метров (стороны квадратов – это улицы). Найдите наименьшую возможную длину пути, проходящего по каждой улице города N хотя бы по одному разу. Ответ дайте в метрах.

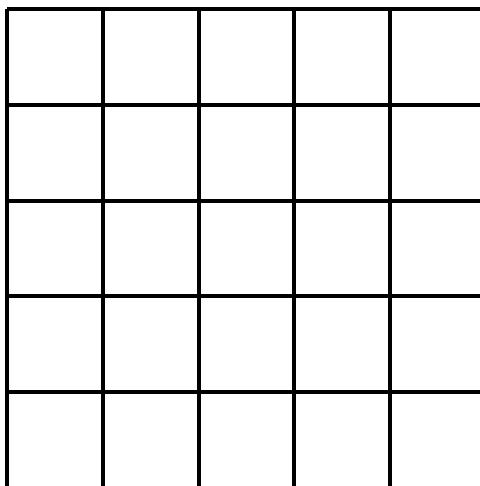
Town N has 5×5 blocks, each of them being a square with a side of 100 meters (the sides of the squares are streets). Find the shortest possible length of a path that passes through each street of the town at least once. Give your answer in meters.



Answer: 6700

2. Город N состоит из 5×5 кварталов, каждый из которых – квадрат со стороной 200 метров (стороны квадратов – это улицы). Найдите наименьшую возможную длину пути, проходящего по каждой улице города N хотя бы по одному разу. Ответ дайте в метрах.

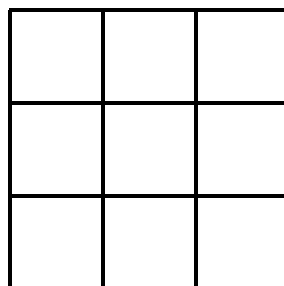
Town N has 5×5 blocks, each of them being a square with a side of 200 meters (the sides of the squares are streets). Find the shortest possible length of a path that passes through each street of the town at least once. Give your answer in meters.



Answer: 13400

3. Город N состоит из 3×3 кварталов, каждый из которых – квадрат со стороной 100 метров (стороны квадратов – это улицы). Найдите наименьшую возможную длину пути, проходящего по каждой улице города N хотя бы по одному разу. Ответ дайте в метрах.

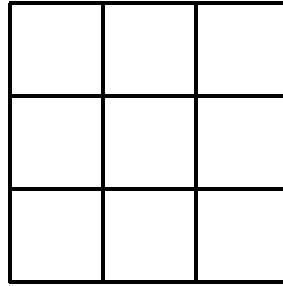
Town N has 3×3 blocks, each of them being a square with a side of 100 meters (the sides of the squares are streets). Find the shortest possible length of a path that passes through each street of the town at least once. Give your answer in meters.



Answer: 2700

4. Город N состоит из 3×3 кварталов, каждый из которых – квадрат со стороной 200 метров (стороны квадратов – это улицы). Найдите наименьшую возможную длину пути, проходящего по каждой улице города N хотя бы по одному разу. Ответ дайте в метрах.

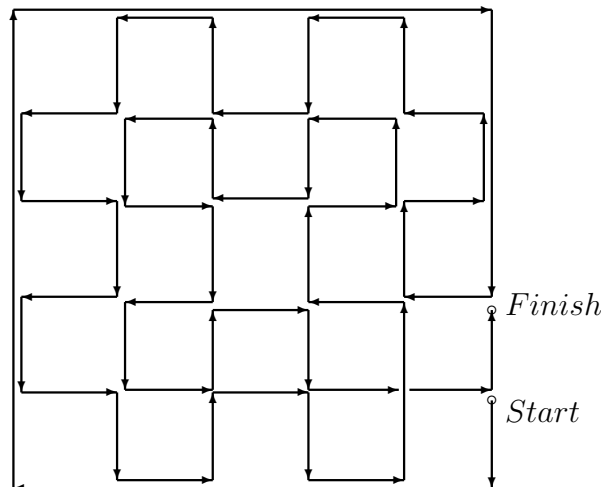
Town N has 3×3 blocks, each of them being a square with a side of 200 meters (the sides of the squares are streets). Find the shortest possible length of a path that passes through each street of the town at least once. Give your answer in meters.



Answer: 5400

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

В городе N есть 60 отрезков улиц длиной по 100 метров каждый. Представим сеть улиц в виде плоского графа, где ребра – упомянутые отрезки, а вершины – перекрестки (в т.ч. перекрестки двух отрезков улиц в углах города), и заметим, что в этом графе 16 вершин нечетной степени. Две из них могут быть соответственно началом и концом пути, а остальные 14 придется посетить как минимум дважды, т.е. придется пройти дважды как минимум по 7 ребрам (по одному на две «соседние» вершины нечетной степени), поэтому минимальное количество пройденных ребер не может быть меньше $60 + 7 = 67$, и тогда общая длина соответствующих отрезков улиц составляет не меньше 6700 метров. Соответствующий пример обхода приведен на рисунке.



Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

In the town N there are 60 street segments, each 100 meters long. Lets represent the street web as a planar graph, where the edges are the street segments mentioned, and the vertices are intersections (including intersections of two street segments at the corners of the city), and note that this graph has 16 vertices of odd degree. Two of them can be the beginning and end of the path, respectively, and the remaining 14 must be visited at least twice, i.e. it is necessary to traverse at least 7 edges twice (one for two adjacent vertices of odd degree), therefore the minimum number of edges traversed cannot be less than $60 + 7 = 67$, then the total length of the corresponding street segments is not less than 6700 meters. The corresponding example is shown on the picture above.

Task 3.

1. Рассмотрим рекурсивный алгоритм для неотрицательных целых a, b, c :

$$F(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{если } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{если } b \text{ четное} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{если } b \text{ нечетное} \end{cases}$$

Решите уравнение: $F(x, x, x) = 110$.

Consider a recursive algorithm for non-negative integers a, b, c :

$$F(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{if } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{if } b \text{ is even} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{if } b \text{ is odd} \end{cases}$$

Solve the equation: $F(x, x, x) = 110$.

Answer: 10

2. Рассмотрим рекурсивный алгоритм для неотрицательных целых a, b, c :

$$F(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{если } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{если } b \text{ четное} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{если } b \text{ нечетное} \end{cases}$$

Решите уравнение: $F(x, x, x) = 240$.

Consider a recursive algorithm for non-negative integers a, b, c :

$$F(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{if } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{if } b \text{ is even} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{if } b \text{ is odd} \end{cases}$$

Solve the equation: $F(x, x, x) = 240$.

Answer: 15

3. Рассмотрим рекурсивный алгоритм для неотрицательных целых a, b, c :

$$F(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{если } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{если } b \text{ четное} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{если } b \text{ нечетное} \end{cases}$$

Решите уравнение: $F(x, x, x) = 90$.

Consider a recursive algorithm for non-negative integers a, b, c :

$$F(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{if } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{if } b \text{ is even} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{if } b \text{ is odd} \end{cases}$$

Solve the equation: $F(x, x, x) = 90$.

Answer: 9

4. Рассмотрим рекурсивный алгоритм для неотрицательных целых a, b, c :

$$F(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{если } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{если } b \text{ четное} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{если } b \text{ нечетное} \end{cases}$$

Решите уравнение: $F(x, x, x) = 182$.

Consider a recursive algorithm for non-negative integers a, b, c :

$$F(a, b, c) = \begin{cases} c, & \text{if } b = 0 \\ F(2a, b/2, c), & \text{if } b \text{ is even} \\ F(2a, (b-1)/2, c+a), & \text{if } b \text{ is odd} \end{cases}$$

Solve the equation: $F(x, x, x) = 182$.

Answer: 13

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Докажем индукцией по $b \geq 0$ следующее утверждение: $F(a, b, c) = ab + c$. База индукции: $F(a, 0, c) = c = a \cdot 0 + c = c$.

Пусть для некоторого $b \geq 0$ имеет место $F(a, k, c) = ak + c$ для всех $0 \leq k \leq b$. Вычислим $F(a, b+1, c)$:

Если $b+1$ чётно, то $b+1 = 2k$, где $0 \leq k \leq b$. Тогда $F(a, b+1, c) = F(a, 2k, c) = F(2a, k, c) = 2a \cdot k + c = a(b+1) + c$.

Если $b+1$ нечётно, то $b+1 = 2k+1$, где $0 \leq k \leq b$. Тогда $F(a, b+1, c) = F(a, 2k+1, c) = F(2a, k, c+a) = 2a \cdot k + c + a = a(b+1) + c$.

Следовательно, $F(a, b, c) = ab + c$ для всех $b \geq 0$, и потому $F(a, a, a) = a^2 + a$. Значит, уравнение $F(x, x, x) = 110$ приводится к виду $x^2 + x = 110$, и единственный его целый неотрицательный корень – число 10.

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

Lets prove the following statement by induction on $b \geq 0$: $F(a, b, c) = ab + c$. Base of the induction: $F(a, 0, c) = c = a \cdot 0 + c = c$.

Let for some $b \geq 0$ we have $F(a, k, c) = ak + c$ for all $0 \leq k \leq b$. We calculate $F(a, b+1, c)$:

If $b+1$ is even, then $b+1 = 2k$, where $0 \leq k \leq b$. Then $F(a, b+1, c) = F(a, 2k, c) = F(2a, k, c) = 2a \cdot k + c = a(b+1) + c$.

If $b+1$ is odd, then $b+1 = 2k+1$, where $0 \leq k \leq b$. Then $F(a, b+1, c) = F(a, 2k+1, c) = F(2a, k, c+a) = 2a \cdot k + c + a = a(b+1) + c$.

Therefore, $F(a, b, c) = ab + c$ for all $b \geq 0$, thus $F(a, a, a) = a^2 + a$. By that, the equation $F(x, x, x) = 110$ is reduced to the form $x^2 + x = 110$, and its only non-negative integer root is 10.

1. Назовем n -звездой замкнутую ломаную с n равными звеньями и вершинами в вершинах правильного n -угольника ($n \geq 3$). Сколько существует 40-звезд?

Lets call a closed polyline with n equal links and vertices at the vertices of a regular n -gon ($n \geq 3$) an n -star. How many 40-stars are there?

Answer: 8

2. Назовем n -звездой замкнутую ломаную с n равными звеньями и вершинами в вершинах правильного n -угольника ($n \geq 3$). Сколько существует 50-звезд?

Lets call a closed polyline with n equal links and vertices at the vertices of a regular n -gon ($n \geq 3$) an n -star. How many 50-stars are there?

Answer: 10

3. Назовем n -звездой замкнутую ломаную с n равными звеньями и вершинами в вершинах правильного n -угольника ($n \geq 3$). Сколько существует 80-звезд?

Lets call a closed polyline with n equal links and vertices at the vertices of a regular n -gon ($n \geq 3$) an n -star. How many 80-stars are there?

Answer: 16

4. Назовем n -звездой замкнутую ломаную с n равными звеньями и вершинами в вершинах правильного n -угольника ($n \geq 3$). Сколько существует 72-звезд?

Lets call a closed polyline with n equal links and vertices at the vertices of a regular n -gon ($n \geq 3$) an n -star. How many 72-stars are there?

Answer: 12

Решение (RUS). (представлено решение варианта №1, остальные решаются аналогично)

Пусть AB – одно из звеньев ломаной-«звезды» из условия; назовем «шагом» звезды количество вершин n -угольника на меньшей дуге AB описанной около него окружности, увеличенное на 1 (например, если A, B – смежные вершины, то шаг звезды равен 1). Очевидно, что n -звезда однозначно задается своим шагом, причем звезды для шагов k и $n - k$ одинаковы.

Осталось понять, при каких k количество звеньев ломаной-«звезды» будет равно n : ясно, что если $\text{НОД}(n, k) = d > 1$, то из d подряд идущих вершин n -угольника только одна будет вершиной звезды, и потому количество ее звеньев будет меньше n .

Итак, k и n должны быть взаимно простыми, причем звезды разбиваются на пары равных, поэтому требуемое количество равно $\varphi(n)/2$, где $\varphi(n)$ – функция Эйлера числа n , т.е. количество натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n .

Поскольку $\varphi(40) = 16$, количество 40-звезд равно 8.

Solution (ENG). (given a solution to version 1 of the task since others are solved similarly)

Let AB be one of the links of an n -star from the task's formulation; we will call the star's «step» the number of vertices of the n -gon on the smaller arc AB of the circle described about it, increased by 1 (for example, if A, B are adjacent vertices, then the step of the star is 1). Obviously, the n -star is uniquely determined by its step, and the stars for steps k and $n - k$ are the same.

It remains to understand for what k the number of links of an n -star will be equal to n : it is clear that if $\text{GCD}(n, k) = d > 1$, then out of d consecutive vertices of the n -gon, only one will be a vertex of the star, and therefore the number of its links will be less than n .

So, k and n must be relatively prime, and the stars are divided into pairs of equal ones, so the required number is $\varphi(n)/2$, where $\varphi(n)$ is the Euler function of n , i.e. the number of positive integers not exceeding n and relatively prime to n .

Since $\varphi(40) = 16$, the number of 40-stars is 8.

Task 5. Среди всех ортогональных проекций треугольной пирамиды P на плоскость самую большую площадь имеет проекция на плоскость α , являющаяся четырехугольником и имеющая площадь 12. Найдите объем пирамиды P , если расстояние между ее скрещивающимися ребрами, параллельными α , равно 2. Обоснуйте свой ответ.

Among all orthogonal projections of a triangular pyramid P onto a plane, the projection onto the plane α , which is a quadrilateral of an area 12, has the largest area. Find the volume of the pyramid P while the distance between its edges parallel to α is 2. Explain your answer.

Answer: 8

Решение (RUS). Пусть скрещивающиеся ребра, о которых говорится в условии – AB, CD , а их проекции на плоскость α – $A'B', C'D'$, соответственно. Ввиду параллельности имеем $AB = A'B'$, $CD = C'D'$.

Кроме того, площадь S четырехугольника $A'B'C'D'$ может быть найдена как $\frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot C'D' \cdot \sin \varphi$, где φ – угол между $A'B'$ и $C'D'$. В свою очередь, объем V пирамиды $ABCD$ можно найти как $\frac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot h \cdot \sin \varphi$, где h – расстояние между прямыми AB и CD . Отсюда получаем

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 2 = 8$$

Критерии оценивания:

- дан верный ответ без обоснований – 0 баллов;
- дан верный ответ и приведена потенциально плодотворная идея доказательства – 2 первичных балла;
- дан верный ответ, приведена и частично реализована потенциально плодотворная идея доказательства – 3 первичных балла;
- доказательство содержит только незначительные ошибки – 4 первичных балла;
- полностью верное доказательство – 5 первичных баллов.

Solution (ENG). Let the edges mentioned in the task's formulation be AB, CD , and their projections onto the plane α be $A'B', C'D'$, respectively. Due to parallelism, we have $AB = A'B'$, $CD = C'D'$.

In addition, the area S of the quadrilateral $A'B'C'D'$ can be found as $\frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot C'D' \cdot \sin \varphi$, where φ is the angle between $A'B'$ and $C'D'$. Moreover, the volume V of the pyramid $ABCD$ can be found as $\frac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot h \cdot \sin \varphi$, where h is the distance between the lines AB and CD . By that,

$$V = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 2 = 8$$

Criteria:

- the correct answer is given without explanation – 0 points;
- the correct answer is given and a potentially fruitful idea for proof is given – 2 pre-points;
- the correct answer is given, a potentially fruitful idea for proof is given and partially implemented – 3 pre-points;
- the proof contains only minor errors – 4 pre-points;
- a completely correct proof – 5 pre-points.

Task 6. Даны чашечные весы: они могут абсолютно точно показывать равенство масс грузов на чашах весов, а если массы грузов различны, то показывают, на какой чаше груз тяжелее (но не показывают, на сколько груз тяжелее). Также дан набор из n гирь, масса каждой из которых – целое положительное число грамм, чтобы определить с помощью этих гирь и чашечных весов любую массу $m \leq M(n)$ (m – целое положительное число грамм) груза, где $M(n)$ – максимально возможное для данного n . Найдите выражение для $M(n)$. Обоснуйте свой ответ.

A scale is given: it can show absolutely accurately the equality of the masses of the loads on the scale pans, and if the masses of the loads are different, it shows on which pan the load is heavier (but does not show how much heavier the load is). Also given a set of n weights (the mass of each is a positive integer number of grams) in order to determine with the scale any mass $m \leq M(n)$ (m is a positive integer number of grams) of the load, where $M(n)$ is the maximum possible for the given n . Find an expression for $M(n)$. Explain your answer.

Answer: 3^n

Решение (RUS). Для начала заметим, что гири не запрещено (а значит, можно) класть на обе чаши весов. Если мы можем определить, что вес w груза меньше $t + 1$, но больше $t - 1$ (для некоторого целого положительного t), то, конечно, $w = t$, т.к. по условию масса груза – целое число. Значит, не обязательно иметь возможность «взвешивать» все положительные целые $w \leq M(w)$, а достаточно взвешивать все чётные w от 2 до $M(w) - 1$ ($M(w)$ должно быть нечётным, чтобы быть максимальным: если $w > M(w) - 1$, то $w = M(w)$).

Без ограничения общности будем считать, что взвешиваемый груз лежит на левой чаше весов. Очевидно, для каждой из n гирь есть ровно 3 возможности: либо она лежит на правой чаше весов, либо на левой, либо вообще не участвует во взвешивании – значит, количество чётных масс, которые мы можем отмерить, не превосходит $\frac{3^n - 1}{2}$: количество способов расположить n гирь минус одно (соответствует ситуации, когда мы вообще не кладем гири на весы), деленное на два, т.к. каждому расположению соответствует ненужное – «противоположное» (левая чаша меняется на правую, и наоборот), для которого $w < 0$, откуда $M(n) \leq 3^n$.

Выберем гири с массами $2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 3^2, 2 \cdot 3^3, \dots, 2 \cdot 3^{n-1}$ грамм и покажем, как с их помощью определить любой положительный целый вес $w \leq 3^n$.

Нетрудно понять, что любое (целое положительное) число в троичной системе счисления можно представить в виде разности целых положительных чисел, в троичной записи которых не

используется цифра «2». Если w чётное, то представим его в таком виде: $w = a - b$, где числа a, b записываются в троичной системе счисления без цифры «2», и цифры «1» стоят в этих числах в разных разрядах (иначе эти цифры можно заменить на нули). Ясно, что $a, b < 3^n$, т.е. в их троичной записи используются не более n значащих цифр (у каждого). Теперь пусть единице в k -м разряде соответствует гиря массой $2 \cdot 3^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$), причем разряды числа a соответствуют правой чаше весов, а разряды b – левой. Таким образом, разности $a - b$ соответствует расположение гирь на двух чашах весов, тогда $a - b$ принимает все чётные значения от 2 до $(3^n - 1)$, т.е. мы можем взвесить любое положительное четное $w < 3^n$.

Если же w нечётно, то описанным выше способом определим четные $w + 1$ (если $w < 3^n$) и $w - 1$ (если $w > 1$) – так мы определим w с учетом того, что оно целое.

Критерии оценивания:

- приведена потенциально плодотворная идея решения – 1 первичный балл;
- приведена и частично реализована потенциально плодотворная идея решения – 2 первичных балла;
- приведена идея с троичной системой (в том или ином виде), но нет достаточного обоснования – 3 первичных балла;
- решение почти полностью верно за исключением незначительных ошибок, либо не учтено, что нечетные веса можно не уравнивать явно – 4 первичных балла;
- полностью верное решение – 5 первичных баллов.

Solution (ENG). Note that it is not prohibited (and therefore it is allowed) to place weights on both scale pans. If we can determine that the weight w of the load is less than $t + 1$, but greater than $t - 1$ (for some positive integer t), then, of course, $w = t$, since by the condition the mass of the load is an integer. It means that it is not necessary to be able to «weigh» all positive integers $w \leq M(w)$, but it is sufficient to weigh all even w from 2 to $M(w) - 1$ ($M(w)$ must be odd to be maximal: if $w > M(w) - 1$, then $w = M(w)$).

Without loss of generality, we assume that the load lies on the left scale pan. Obviously, for each of the n weights there are exactly 3 possibilities: either it lies on the right pan of the scale, or on the left, or does not participate in the weighing at all – this means that the number of even masses that we can measure does not exceed $\frac{3^n - 1}{2}$: the number of ways to arrange n weights minus one (corresponds to the situation when we do not put weights on the scale at all), divided by two, since each arrangement corresponds to an unnecessary one – the «opposite» (the left pan changes to the right, and vice versa), for which $w < 0$, whence $M(n) \leq 3^n$.

Lets choose weights with masses $2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 3^2, 2 \cdot 3^3, \dots, 2 \cdot 3^{n-1}$ grams and show how to use them to determine any positive integer weight $w \leq 3^n$.

It is easy to see that any (positive integer) number in the ternary notation can be represented as a difference of positive integers, in the ternary notation of which the digit «2» is not used. If w is even, then we will represent it in the following form: $w = a - b$, where the numbers a, b are written in the ternary notation without the digit «2», and the digits «1» are in different places in these numbers (otherwise these digits can be replaced with zeros). It is clear that $a, b < 3^n$, i.e. in their ternary notation no more than n significant digits are used (for each). Now let the k -th digit correspond to a weight of $2 \cdot 3^k$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$), where the digits of a correspond to the right scale pan, and the digits of b correspond to the left. Thus, the difference $a - b$ corresponds to the arrangement of the weights on the two scale pans, then $a - b$ takes all even values from 2 to $(3^n - 1)$, i.e. we can weigh any positive even $w < 3^n$.

If w is odd, then we will use the method described above to determine even weights $w + 1$ (if $w < 3^n$) and $w - 1$ (if $w > 1$) – this is how we will determine w taking into account that it is an integer.

Criteria:

- a potentially fruitful solution idea is given – 1 pre-point;
- a potentially fruitful solution idea is given and partially implemented – 2 pre-points;
- an idea with a ternary system (in one form or another) is given, but there is no sufficient explanation – 3 pre-points;
- the solution is almost completely correct except for minor errors, or it is not taken into account that odd weights do not need to be explicitly equalized – 4 pre-points;
- a completely correct solution – 5 pre-points.