LXXXVIII Московская математическая олимпиада

Задачи и решения

Москва
Издательство МЦНМО
2025

Департамент образования и науки города Москвы
Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Московское математическое общество
Факультет математики НИУ ВШЭ
Физтех-школа прикладной математики и информатики
Центр педагогического мастерства
Московский центр непрерывного
математического образования

☞ Вопросы, оригинальные решения и иные комментарии по задачам олимпиады просим сообщать жюри по адресу электронной почты mmo@mccme.ru

☞ Материалы данной книги размещены на странице

mmo.mccme.ru

и доступны для свободного некоммерческого использования (при перепечатке желательна ссылка на источник).

Председатель оргкомитета LXXXVIII ММО
член-корреспондент РАН *А. И. Шафаревич*

Сборник подготовили:

И. Аржанцев, Ю. Арутюнов, А. Бегунц, И. Бельдиев, А. Блинков, И. Богданов, Д. Бродский, В. Буланкина, Е. Веретенников, А. Волостнов, М. Волчкевич, М. Гасанов, Т. Голенищева-Кутузова, Д. Горяшин, А. Грибалко, С. Гришин, Г. Гусев, А. Доледенок, С. Дориченко, М. Евдокимов, П. Закорко, А. Заславский, Н. Золин, Т. Казицына, Г. Караваев, В. Клепцын, П. Кожевников, М. Колодей, Д. Копьев, В. Короленков, Т. Корчемкина, М. Кошелев, А. Куссев, А. Кушнир, М. Лисицын, М. Ложкин, Ю. Маркелов, А. Мелешкина, Г. Мерзон, Г. Минаев, И. Михайлов, В. Новиков, А. Пешнин, А. Пономарёв, А. Попов, В. Радионов, А. Райгородский, М. Раскин, И. Раскина, А. Распопов, В. Ретинский, И. Русских, А. Соколов, А. Тертерян, В. Трещёв, А. Устинов, М. Федотова, А. Филатов, А. Хачатурян, А. Чеботаренко, Е. Чернышева, А. Шаповалов, И. Шейпак, И. Ященко

6 класс

1. В записи $12345678 = 1$ вставьте знаки умножения и деления между некоторыми цифрами так, чтобы равенство стало верным. (*А. Шаповалов*)

Ответ: $12 : 3 : 4 \cdot 56 : 7 : 8 = 1$.

2. Собрались на состязанье йог, бульдог и носорог. Один из них ловчее всех и всегда лжёт, другой — смелее всех и всегда говорит правду, третий — быстрее всех, может говорить и ложь, и правду. Они сделали три заявления.

Йог: Самый быстрый смелее меня.

Бульдог: Я быстрее самого ловкого.

Носорог: Я ловчее самого смелого.

Кто из них самый медленный? (*А. Шаповалов*)

Ответ: йог.

Решение. Может ли носорог быть самым смелым? Нет, так как в таком случае он бы говорил правду и действительно был бы ловчее самого смелого, но нельзя быть ловчее самого себя.

Может ли носорог быть самым ловким? Нет, так как в таком случае он ловчее самого смелого и говорит правду, хотя должен лгать. Значит, носорог – самый быстрый.

Йог тоже не может быть самым смелым. Ведь в таком случае он бы сказал правду, но самый быстрый не может быть ещё смелее его.

Значит, йог — самый ловкий. Тогда бульдог — самый смелый. Из слов бульдога ясно, что он быстрее йога. А так как носорог — самый быстрый, то йог — самый медленный.

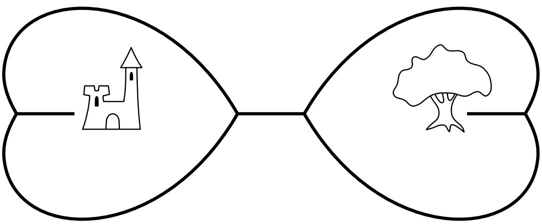
Комментарий. В этой задаче в условии явно указано, что по каждому показателю (ловкости, быстроте и смелости) кто-то один занимает первое место. В решении показано, что для быстроты можно также определить, что бульдог по ней на втором месте, а йог на третьем. А для ловкости и смелости определить, кто на втором месте, а кто на третьем, нельзя.

По смелости на первом месте бульдог. Так как йог лжёт, носорог не смелее его. Но и не обязательно трусливее, их смелость может быть и одинаковой. Итак, возможны два случая: либо на первом месте бульдог, на втором йог, на третьем носорог, либо на первом бульдог, а носорог и йог делят 2–3 места.

Про ловкость можно понять только то, что на первом месте йог. Правду ли говорит носорог, узнать нельзя. Поэтому нет никаких данных для сравнения носорога и бульдога по ловкости.

3. В Тридевятом царстве на каждом перекрёстке сходится ровно три дорожки. Было у царя три сына, старшие умные, а младший Иван-дурак. Послал старик сыновей за молодильными яблоками. Старший, выйдя из дворца, на первом перекрёстке свернул налево, на следующем направо, потом налево, снова направо — и дошёл до волшебной яблони. Средний на первом перекрёстке свернул направо, потом налево, снова направо, снова налево — и тоже дошёл до этой яблони. А Иван на всех перекрёстках поворачивал направо, три раза повернул да и пришёл обратно во дворец несолоно хлебавши. Нарисуйте пример, как может выглядеть схема дорожек в Тридевятом царстве, если известно, что и от царского дворца, и от яблони отходит ровно по одной дорожке. (*И. Русских*)

Ответ: пример схемы дорожек приведён на рисунке.



Комментарий. Пример по сути единственный: в любом примере из дворца можно дойти до четырёх перекрёстков, причём от первого до второго и от третьего до четвёртого перекрёстка есть по две дорожки.

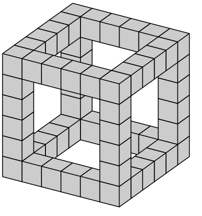
4. Из 54 красных и 54 белых брусков $1 \times 1 \times 2$ сложили куб $6 \times 6 \times 6$.

Какое наибольшее количество красных клеточек могло оказаться на поверхности куба? (*М. Евдокимов*)

Ответ: 172.

Решение. Распилим мысленно каждый брусок на два кубика и будем выкладывать куб из них. У нас получилось 108 красных и 108 белых кубиков. У каждого кубика на поверхности большого куба может оказаться от нуля до трёх граней-клеточек. Три грани на поверхности будут у восьми угловых кубиков. Две грани — у кубиков, расположенных вдоль рёбер большого куба, но не на углу. Вдоль каждого из 12 ребер таких кубиков 4, а всего их 48. Больше всего красных клеточек окажется на поверхности, если красными будут эти $8 + 48 = 56$ кубиков, а также $108 - 56 = 52$ кубика с одной гранью на поверхности. Тогда на поверхности окажется $3 \cdot 8 + 2 \cdot 48 + 52 = 172$ красных клеточки.

Приведём теперь пример выкладывания брусков, приводящего к такому результату.



Из 28 красных брусков сложим каркас (см. рисунок), а из 32 белых брусков — внутренний куб $4 \times 4 \times 4$. Оставшиеся шесть квадратных «окон» 4×4 на каждой грани заполним произвольно. Тогда на поверхности куба будет 120 красных клеток каркаса (по 20 на каждой грани) и ещё 52 красных клетки (по две у каждого из оставшихся $54 - 28 = 26$ красных брусков). Итого $120 + 52 = 172$ клетки.

5. Карлсон ест варенье вдвое быстрее, чем Малыш, а торт он ест втрое быстрее, чем Малыш.

Однажды они съели банку варенья и торт. Карлсон начал с торта, а Малыш с варенья. Покончив с тортом, Карлсон помог Малышу доесть варенье, и на всё это у них ушло два часа.

В другой раз они съели такую же банку варенья и такой же торт, но Малыш ел торт, а Карлсон начал с варенья. Съев его, Карлсон помог Малышу доесть торт. За какое время они управились на этот раз? (*А. Шаповалов*)

Ответ: за 2 часа 15 минут.

Решение. Представим себе, что был ещё и третий день, когда Карлсон всё съел в одиночку. Поэтому времени у него ушло больше, чем в первый день. Во сколько раз? Малыш в первый день ел только варенье, то есть работал как $\frac{1}{2}$ Карлсона, а Малыш и Карлсон вместе — как $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ Карлсона. Значит, в третий день Карлсон потратил бы в $\frac{3}{2}$ раза больше времени, чем в первый, а именно $\frac{3}{2} \cdot 2 = 3$ часа.

Сравним теперь третий день со вторым. Малыш во второй день ел только торт, то есть работал как $\frac{1}{3}$ Карлсона, а Малыш и Карлсон вместе — как $1\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ Карлсона. Значит, в третий день Карлсон потратил бы в $\frac{4}{3}$ раза больше времени, чем во второй. Так как в третий день было бы потрачено 3 часа, то во второй $3:\frac{4}{3}=\frac{9}{4}$ часа, или 2 ч 15 мин.

Приведём и алгебраическое решение. Пусть Карлсон съедает торт за x часов, а варенье за y часов. В первый день, пока Карлсон ел торт, Малыш съел $\frac{x}{2y}$ банки. Остаток банки, то есть

$$1-\frac{x}{2y}=\frac{2y-x}{2y},$$

они ели с суммарной скоростью

$$\frac{1}{2y}+\frac{1}{y}=\frac{3}{2y},$$

потратив на это

$$\frac{2y-x}{2y}:\frac{3}{2y}=\frac{2y-x}{3}\ \text{часов.}$$

Таким образом, всего они ели

$$x+\frac{2y-x}{3}=\frac{2(x+y)}{3}\ \text{часов,}$$

что по условию составляет 2 часа. Отсюда $x+y=3$.

Аналогично, во второй день Карлсон через y часов присоединился к Малышу доедать оставшиеся

$$1-\frac{y}{3x}=\frac{3x-y}{3x}$$

торта. Со скоростью

$$\frac{1}{3x}+\frac{1}{x}=\frac{4}{3x}$$

они сделали это за

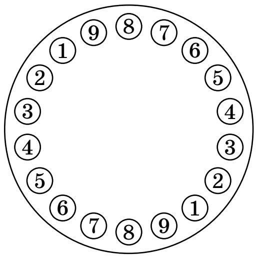
$$\frac{3x-y}{3x}:\frac{4}{3x}=\frac{3x-y}{4}\ \text{часов.}$$

Всего у них ушло

$$y+\frac{3x-y}{4}=\frac{3(x+y)}{4}=\frac{9}{4}\ \text{часа,}$$

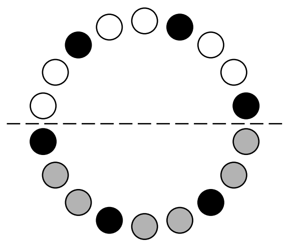
то есть 2 часа 15 минут.

6. У Пети было 18 одинаковых по внешнему виду монет — две по 1 г, две по 2 г, две по 3 г, ..., две по 9 г. Он разложил их на подносе по кругу, как показано на рисунке. Потом поднос как-то повернули, и теперь непонятно, где какая монета. Как за два взвешивания на чашечных весах без гирь это определить?



(*Т. Казицына*)

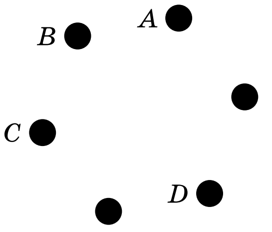
Решение. Проведём линию через центр круга (см. рис.).



Монеты ниже линии все разные, сумма их масс 45. Чёрные монеты ниже линии — либо 1, 4 и 7 (первый случай), либо 2, 5, 8 (второй случай), либо 3, 6, 9 (третий случай). Чёрные монеты выше линии — такие же, как и ниже. Положим серые монеты на одну чашу весов, чёрные на другую, и сравним их массы:

Случаи	Сумма чёрных	Сумма серых	Весы покажут
Первый	$2\cdot(1+4+7)=24$	$45-1-4-7=33$	Перевес серых
Второй	$2\cdot(2+5+8)=30$	$45-2-5-8=30$	Равновесие
Третий	$2\cdot(3+6+9)=36$	$45-3-6-9=27$	Перевес чёрных

Итак, теперь мы знаем веса чёрных монет (но не умеем пока их различать). Более того, мы точно знаем, где лежат монеты в 3, 6 и 9 г — либо это чёрные монеты, либо их соседи справа, либо их соседи слева — зависит от того, какой случай получился в первом взвешивании. Посмотрим на эти шесть монет (пусть они, например, чёрные).



Сравним $A+C$ и $B+D$. Возможны три случая:

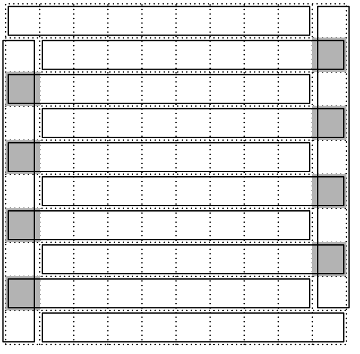
Случаи	$A+C$	$B+D$	Весы покажут
$A=3$	$3+9$	$6+6$	Равновесие
$A=6$	$6+3$	$9+9$	$A+C<B+D$
$A=9$	$9+6$	$3+3$	$A+C>B+D$

Теперь мы знаем вес монеты A, а тогда и всех остальных тоже.

7 класс

1. Квадрат 10×10 клеток надо покрыть полосками 1×9 клеток. Сделайте это так, чтобы каждая клетка была покрыта одной или двумя полосками, но никакой прямоугольник 1×2 не был покрыт в два слоя. (Полоски кладут по линиям сетки горизонтально или вертикально, полоски не должны выходить за границу квадрата.) (*М. Евдокимов*)

Ответ. См. рисунок (клетки, покрытые дважды, закрашены серым цветом).



Комментарий. Совсем просто покрыть горизонтальными полосками 1×9 прямоугольник 10×9. Если добавить две вертикальные полоски, то можно покрыть и квадрат 10×10. Чтобы никакой прямоугольник из двух клеток не был покрыт в два слоя, можно чередовать горизонтальные полоски, сдвинутые влево и вправо.

Начать с похожей, но более простой задачи вообще часто помогает.

2. Катя каждый день ест на завтрак либо кашу, либо яичницу, либо сырники, но никогда не ест два дня подряд одно и то же. В течение двух недель Катя записывала, чем она завтракала. Оказалось, что сырники она ела в два раза чаще, чем кашу. Сколько раз за эти две недели Катя завтракала яичницей? (*И. Русских*)

Ответ. 5 раз.

Решение. Если Катя сколько-то раз ела кашу, то сырники она ела вдвое больше, а яичницу — в оставшиеся дни. Запишем возникающие варианты в виде таблицы:

каша	сырники	яичница
1	2	11
2	4	8
3	6	5
4	8	2
5 или больше	10 или больше	невозможно

Катя могла завтракать каждым видом еды не больше 7 раз (докажем это ниже). Значит, единственная возможность — она ела кашу 3 раза, сырники 6 раз, яичницу 5 раз.

Разобьём 14 дней на 7 пар соседних дней. По условию любой вид еды в каждой такой паре встречался не больше 1 раза. Значит, любой вид еды действительно встречался не больше 7 раз.

Комментарий. Такая ситуация действительно возможна — например, Катя могла завтракать в таком порядке: С-Я-К-С-Я-К-С-Я-К-С-Я-С-Я-С.

3. У математика есть набор из 16 гирь: 1/3 кг, 1/4 кг, 1/5 кг, ..., 1/18 кг. На левой чаше весов лежит груз 1 кг. Какие гири положить на правую чашу весов, чтобы уравновесить груз? (Достаточно привести один пример.)

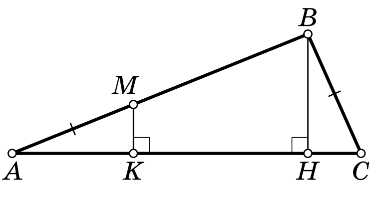
(*М. Евдокимов*)

Ответ. Есть три варианта:

$$1 = 1/3 + 1/4 + 1/6 + 1/9 + 1/12 + 1/18,$$
$$1 = 1/3 + 1/4 + 1/6 + 1/10 + 1/12 + 1/15,$$
$$1 = 1/3 + 1/4 + 1/9 + 1/10 + 1/12 + 1/15 + 1/18.$$

Комментарий. Легко получить 1/2 как сумму 1/3 и 1/6. Осталось набрать ещё 1/2. Гири 1/3 и 1/6 мы использовать больше не можем, но можем «собрать» 1/3 как $1/4 + 1/12$, а 1/6 — как $1/9 + 1/18$ или $1/10 + 1/15$. Можно также не использовать гирю 1/6 вообще, взяв и $1/9 + 1/18$, и $1/10 + 1/15$.

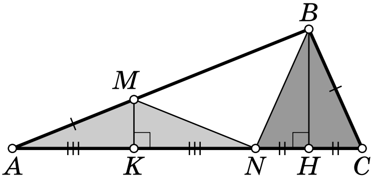
4. На стороне AB треугольника ABC отметили точку M так, что $AM = BC$. Из точек M и B на сторону AC опустили перпендикуляры MK и BH (см. рис.). AC вдвое больше KH. Угол A равен 22 градусам. Найдите угол C.



(*М. Волчкевич*)

Ответ 66°.

Решение. По условию $KH = AK + HC$. Значит, на отрезке KH можно выбрать такую точку N, что $AK = KN$, $NH = HC$.



Треугольники AMN и NBC равнобедренные, так как в каждом из них медиана совпадает с высотой. Получается, что и треугольник MNB равнобедренный: $MN = AM = BC = NB$. Значит, углы NMB и NBM при его основании равны.

Угол NMB равен $2 \cdot 22^\circ = 44^\circ$ как внешний угол равнобедренного треугольника AMN. А $\angle C = \angle BNC$, который равен $44^\circ + 22^\circ$ как внешний угол треугольника ABN.

5. В лесном пункте обмена можно обменять

- апельсин — на две груши,
- яблоко и грушу — на апельсин,
- апельсин и грушу — на яблоко.

По случаю праздника в пункте устроили акцию: за каждый обмен в подарок выдают коллекционный фантик. У лисы есть 30 яблок, 30 груш и 30 апельсинов. Какое максимальное количество фантиков она может получить?

(*Г. Караваев, И. Русских*)

Ответ: 208 фантиков.

Решение. Попробуем приписать фруктам цену в фантиках так, чтобы обмены были равноценными. В двух обменах груша + фрукт меняется на фантик + фрукт, поэтому пусть груша стоит 1 фантик, а апельсин и яблоко попробуем считать равноценными. Поскольку апельсин меняется на две груши и фантик, припишем апельсину и яблоку цену по 3 фантика. С такими ценами при обменах стоимость вещей у лисы в фантиках не меняется. При последнем обмене лиса получит фруктов стоимостью хотя бы два фантика, так что больше чем $30 + 30 \cdot 3 + 30 \cdot 3 - 2 = 208$ фантиков ей никак не получить.

Осталось объяснить, как лисе получить 208 фантиков. Один из возможных алгоритмов состоит из двух стадий.

1 стадия (превращаем всё в апельсины). Лиса обменивает все яблоки и груши на апельсины и получает 30 фантиков. Теперь у лисы 60 апельсинов.

2 стадия (избавляемся от апельсинов). Последовательностью обменов 2А $\to$ А $+$ 2Г $\to$ Я $+$ Г $\to$ А можно уменьшить количество апельсинов на один, получив 3 фантика. Лиса делает так 59 раз, и у неё останется один апельсин (и еще $59 \cdot 3 = 177$ фантиков). Осталось обменять этот последний апельсин на две груши и получить ещё фантик.

В итоге лиса получает $30 + 177 + 1 = 208$ фантиков, как и было обещано.

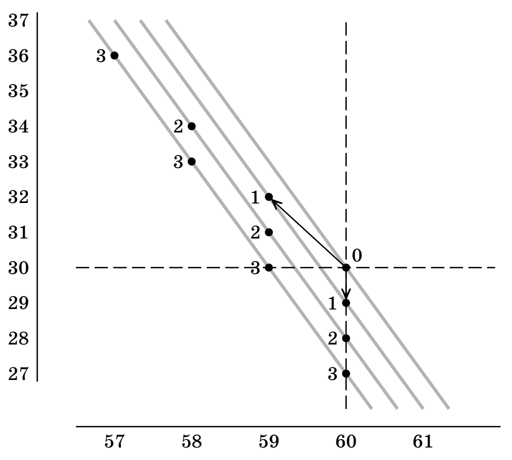
Комментарии. 1. Доказать, что больше 208 фантиков получить нельзя, можно и по-другому. Заметим, что каждый обмен не увеличивает количество не-груш, а обмен А $\to$ 2Г уменьшает его на 1. Поэтому обменов А $\to$ 2Г может быть не больше 60. При всех остальных обменах количество груш уменьшается на 1.

Если в конце ничего, кроме груш, не осталось, то последним ходом лиса обменяла апельсин на две груши. В этом случае в конце остаётся не меньше двух груш, следовательно, число обменов А $+$ Г $\to$ Я и Я $+$ Г $\to$ А не превышает $30 + 60 \cdot 2 - 2$.

Если же в конце остается какой-то фрукт, отличный от груши, то обменов А $\to$ 2Г не больше 59, а остальных не больше $30 + 2 \cdot 59$.

В обоих случаях суммарное количество обменов не превосходит 208.

2. Нарисуем график: если у лисы в какой-то момент x не-груш и y груш, отметим на координатной плоскости точку (x, y). Мож-



но заметить, что если провести через каждую точку с целыми координатами прямую «с наклоном $(1, -3)$» (прямые с уравнениями $y=-3x+c$), то с каждым обменом лиса переходит с прямой на прямую на 1 ниже (на рисунке показаны точки, в которые можно попасть, сделав не более 3 обменов). Подумайте, как это связано с рассуждением в начале решения.

6. У Васи есть трафареты и цветные карандаши. Вася каждым ходом может приложить трафарет к бумаге и закрасить выбранным цветом всю видимую через трафарет область.

Например, используя трафарет с двумя отверстиями, как на рисунке 1 слева, Вася может раскрасить фигурку справа за 3 хода в 3 цвета.

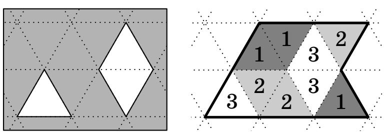


Рис. 1

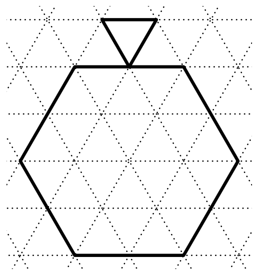
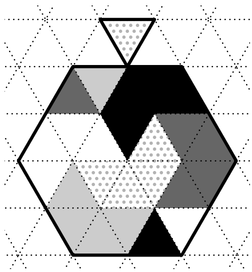


Рис. 2

Придумайте для Васи такой трафарет с двумя отверстиями, пользуясь которым он сможет за 5 ходов раскрасить фигуру в форме яблока (см. рис. 2) в 5 цветов так, чтобы каждая треугольная клетка была покрашена ровно одним цветом. Трафарет можно поворачивать и переворачивать.

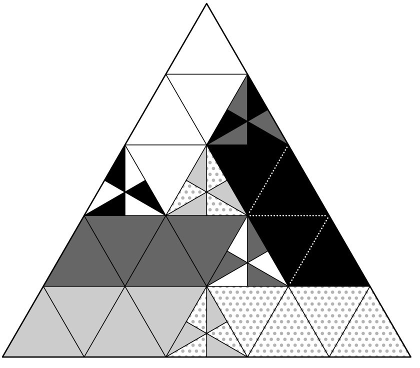
(*И. Русских*)

Ответ. См. рисунок. Решение единственно с точностью до симметрии.



Комментарий. В задаче предлагалось разрезать «яблоко» на 5 равных несвязных фигур (подчеркнём, что фигуры должны быть не просто одинаковой площади, а действительно равные — нарисованные при помощи одного и того же трафарета).

На рисунке ниже найденное несколько лет назад М. Патракеевым разрезание равностороннего треугольника на 5 равных частей. Намного легче разрезать равносторонний треугольник на 2, 3, 4, 6, 8 или 9 равных частей (тут можно обойтись и без несвязных частей, а резать просто на равные треугольники — попробуйте!). Можно ли разрезать равносторонний треугольник на 7 или, скажем, на 11 равных частей — никто не знает!



8 класс

1. На доске написаны два натуральных числа, одно из которых получается из другого перестановкой цифр. Может ли их разность равняться 2025? (Запись натурального числа не может начинаться с нуля.) (*В. Новиков*)

Ответ: да, может.

Решение. Разность этих чисел может равняться 2025. Например, $12050 - 10025 = 2025$.

Комментарий. На самом деле утверждение задачи верно для любой разности, кратной 9. Более того, можно подобрать два числа, отличающихся друг от друга сдвигом цифр на одну по циклу. Для этого нужно подбирать меньшее число с конца, поставив туда, например, цифру 1 и на место каждой следующей цифры записывая результат сложения в предыдущем разряде. Таким образом, для разности 5613417 получится следующий пример:

$$\begin{array}{r} 5613417 \\ +\;104873981 \\ \hline 110487398 \end{array}$$

Как мы видим, второе число получается из первого в результате циклического сдвига на 1 вправо.

2. На совместный симпозиум лжецов (всегда лгут) и правдолюбов (всегда говорят правду) собрались 12 участников, среди которых не все лжецы и не все правдолюбы. Каждые два участника либо знакомы, либо незнакомы друг с другом. Каждый ответил «да» или «нет» на вопрос «Знакомы ли вы?» про каждого из остальных. Какое наименьшее количество ответов «да» могло быть получено? (*М. Евдокимов*)

Ответ: 11.

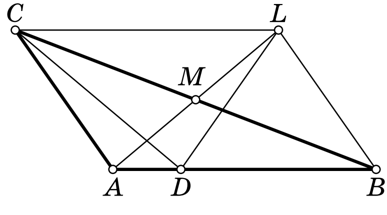
Решение. Рассмотрим каких-то двух участников и проанализируем их высказывания друг о друге. Если это два правдолюба, то на вопросы друг о друге оба либо дают ответ «да», если они знакомы, либо «нет», если незнакомы. Если это два лжеца, то, наоборот, знакомые лжецы отвечают «нет», а незнакомые — «да». Наконец, если один из знакомых участников — правдолюб, а другой — лжец, то правдолюб отвечает «да», а лжец — «нет»; если же они незнакомы, то, наоборот, правдолюб отвечает «нет», а лжец — «да».

Теперь ясно, что для достижения наименьшего количества ответов «да» необходимо, чтобы все лжецы были знакомы друг с другом, а все правдолюбы — не были. Если среди собравшихся k правдолюбов, то лжецов $12-k$, и количество ответов «да» в этом случае равно $k(12-k)$, то есть количеству пар, состоящих из правдолюба и лжеца (в каждой такой паре ровно один раз звучит ответ «да», независимо от знакомства или незнакомства участников). Выражение $k(12-k)=12k-k^2$ является квадратным трёхчленом с отрицательным старшим коэффициентом и вершиной $k_0=6$. Его наименьшее значение достигается при значениях k, наиболее удалённых от $k_0=6$, то есть при $k=1$ и $k=11$, и равно 11. Это также легко проверить перебором значений $k=1, 2, \ldots, 11$. Таким образом, 11 — наименьшее возможное количество ответов «да».

3. В треугольнике ABC на стороне AB отмечена точка D (отличная от A и B) и проведена медиана AM. Оказалось, что $AM=\frac{1}{2}CD$. Обязательно ли треугольник ABC тупоугольный? (*М. Федотова*)

Ответ: да, обязательно.

Решение. Продлим медиану AM на её длину до точки L ($AM=ML$). Тогда $ACLB$ — параллелограмм, $ACLD$ — трапеция. Поскольку её диагонали AL и CD равны, она равнобокая, откуда $LD=CA=LB$, то есть угол LBD острый как угол при основании равнобедренного $\triangle LBD$, а дающий в сумме с ним 180° угол CAB тупой.

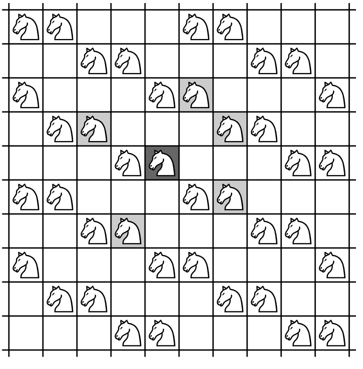


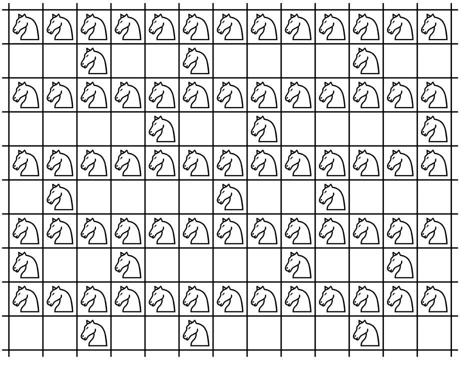
Второе решение (Василиса Шкуренко, 7 класс). Продлим медиану AM на её длину до точки L ($AM=ML$). Тогда $ACLB$ — параллелограмм, $ACLD$ — трапеция. Поскольку её диагонали AL и CD равны, она равнобокая. Так как $AD<CL$, $\angle CAD$ — тупой (углы при меньшем основании равнобедренной трапеции тупые).

4. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости расставить бесконечное количество шахматных коней (не более одного коня в клетку) так, чтобы каждый конь бил ровно 5 других? (*А. Тертерян*)

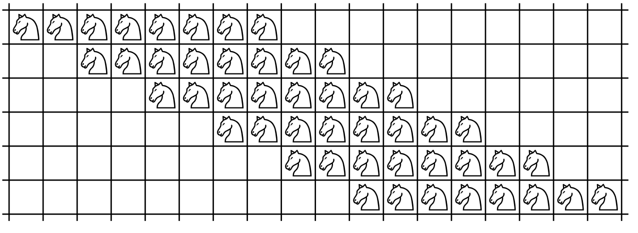
Ответ: да, возможно.

Решение. Два примера на рисунке. Каждая расстановка продолжается циклично как по горизонтали, так и по вертикали.





Комментарии. 1. Существуют и другие расстановки. Например, можно поставить в каждой строке 8 коней в ряд, в каждой следующей строке — на 2 клетки левее, чем в предыдущей.



Эти расстановки принципиально различаются тем, что в первом примере «плотность коней» — 2/5, во втором — 5/8, а в этом плотность нулевая. Предлагаем подумать, какие ещё значения плотности реализуются.

2. Можно раскрасить всю плоскость в 5 цветов, как показано на рисунке ниже. При этом конь в каждой клетке каждого цвета будет бить четыре клетки того же цвета и по одной клетке каждого из остальных цветов. Таким образом, для построения примера к задаче достаточно выбрать какие-то два цвета и поставить коней на все клетки этих цветов. Аналогично можно

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2

построить пример, в котором каждый конь бьёт 6 или 7 других: для этого достаточно взять все клетки трёх или четырёх цветов (см. 9 класс, задача 2).

5. По кругу стоят 50 чисел (необязательно целых). Известно, что произведение любых 25 чисел отличается от произведения 25 остальных не более чем на 2. Докажите, что какие-то два соседних числа отличаются не более чем на 2. (*И. Богданов*)

Первое решение. Пусть по кругу записаны числа a_1, a_2, …, a_{50} (в таком порядке). Докажем, что в одной из пар (a_1, a_2), (a_3, a_4), …, (a_{49}, a_{50}) числа отличаются не более чем на 2.

Рассмотрим выражение

$$A = (a_1 - a_2)(a_3 - a_4)\dots(a_{49} - a_{50}).$$

При раскрытии скобок получается сумма 2^{25} произведений по 25 исходных чисел — в каждое произведение входит по одному числу из каждой пары (a_1, a_2), (a_3, a_4), …, (a_{49}, a_{50}). Каждое из произведений входит в сумму со знаком «плюс» или «минус» — в зависимости от того, чётное или нечётное количество чисел из набора a_2, a_4, …, a_{50} содержится в данном произведении. Произведения разбиваются на пары: вместе с каждым произведением каких-либо 25 чисел в сумму входит и произведение остальных 25 чисел. При этом произведения из каждой такой пары входят в сумму с разными знаками. Действительно, если в одно из произведений входит k чисел из набора a_2, a_4, …, a_{50}, то оставшиеся $25 - k$ из этих чисел входят в парное произведение — и так как k и $25-k$ разной чётности, то соответствующие произведения имеют разные знаки.

Количество пар в два раза меньше, чем количество произведений, то есть равно $\frac{1}{2}\cdot 2^{25}=2^{24}$. По условию разность произведений в каждой паре по модулю не превосходит 2. Отсюда следует, что сумма, получающаяся после раскрытия скобок в выражении A, по модулю не превосходит $2\cdot 2^{24}=2^{25}$. Таким образом, мы доказали, что

$$|A|=|a_1-a_2|\cdot|a_3-a_4|\cdot\ldots\cdot|a_{49}-a_{50}|$$

не больше 2^{25}, а значит, один из 25 множителей $|a_1-a_2|$, $|a_3-a_4|$, ..., $|a_{49}-a_{50}|$ не больше 2, что и требовалось.

Второе решение. Предположим, что утверждение задачи неверно, то есть что любые два соседних числа отличаются более чем на 2. Как и в первом решении, разобьём числа на 50 непересекающихся пар соседних (a_1, a_2), (a_3, a_4), ..., (a_{49}, a_{50}) и в каждой паре выберем число с наибольшим модулем (если модули чисел в паре совпадают, можно выбрать любое число). Выбранные 25 чисел назовём *большими*, а оставшиеся 25 — *маленькими*. Докажем, что произведение 25 *больших* чисел отличается от произведения 25 *маленьких* более чем на 2. Не умаляя общности, будем считать, что *большие* числа — это $a_1, a_3, \ldots, a_{49}$, а *маленькие* — $a_2, a_4, \ldots, a_{50}$. Заметим, что модуль каждого из чисел $a_1, a_3, \ldots, a_{49}$ больше единицы — иначе в соответствующей паре числа отличались бы не более чем на 2.

Случай 1: в какой-то из выбранных пар числа одного знака (возможно, одно из чисел равно нулю). Без ограничения общности будем считать, что это пара (a_1, a_2). Докажем индукцией по n, что $|a_1a_3\ldots a_{2n-1}|-|a_2a_4\ldots a_{2n}|>2$ при любом n от 1 до 25. База для $n=1$ следует из нашего предположения. Переход от n к $n+1$: обозначим $A=a_1a_3\ldots a_{2n-1}$ и $B=a_2a_4\ldots a_{2n}$ и предположим, что

$$|a_1a_3\ldots a_{2n-1}|-|a_2a_4\ldots a_{2n}|>2.$$

Тогда

$$\begin{aligned}|Aa_{2n+1}|-|Ba_{2n+2}|&=|A|\cdot|a_{2n+1}|-|B|\cdot|a_{2n+2}|\geqslant\\&\geqslant|A|\cdot|a_{2n+1}|-|B|\cdot|a_{2n+1}|=\\&=|a_{2n+1}|(|A|-|B|)>2|a_{2n+1}|>2.\end{aligned}$$

Первое неравенство выполнено в силу условия $|a_{2n+1}| \geqslant |a_{2n+2}|$, второе — по предположению индукции, а третье — так как $|a_{2n+1}| > 1$. При $n = 25$ получается, что модули произведений $a_1 a_3 \ldots a_{49}$ и $a_2 a_4 \ldots a_{50}$ отличаются более чем на 2, и тогда тем более это верно для самих произведений.

Случай 2: в каждой из пар числа разного знака. Наше предположение о разности чисел в каждой паре переписывается как $|a_{2i-1}| + |a_{2i}| > 2$ при любом $i = 1, 2, \ldots, 25$. При этом произведения $a_1 a_3 \ldots a_{49}$ и $a_2 a_4 \ldots a_{50}$ имеют разные знаки, так что нужно доказать, что

$$|a_1 a_3 \ldots a_{49}| + |a_2 a_4 \ldots a_{50}| > 2.$$

Снова докажем индукцией по n, что

$$|a_1 a_3 \ldots a_{2n-1}| + |a_2 a_4 \ldots a_{2n}| > 2$$

при любом $n = 1, 2, \ldots, 25$. База для $n = 1$ уже известна. Докажем переход от n к $n+1$: обозначим $A = a_1 a_3 \ldots a_{2n-1}$ и $B = a_2 a_4 \ldots a_{2n}$ и предположим, что $|A| + |B| > 2$. Так как $|a_{2i-1}| \geqslant |a_{2i}|$ при любом i, то легко понять, что $|A| \geqslant |B|$. Нам нужно доказать, что $|A| \cdot |a_{2n+1}| + |B| \cdot |a_{2n+2}| > 2$. Для этого достаточно убедиться, что

$$|A| \cdot |a_{2n+1}| + |B| \cdot |a_{2n+2}| \geqslant |A| + |B|,$$

а это неравенство переписывается в следующем виде:

$$|A| \cdot (|a_{2n+1}| - 1) \geqslant |B| \cdot (1 - |a_{2n+2}|).$$

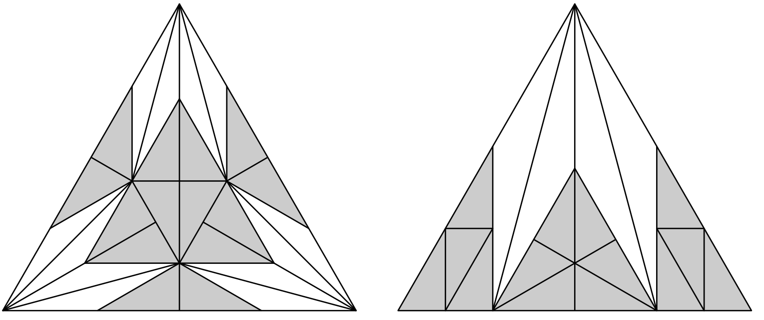
Вспомним, что $|a_{2n+1}| > 1$, так что если $|a_{2n+2}| \leqslant 1$, то последнее неравенство очевидно. В противном случае перепишем условие $|a_{2n+1}| + |a_{2n+2}| > 2$ в виде $|a_{2n+1}| - 1 > 1 - |a_{2n+2}|$, и, перемножая данное неравенство с $|A| \geqslant |B|$ (что возможно в силу неотрицательности выражений в неравенствах), получаем требуемое.

6. Правильный треугольник разрезан на треугольники, каждый из которых либо прямоугольный, либо равнобедренный. Все прямоугольные треугольники равны друг другу, все равнобедренные — тоже. Обязательно ли все углы равнобедренных треугольников кратны 30°?

(*А. Заславский*)

Ответ: нет, необязательно.

Решение. В первом примере на рисунке слева все 12 равнобедренных треугольников имеют углы 15, 15 и 150 градусов, а все 14 прямоугольных — 90, 60 и 30 градусов.



Есть и другие примеры, один из них — на рисунке справа (углы треугольников там те же, что в первом примере).

9 класс

1. Можно ли расставить девять различных целых чисел в клетки таблицы 3×3 так, чтобы произведение чисел в каждой строке равнялось 2025 и произведение чисел в каждом столбце тоже равнялось 2025? (*М. Евдокимов*)

Ответ: да, можно.

Решение. Разложим 2025 на простые множители:

$$2025 = 45^2 = 3^4 \cdot 5^2.$$

Один из возможных примеров:

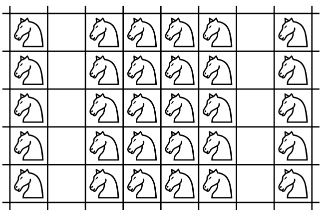
1	3	$3^3 \cdot 5^2$
5	$-3^3 \cdot 5$	-3
$3^4 \cdot 5$	-5	-1

Комментарий. Не существует примеров, в которых все числа натуральные.

2. Можно ли на бесконечной клетчатой плоскости расставить бесконечное количество шахматных коней (не более одного коня в клетку) так, чтобы каждый конь бил ровно 6 других? (*А. Тертерян*)

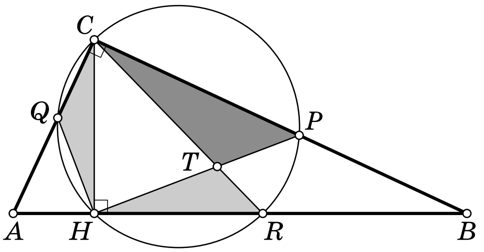
Ответ: да, можно.

Решение. Поставим коней во все клетки плоскости, кроме клеток каждой пятой вертикали. Несложно видеть, что каждый конь бьёт ровно 6 других.



Комментарий. Существуют и другие примеры, см. комментарий к задаче 4 для 8 класса.

3. В треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH. Окружность, проходящая через точки C и H, повторно пересекает отрезки AC, CB и BH в точках Q, P и R соответственно. Отрезки HP и CR пересекаются в точке T. Что больше: площадь треугольника CPT или сумма площадей треугольников CQH и HTR?



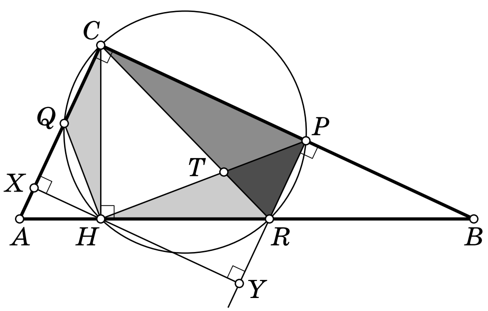
(*М. Евдокимов*)

Ответ: они равны.

Первое решение. Добавим к рассматриваемым площадям площадь треугольника PTR. Получим, что нужно проверить равенство

$$S_{CQH} + S_{HPR} = S_{CPR}.$$

Поскольку $\angle CHR = 90^\circ$, то CR — диаметр проведённой окружности, откуда $\angle CQR = \angle CPR = 90^\circ$. В четырёхугольнике $CPRQ$ три угла прямые, поэтому он является прямоугольником.



Опустим из точки H перпендикуляры HX и HY на прямые CQ и PR соответственно. Сумма их длин равна длине стороны CP прямоугольника. Следовательно,

$$\begin{aligned} S_{CQH}+S_{HPR} &= \frac{HX\cdot CQ}{2}+\frac{HY\cdot PR}{2}= \\ &= \frac{(HX+HY)\cdot PR}{2}= \\ &= \frac{XY\cdot PR}{2}=\frac{CP\cdot PR}{2}=S_{CPR}. \end{aligned}$$

Второе решение. Добавим к рассматриваемым площадям площадь четырёхугольника $BPTR$. Получим, что нужно проверить равенство

$$S_{CQH}+S_{BPH}=S_{BRC}.$$

Из вписанности $CPRH$ следует, что $\angle PHR=\angle PCR$. Поскольку PQ — диаметр окружности, то $\angle PHQ=90^\circ=\angle CHB$, поэтому

$$\angle CHQ=\angle PHR=\angle PCR.$$

Каждый из углов HCQ и CBH дополняет угол BCH до 90°, поэтому

$$\angle HCQ=\angle PBH=\angle RBC.$$

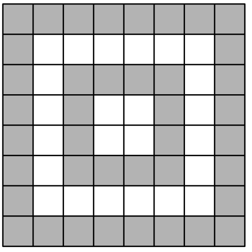
Следовательно, треугольники CQH, BPH и BRC подобны по двум углам. Тогда площади этих треугольников относятся как квадраты коэффициентов подобия, поэтому

$$\begin{aligned} S_{CQH}+S_{BPH} &= \left(\frac{CH}{BC}\right)^2\cdot S_{BRC}+\left(\frac{BH}{BC}\right)^2\cdot S_{BRC}= \\ &= \frac{CH^2+BH^2}{BC^2}\cdot S_{BRC}=S_{BRC}. \end{aligned}$$

4. Каждая клетка квадрата 100×100 покрашена либо в белый, либо в чёрный цвет. Оказалось, что у каждой белой клетки ровно две соседних с ней по стороне клетки покрашены в белый цвет, а у каждой чёрной клетки ровно две соседних с ней по стороне клетки покрашены в чёрный цвет. Найдите максимальное возможное количество чёрных клеток. (*А. Заславский*)

Ответ: 5100 клеток.

Первое решение. Пример. Приведём пример раскраски, в которой 5100 чёрных клеток. Разобьём квадрат на 50 «слоёв» толщиной в 1 клетку и покрасим их в чёрный и белый цвет так, что внешний слой покрашен в чёрный цвет, а соседние слои покрашены в разный цвет. На рисунке приведён пример такой раскраски для квадрата 8×8. Легко видеть, что эта раскраска удовлетворяет условиям задачи.



Посчитаем количество чёрных клеток. Внешний чёрный слой состоит из $99 \cdot 4$ клеток, следующий чёрный слой — из $95 \cdot 4$ клеток, следующий — из $91 \cdot 4$ клеток, ..., последний — из $3 \cdot 4$ клеток. Просуммировав арифметическую прогрессию, получаем 5100 чёрных клеток.

Оценка. Докажем, что в любой раскраске не более 5100 чёрных клеток. Рассмотрим произвольную раскраску, удовлетворяющую условию. Пусть в ней b чёрных и w белых клеток. Так как все клетки квадрата покрашены, то $b + w = 10000$.

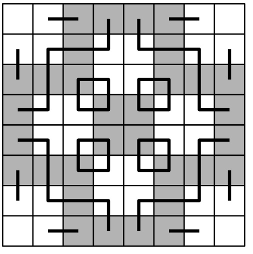
Назовём *ребром* общую сторону двух соседних по стороне клеток. В квадрате 100×100 есть $99 \cdot 100$ вертикальных рёбер и $99 \cdot 100$ горизонтальных, всего — 19800 рёбер. Будем называть ребро *чёрным*, если оно разделяет чёрные клетки, *белым*, если оно разделяет белые клетки, и *разноцветным*, если оно разделяет чёрную и белую клетки.

По условию на границе каждой чёрной клетки лежат ровно два чёрных ребра. Но и каждое чёрное ребро лежит на границе двух чёрных клеток, поэтому чёрных рёбер ровно b. Аналогично белых рёбер ровно w. Поэтому разноцветных рёбер

$$19800 - b - w = 19800 - 10000 = 9800.$$

На границе каждой белой клетки лежит не более двух разноцветных рёбер, а каждое разноцветное ребро лежит на границе ровно одной белой клетки. Из этого следует, что $2w \geqslant 9800$, то есть $w \geqslant 4900$. Поскольку $b + w = 10000$, то $b \leqslant 5100$, что и требовалось доказать.

Второе решение. Приведём другой способ сделать оценку. Отметим центры клеток и соединим отрезком центры соседних по стороне клеток разного цвета. Тогда угловые клетки не будут соединены ни с одной другой клеткой, клетки у границы будут соединены ровно с одной клеткой, клетки не у границы будут соединены ровно с двумя клетками. Следовательно, все клетки, кроме угловых, разобьются на цепочки, концы которых лежат на границе, и циклы. На рисунке приведён пример разбиения.



В каждом цикле и в каждой цепочке цвета клеток чередуются, поэтому в цикле количество чёрных и белых клеток совпадает, а в цепочке — совпадает или отличается на 1. Всего цепочек $392/2 = 196$, поэтому максимальная разность между количеством чёрных и белых клеток равна $196 + 4 = 200$. Следовательно, чёрных клеток не больше 5100.

Комментарии. 1. Пример оптимальной раскраски единственный. Действительно, из второго решения следует, что чёрных клеток на 200 больше, чем белых, только в случае, когда все угловые и все конечные клетки цепочек чёрные. Это соответствует тому, что все граничные клетки чёрные. Несложно видеть, что такая раскраска только одна.

2. Отметим, что в раскрасках, удовлетворяющих условию, связное по стороне множество чёрных клеток не обязательно образует прямоугольную каёмку (см. рисунок выше).

5. У хозяйки есть кусок мяса, которым она хочет накормить трёх котиков. Раз в несколько секунд хозяйка отрезает кусочек мяса и скармливает его одному из котиков на свой выбор, причём каждый кусочек должен составлять одну и ту же долю куска, от которого его отрезают. Через некоторое время хозяйка убирает остаток мяса в холодильник. Может ли она скормить котикам поровну мяса?

(*А. Кушнир*)

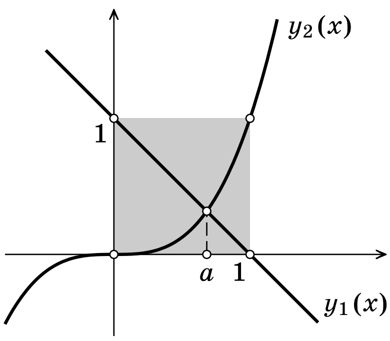
Ответ: да, может.

Решение. Пусть каждый отрезаемый кусочек составляет долю $(1-a)$ куска, от которого его отрезают, $0<a<1$. Тогда k-й отрезанный кусочек составляет долю $(1-a)a^{k-1}$ от изначального куска. Сократив на $(1-a)$, получим, что задачу можно переформулировать следующим образом: для некоторого $a \in (0;\,1)$ и натурального n необходимо разбить числа 1, a, a^2, ..., a^{n-1} на три группы с равными суммами.

Выберем в качестве a корень уравнения

$$1 = x + x^3 \Leftrightarrow 1 - x = x^3.$$

Он существует и принадлежит интервалу $(0,\,1)$, потому что графики функций $y_1(x) = 1 - x$ и $y_2(x) = x^3$ пересекаются внутри единичного квадрата на координатной плоскости (см. рисунок).



Поскольку $1 = a + a^3$, то для любого натурального k выполнено равенство $a^k = a^{k+1} + a^{k+3}$. Тогда

$$\begin{aligned}1 &= a + a^3 = (a^2 + a^4) + a^3 = a^2 + (a^5 + a^7) + (a^4 + a^6) = \\ &= a^2 + a^4 + a^5 + a^6 + a^7.\end{aligned}$$

Таким образом, для $n = 8$ и указанного a числа 1, a, ..., a^7 можно разбить на три группы с равными суммами:

$$\{1\}, \quad \{a,\,a^3\}, \quad \{a^2,\,a^4,\,a^5,\,a^6,\,a^7\}.$$

Комментарии. 1. Существуют и другие разбиения:

$$1 = a + a^4 + a^6 = a^2 + a^3 + a^5 + a^7,$$
$$1 = a^2 + a^3 + a^4 = a + a^5 + a^6 + a^7.$$

2. Существуют примеры с другим значением a. Например, если a — корень уравнения $1 = x^2 + x^3$, то

$$1 + a^4 = a + a^2 = a^3 + a^5 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12}.$$

3. Для четырёх котиков также существует пример. Если a — корень уравнения $1 = x^2 + x^3$, то

$$1 = a^2 + a^3 = a + a^5 = a^4 + a^6 + a^7 + a^8 + a^9 + a^{10} + a^{11} + a^{12} + a^{13}.$$

4. В настоящий момент неизвестно, разрешима ли задача для $k \geqslant 5$ котиков. Есть лишь несколько дополнительных соображений, которые могут помочь в анализе общего случая. За каждым разбиением должен стоять неприводимый многочлен (как $a^3 + a - 1$ в решении задачи или как $a^3 + a^2 - 1$ в комментарии 2), на который делятся разности элементов разбиения. Этот многочлен должен иметь действительный корень $a \in (0,\, 1)$, удовлетворяющий дополнительным условиям. Так как одна из частей разбиения не меньше 1, то сумма остальных частей не меньше $k - 1$. Значит,

$$a + a^2 + \ldots = \frac{a}{1-a} > k - 1.$$

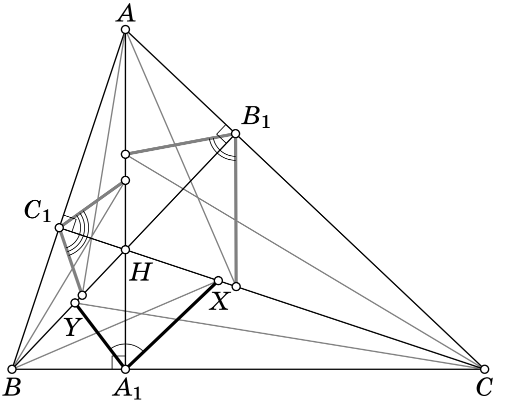
То есть корень многочлена должен лежать в интервале $\left(1 - \frac{1}{k},\, 1\right)$ и не должно быть корней в интервале $\left(0,\, 1 - \frac{1}{k}\right)$ (если бы такой корень был, то для него те же части тоже были бы равны, что невозможно). В частности, это означает, что многочлен не может быть возвратным.

Более простым для исследования является случай, когда одна из долей в точности равна 1. Тогда для некоторого n искомый неприводимый многочлен должен быть делителем многочлена

$$a^n + a^{n-1} + \ldots + a - (k - 1).$$

Если все многочлены такого вида окажутся неприводимыми, то это будет означать, что разбиение на k частей (когда одна из долей равна 1) невозможно. Пока доказательство последнего утверждения известно только для $k = 5$, см. обсуждение по ссылке: `https://mathoverflow.net/q/490414/5712`.

6. Высоты AA_1, BB_1, CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Биссектриса угла CBH пересекает отрезок CH в точке X, биссектриса угла BCH пересекает отрезок BH в точке Y. Обозначим величину угла XA_1Y через α. Аналогично определим β и γ. Найдите значение суммы $\alpha+\beta+\gamma$.



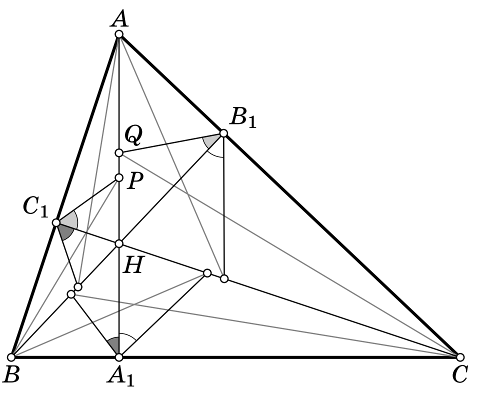
(*А. Доледенок*)

Ответ: 270°.

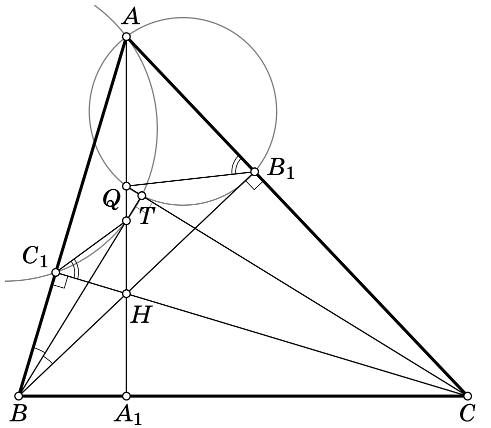
Решение. Обозначим точки пересечения биссектрис углов ABH и ACH с отрезком AH через P и Q соответственно. Докажем, что

$$\angle PC_1H = \angle AB_1Q = 90^\circ - \angle QB_1H.$$

Из этого будет следовать решение задачи — сумма из условия разбивается на три пары углов с суммой 90° (см. рисунок), то есть искомая сумма будет равна 270°.



Способ 1. Окружность, построенная на BC как на диаметре, проходит через точки B_1 и C_1, а биссектрисы вписанных углов B_1BC_1 и B_1CC_1 проходят через середину дуги B_1C_1, на которую они опираются; обозначим её через T. Таким образом, T — это точка пересечения прямых BP и CQ.



Поскольку

$$\angle BTC_1 = \angle BCC_1 = \angle BAA_1,$$

то точки A, T, P, C_1 лежат на одной окружности. Аналогично точки A, T, Q, B_1 лежат на одной окружности.

Тогда

$$\begin{aligned} \angle AC_1P + \angle AB_1Q &= (180^\circ - \angle ATP) + (180^\circ - \angle ATC) = \\ &= 360^\circ - (\angle ATP + \angle ATC) = \\ &= 360^\circ - (360^\circ - \angle BTC) = \\ &= \angle BTC = 90^\circ, \end{aligned}$$

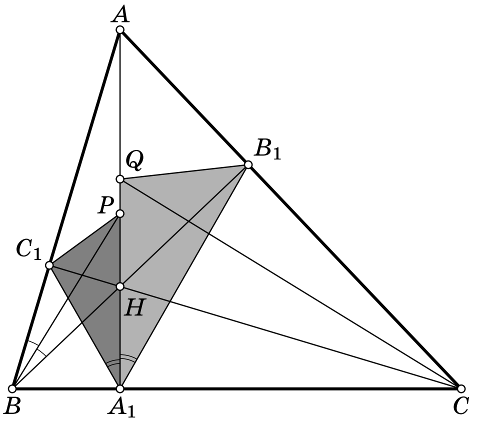
что и требовалось.

Способ 2. Так как $\angle ABH = \angle ACH$, то и $\angle ABP = \angle HCQ$, поэтому

$$\angle BPA_1 = \angle ABP + \angle BAP = \angle HCQ + \angle BCH = \angle BCQ.$$

Следовательно, прямоугольные треугольники BPA_1 и QCA_1 подобны по двум углам, поэтому

$$\frac{BA_1}{PA_1} = \frac{QA_1}{A_1C} \Leftrightarrow BA_1 \cdot A_1C = PA_1 \cdot QA_1. \qquad (1)$$



Как известно, треугольники A_1BC_1 и A_1B_1C подобны треугольнику ABC, а следовательно, подобны друг другу. Отсюда

$$\frac{BA_1}{A_1C_1} = \frac{B_1A_1}{A_1C} \Leftrightarrow BA_1 \cdot A_1C = B_1A_1 \cdot A_1C_1. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что

$$PA_1 \cdot QA_1 = B_1A_1 \cdot A_1C_1 \Leftrightarrow \frac{PA_1}{A_1C_1} = \frac{B_1A_1}{QA_1}.$$

Воспользуемся ещё одним известным фактом: высота AA_1 — биссектриса угла $B_1A_1C_1$. Из того, что $\angle C_1A_1P = \angle B_1A_1Q$, получаем, что треугольники PC_1A_1 и B_1QA_1 подобны по углу и отношению прилежащих сторон, откуда $\angle A_1C_1P = \angle A_1QB_1$.

Тогда

$$\angle PC_1H = \angle A_1C_1P - \angle A_1C_1C = \angle A_1QB_1 - \angle A_1AC = \angle AB_1Q,$$

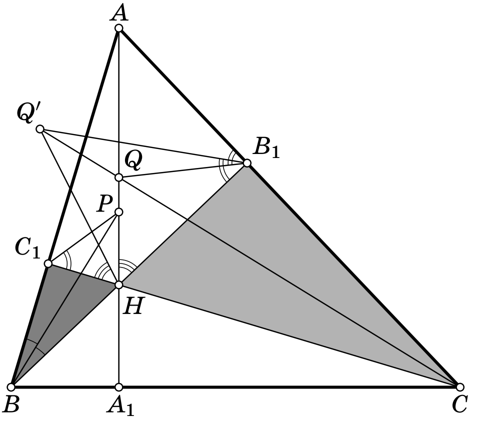
что и требовалось доказать.

Замечание для знатоков. Это решение можно переформулировать в терминах инверсии. Рассмотрим композицию инверсии с центром в точке A_1 радиуса $\sqrt{BA_1 \cdot A_1C}$ и симметрии относительно прямой AA_1. При этой композиции меняются местами точки B и C, A и H. Окружность, построенная на BC как на диаметре, переходит в себя, поэтому точки B_1 и C_1 меняются местами. Если точка P переходит в P', то по свойству инверсии $\angle PBH = \angle P'CA$, то есть $P' = Q$. Но тогда $\angle PC_1H = \angle QB_1A$, что и требовалось.

Способ 3. Пусть Q' — точка, изогонально сопряжённая Q относительно треугольника B_1CH. Так как

$$\angle ACQ' = \angle ACQ = \angle C_1BP \quad \text{и} \quad \angle Q'HC_1 = \angle QHB_1 = \angle PHB_1,$$

то P и Q' — соответствующие точки для подобных треугольников BC_1H и CB_1H. Тогда $\angle AB_1Q = \angle HB_1Q' = \angle HC_1P$, что и требовалось доказать.



Способ 4. Введём обозначения для углов:

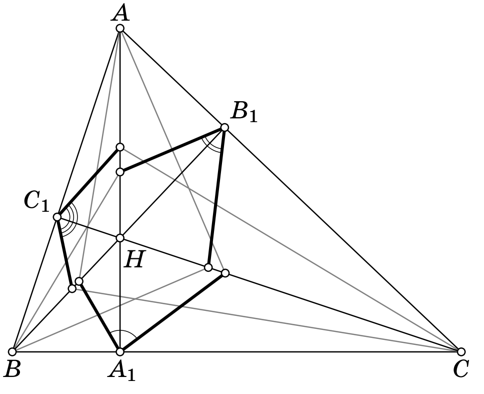
$$\angle ABC = \beta, \quad \angle ACB = \gamma, \quad \angle PC_1H = \varphi, \quad \angle AB_1Q = \psi.$$

Через $\rho(X, \ell)$ будем обозначать расстояние от точки X до прямой ℓ. Воспользовавшись тем, что P лежит на биссектрисе угла ABB_1, и тем, что $\angle AHC_1 = \gamma$ и $\angle AHB_1 = \beta$, получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{C_1P \cdot \sin \varphi}{C_1P \cdot \sin(90^\circ - \varphi)} = \frac{\rho(P, CC_1)}{\rho(P, AC_1)} = \\ = \frac{\rho(P, CC_1)}{\rho(P, BB_1)} = \frac{\sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Аналогично $\operatorname{tg} \psi = \dfrac{\sin \beta}{\sin \gamma}$, то есть $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \psi$. Поскольку φ и ψ меньше 90°, то равенство их тангенсов равносильно их равенству, то есть $\varphi = \psi$.

Комментарий. Соединим точку A_1 с основаниями биссектрис углов BAH и CAH, то же проделаем для точек B_1 и C_1. Аналогично доказывается, что сумма полученных углов равна 270°.



10 класс

1. Герцог Сумматор выбрал некоторые вещественные числа (хотя бы одно, но, возможно, бесконечное количество). То же самое сделал герцог Вычитатор. Оказалось, что если x является числом Сумматора, а y является числом Вычитатора, то $x+y$ является числом Сумматора, а $y-x$ является числом Вычитатора. Обязательно ли все числа Сумматора являются числами Вычитатора? (*А. Тертерян*)

Ответ: да, обязательно.

Решение. Пусть a — некоторое число Вычитатора, b — некоторое число Сумматора.

Лемма. Если x — число Сумматора, то $-x$ является числом Вычитатора.

Действительно, по условию получаем, что сумма чисел a и x является числом Сумматора. Тогда разность $a-(a+x)=$ $=-x$ является числом Вычитатора. Лемма доказана.

Вернёмся к задаче. Пусть x — произвольное число Сумматора. По лемме число $-x$ является числом Вычитатора. Значит, разность чисел $-x$ и b является числом Вычитатора. Но тогда сумма чисел $-x-b$ и b, что равно $-x$, является числом Сумматора. Снова применяя лемму, получаем, что $-(-x)=x$ — число Вычитатора, что и требовалось.

Комментарий. Из решения следует, что множества чисел, выбранных Сумматором и Вычитатором, совпадают.

2. См. задачу 3 для 9 класса (с. 23).

3. В Камелот съехались 100 рыцарей Круглого Стола, любые два из которых либо дружат, либо враждуют (дружба и вражда взаимны). Фея Моргана может выбрать любого рыцаря и сделать так, что он поссорится со всеми своими друзьями и при этом подружится со всеми своими врагами. Накладывать это заклинание Моргана может сколько угодно раз. Докажите, что она сможет добиться того, чтобы в итоге образовались такие две группы по 5 рыцарей, что каждый рыцарь из первой пятёрки будет враждовать с каждым рыцарем из второй. (*И. Богданов, М. Федотова*)

Первое решение. Возьмём произвольного рыцаря K_1. Наложим заклинание на тех рыцарей, кто дружит с K_1, тем самым K_1 теперь будет со всеми враждовать. Выберем другого рыцаря K_2. Помимо их двоих осталось ещё 98 рыцарей (обозначим их за $\mathcal{T}_1$), поэтому K_2 либо дружит хотя бы с $98/2=49$ рыцарями из $\mathcal{T}_1$, либо враждует хотя бы с 49 из них. Наложением заклинания на K_2 (если необходимо) можно добиться того, чтобы реализовался второй вариант, при этом оно не затронет отношения K_1 с рыцарями из $\mathcal{T}_1$. Таким образом, мы добились того, что K_1 и K_2 вместе враждуют с группой из 49 рыцарей (обозначим их за $\mathcal{T}_2$).

Продолжим процесс: выберем третьего рыцаря K_3 не из $\mathcal{T}_2$ ($K_3 \neq K_1, K_2$). Тогда в $\mathcal{T}_2$ найдётся либо хотя бы $\lceil 49/2 \rceil = 25$ врагов K_3, либо хотя бы 25 друзей K_3. Во втором случае наложим заклинание на K_3, что даст нам группу из 25 рыцарей (обозначим их за $\mathcal{T}_3$), враждующих с K_1, K_2, K_3. Аналогично находятся рыцари K_4, K_5 и строятся множества рыцарей $\mathcal{T}_4, \mathcal{T}_5$ размера $\lceil 25/2 \rceil = 13$ и $\lceil 13/2 \rceil = 7$ соответственно, при этом все рыцари из $\mathcal{T}_5$ будут враждовать с рыцарями $K_1, \ldots, K_5$, что и требовалось.

Второе решение. Выберем 5 рыцарей, назовём их *орденом*. На каждого из оставшихся рыцарей наложим заклинание в том и только в том случае, если он дружит не более чем с двумя рыцарями из ордена. После наложения всех заклинаний получим, что каждый рыцарь имеет не менее 3 друзей среди рыцарей ордена. Будем считать двух рыцарей не из ордена *схожими*, если они дружат с одинаковыми рыцарями ордена. Рыцарей вне ордена 95, а множество возможных друзей может принимать $C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 10 + 5 + 1 = 16$ различных значений. Значит, по принципу Дирихле найдётся хотя бы $\frac{95}{16} > 5$ схожих рыцарей, назовём их *братством*. Тогда фея Моргана может наложить заклинания на их общих друзей из ордена, после чего каждый рыцарь из ордена будет враждовать с каждым рыцарем из братства.

Третье решение. Нам понадобится следующая

Лемма. $C_k^5 + C_{99-k}^5 \geqslant C_{49}^5 + C_{50}^5$ для $k \in \mathbb{N}$ (считаем, что $C_k^5 = 0$ при $k < 5$).

Доказательство. Достаточно заметить, что для $x < y$ выполнено неравенство $C_x^5 + C_y^5 \geqslant C_{x+1}^5 + C_{y-1}^5$. Действительно, по условию $y - 1 \geqslant x$, поэтому $C_{y-1}^4 \geqslant C_x^4$. По свойству числа сочетаний левая часть равна $C_y^5 - C_{y-1}^5$, а правая равна $C_{x+1}^5 - C_x^5$, что приводит нас к требуемому неравенству. Лемма доказана.

Вернёмся к решению задачи. Назовём *метёлкой* такую пару из рыцаря (будем называть его *королём*) и пятёрки других рыцарей (будем называть эту пятерку *орденом*), что король либо дружит со всеми рыцарями ордена, либо враждует со всеми рыцарями ордена. Ясно, что если рыцарь K дружит с k рыцарями, то метёлок с королём K ровно $C_k^5 + C_{99-k}^5$, что по лемме не меньше $C_{50}^5 + C_{49}^5$, поэтому всего метёлок не менее $100 \cdot (C_{50}^5 + C_{49}^5)$. С другой стороны, количество возможных пятёрок равно C_{100}^5, поэтому по принципу Дирихле найдётся как минимум

$$\frac{100 \cdot (C_{50}^5 + C_{49}^5)}{C_{100}^5} = \frac{100 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot (50+45)}{100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot 97 \cdot 96} = \frac{47 \cdot 46 \cdot (50+45)}{99 \cdot 2 \cdot 97 \cdot 2} > 5$$

метёлок с одним и тем же орденом. Тогда достаточно взять 5 таких метёлок и наложить заклинание на тех королей, которые дружат с рыцарями из ордена. Таким образом, все пять королей будут враждовать со всеми пятью рыцарями этого ордена, что и требовалось.

4. Существуют ли такие натуральные числа m и n и такой многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(m)$ не делится на n, но $f(p^k)$ делится на n для любого простого числа p и любого натурального k?

(*А. Волостнов, С. Гришин*)

Ответ: существуют.

Решение. Приведём несколько примеров таких многочленов.

1) Пусть $f(x) = (x-2)(x-4)^2(x+1)^5$, $m = 6$, $n = 32$. Тогда $f(6) = 4 \cdot 2^2 \cdot 7^5 = 16 \cdot 7^5$ не делится на 32. Проверим, что $f(p^k)$ делится на 32 для любого простого числа p и любого натурального k. Если $p^k = 2$ или $p^k = 4$, то значение многочлена равно 0. Для $p^k = 2^k$, где $k \geqslant 3$, имеем

$$f(2^k) = (2^k - 2)(2^k - 4)^2(2^k + 1)^5 = \\ = 32(2^{k-1} - 1)(2^{k-2} - 1)^2(2^k + 1)^5.$$

Наконец, если простое число p нечётно (а значит, и p^k нечётно), то $f(p^k)$ делится на 32, так как при любом нечётном

$s=2l-1$ значение $f(s)$ делится на $(s+1)^5=(2l)^5$, а значит, и на 32.

2) Пусть $f(x)=x^{18}(3x-x^2)+x^2-3x$, $m=6$, $n=27$. Сначала проверим, что $f(p^k)$ делится на 27 при всех простых p и натуральных k.

Начнём со случая $p=3$. Заметим, что первое слагаемое делится на 3^{18}, а значит, и на 27. Остаётся проверить, что $x(x-3)$ делится на 27 для чисел вида 3^k, где $k\geqslant 1$. При $k=1$ и $k=2$ это проверяется непосредственно; при $k\geqslant 3$ число $3^k(3^k-3)$ также делится на 27.

Теперь проверим утверждение для простых чисел $p\neq 3$. В этом случае p^k взаимно просто с n, а значит, достаточно доказать утверждение «$f(s)$ кратно n при любом s, взаимно простом с n». Для этого заметим, что при всех таких s по теореме Эйлера выполняется соотношение $s^{18}=s^{\varphi(27)}\equiv 1 \pmod{27}$, а тогда

$$x^{18}(3x-x^2)+x^2-3x\equiv(3x-x^2)+x^2-3x\equiv 0 \pmod{27}.$$

Остаётся проверить, что $f(6)$ не делится на 27. Для этого снова заметим, что число 6^{18} делится на 27, а число $6^2-3\cdot 6=18$ не делится на 27.

3) Пусть $q>2$ — простое число, $m=2q$, $n=q^3$, и пусть $r_1, r_2, \ldots, r_t$ — все не кратные q натуральные числа, меньшие q^3. Положим $f(x)=x(x-q)\cdot(x-r_1)(x-r_2)\ldots(x-r_t)$. Этот многочлен подходит. Действительно,

$$f(m)=q^2\cdot 2\cdot(2q-r_1)(2q-r_2)\ldots(2q-r_t)$$

не кратно q^3. При $p\neq q$ число p^k имеет остаток от деления на q^3, не кратный q, поэтому один из множителей в определении $f(x)$ будет кратен q^3 при $x=p^k$. При $p=q$ и $k\geqslant 2$ уже число $p^k(p^k-q)$ будет кратно q^3. Наконец, при $p=q$, $k=1$ значение $f(p^1)=0$ делится на q^3.

Комментарий. Если добавить условие взаимной простоты чисел n и m, то ответ к задаче изменится на противоположный. В самом деле, предположим, что такое m нашлось. Нетрудно видеть, что в качестве n всегда можно брать степень простого числа. Действительно, если $f(m)$ не делится на n, то оно не делится и на q^l для некоторого простого q, для которого $n=bq^l$. В то же время из равенства $f(p^k)\equiv 0 \pmod{n}$ следует аналогичное равенство и для q^l. Если существует простое число r вида $q^l y+m$, то для него выполняются сравнения $0 \equiv f(r) \equiv f(m) \pmod{q^l}$. Существование такого простого числа следует из известной в теории чисел *теоремы Дирихле* о простых числах в арифметической прогрессии. Она утверждает, что в любой арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d, где натуральные числа a и d взаимно просты, найдётся бесконечно много простых чисел. Доказательство этой теоремы выходит далеко за рамки школьной программы.

5. См. задачу 6 для 9 класса (с. 29).

6. Около таверны стоят 100 эльфов, 100 гномов и 100 орков. Сначала в неё заходят 10 эльфов, 10 гномов и 10 орков. Затем каждую минуту из неё выходит одно существо и тут же заходит другое, причём всегда после выхода эльфа заходит гном, после выхода гнома — орк, а после выхода орка — эльф. Могло ли оказаться так, что в какой-то момент в таверне побывали все возможные компании из 30 существ ровно по одному разу? Все 300 существ различны.

(*М. Федотова*)

Ответ: не могло.

Первое решение. Назовём *типом* компании остаток разности количества эльфов и количества гномов при делении на три. Заметим, что компаний типа 1 и 2 одинаковое количество, так как между ними можно построить взаимно однозначное соответствие: пронумеруем эльфов и гномов от 1 до 100 и поменяем одних на других с теми же номерами. Далее заметим, что компании меняются по циклу $0 \to 1 \to 2 \to 0\ldots$, причём, так как компаний типов 1 и 2 поровну, мы не можем закончить на 1, то есть количество всех компаний не может давать остаток 2 при делении на 3. Вычислим C_{300}^{30} по модулю 3.

$$C_{300}^{30} = \frac{300 \cdot 299 \cdot 298 \cdot \ldots \cdot 273 \cdot 272 \cdot 271}{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{299 \cdot 298 \cdot 296 \cdot \ldots \cdot 274 \cdot 272 \cdot 271}{29 \cdot 28 \cdot 26 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot 92 \cdot 91}{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} \equiv$$

$$\equiv \frac{100 \cdot 99 \cdot \ldots \cdot 92 \cdot 91}{10 \cdot 9 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{100 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 94 \cdot 92 \cdot 91}{10 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{33 \cdot 32 \cdot 31}{3 \cdot 2 \cdot 1} \equiv$$

$$\equiv \frac{33 \cdot 32 \cdot 31}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 11 \cdot 16 \cdot 31 \equiv 2 \pmod 3.$$

Противоречие, значит, так оказаться не могло.

Комментарий. Есть другой способ посчитать остаток C_{300}^{30} при делении на 3. Теорема Люка утверждает, что если p — простое число, а числа n и k записываются в p-ичной системе счисления как $n=\sum n_ip^i$ и $k=\sum k_ip^i$, то $C_n^k\equiv\prod C_{n_i}^{k_i} \pmod p$. Запишем 300 и 30 в троичной системе счисления: $300=(102010)_3$ и $30=(1010)_3$. Таким образом, $C_{300}^{30}\equiv C_1^0C_0^0C_2^1C_0^0C_1^1C_0^0=2 \pmod 3$.

Второе решение. Разделим все компании на три типа, как в прошлом решении, по остатку разности количества эльфов и количества гномов при делении на 3. Если описанное в задаче возможно, то количество компаний разных типов отличается не более чем на 1, так как типы компаний меняются по циклу. Пронумеруем представителей всех рас от 1 до 100. Разобьем на тройки все компании, в которых множества номеров хотя бы каких-то двух рас различны, следующим образом. Возьмем некую компанию данного вида и рассмотрим максимальный номер, представленный хотя бы одной, но не всеми расами. Дважды «прокрутим» всех существ с этим номером, поменяв каждое существо на существо «следующей» расы с таким же номером. Легко видеть, что исходная и две полученные компании различных типов, причем с помощью данной операции они могут быть получены только друг из друга. При этом все компании не данного вида, коих всего C_{100}^{10}, имеют тип 0, то есть компаний типа 0 ровно на C_{100}^{10} больше, чем других, — противоречие.

11 класс, первый день

1. На совместный симпозиум лжецов (всегда лгут) и правдолюбов (всегда говорят правду) собрались 100 участников, среди которых не все лжецы и не все правдолюбы. Каждые два участника либо знакомы, либо незнакомы друг с другом. Каждый ответил «да» или «нет» на вопрос «Знакомы ли вы?» про каждого из остальных. Какое наименьшее количество ответов «да» могло быть получено?

(*М. Евдокимов*)

Ответ: 99.

Решение. Пусть на симпозиуме n лжецов и $100-n$ правдолюбов. По условию $1 \leqslant n \leqslant 99$. Посмотрим на какого-нибудь лжеца и какого-нибудь правдолюба. Если они знакомы, то правдолюб скажет «да», а если незнакомы, то лжец скажет «да». В любом случае будет ровно один ответ «да» для каждой такой пары, а всего пар $n(100-n)$. Минимальное значение этого выражения равно 99 и достигается при $n=1$ или $n=99$, так как если $2 \leqslant n \leqslant 98$, то $n(100-n) \geqslant 2 \cdot 50 = 100 > 99$. Таким образом, в любом случае будет не менее 99 ответов «да». Пример, когда это значение достигается: 99 лжецов и 1 правдолюб, и все друг с другом знакомы.

2. Дана последовательность $a_n = n!\,(n^2 - 2025n + 1)$ для всех натуральных n. Найдите сумму первых 2025 членов этой последовательности. (*М. Лисицын*)

Ответ: 2025.

Первое решение. Представим a_n в виде

$$\begin{aligned} a_n &= n!\big((n+1)(n+2) - (n+1) - 2027n\big) = \\ &= (n+2)! - (n+1)! - 2027n \cdot n! = \\ &= ((n+2)! - (n+1)!) - 2027((n+1)! - n!). \end{aligned}$$

Тогда получаем

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2025} = (2027! - 2!) - 2027 \cdot (2026! - 1!) = 2025.$$

Второе решение. Перейдём к более общей задаче: будем рассматривать последовательности $a_{k,n} = n!\,(n^2 - kn + 1)$, где k — фиксированное натуральное число, а n — номер члена последовательности, и искать сумму первых k членов таких последовательностей.

При $k=1$ получаем, что сумма равна

$$a_{1,1} = 1!\,(1-1+1) = 1.$$

При $k=2$ получаем, что сумма равна

$$a_{2,1} + a_{2,2} = 1!\,(1-2+1) + 2!\,(4-4+1) = 2.$$

Аналогично можно получить, что при $k=3$ сумма равна 3. Возникающую гипотезу о том, что при произвольном k искомая сумма равна k, нужно строго доказать. Это можно сделать методом математической индукции.

База индукции уже проверена. Из предположения о том, что $a_{k,1}+a_{k,2}+a_{k,3}+\ldots+a_{k,k}=k$, требуется вывести $a_{k+1,1} + a_{k+1,2} + a_{k+1,3} + \ldots + a_{k+1,k+1} = k+1$. Заметим, что

$$\begin{aligned} a_{k+1,n} &= n!\,(n^2-(k+1)n+1) = n!\,(n^2-kn+1-n) = \\ &= a_{k,n} - n!\,n = a_{k,n} - n!\,((n+1)-1) = \\ &= a_{k,n} - (n+1)! + n!. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} a_{k+1,1} + a_{k+1,2} + a_{k+1,3} + \ldots + a_{k+1,k+1} &= \\ = a_{k,1} + a_{k,2} + a_{k,3} + \ldots + a_{k,k} - ((k+1)! - 1!) &+ \\ + (k+1)!\,((k+1)^2 - (k+1)(k+1) + 1) &= \\ = k - (k+1)! + 1 + (k+1)! = k+1, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

3. Даны две треугольные пирамиды с общим основанием ABC. Их вершины S и R лежат по разные стороны от плоскости ABC. Все боковые рёбра одной пирамиды параллельны соответствующим боковым граням другой. Докажите, что объём одной пирамиды вдвое больше объёма другой.

(*М. Евдокимов*)

Первое решение. Пусть рёбра SA, SB, SC параллельны граням BCR, ACR и ABR соответственно. Проведём через SA, SB, SC плоскости, которые параллельны BCR, ACR и ABR соответственно. Получается параллелепипед, пять вершин которого совпадают с вершинами наших пирамид (рис. 1). Пусть V — объём этого параллелепипеда. Тогда объём пирамиды $RABC$ равен $V/6$, как и объём трёх других пирамид, основаниями которых являются грани тетраэдра $SABC$. Поэтому объём пирамиды $SABC$ равен $V - 4 \cdot V/6 = 2 \cdot V/6$, т. е. вдвое больше объёма пирамиды $RABC$, что и требовалось доказать.

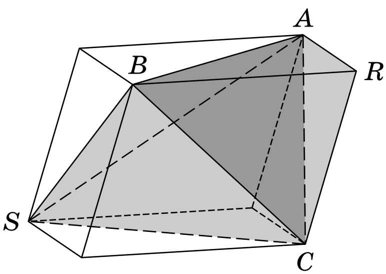


Рис. 1

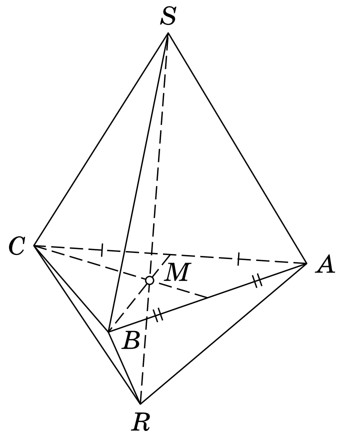


Рис. 2

Второе решение. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 2). Пусть α, β, γ — плоскости, проходящие через точки A, B, C, параллельные плоскостям BCR, ACR, ABR, соответственно. Поскольку $SA \parallel BCR$, точка S лежит в плоскости α. Аналогично, она лежит и в плоскостях β и γ. Пусть R' — образ точки R при гомотетии с центром в точке M и коэффициентом -2. При этой гомотетии середина отрезка BC переходит в A, поэтому плоскость BCR переходит в плоскость α. Значит, $R' \in \alpha$. Аналогично, $R' \in \beta$ и $R' \in \gamma$. Плоскости ABR, BCR, ACR имеют единственную общую точку, поэтому их образы α, β, γ при рассматриваемой гомотетии тоже имеют единственную общую точку. Таким образом, получаем, что $R' = S$. По построению точки R' расстояние от неё до плоскости ABC в два раза больше, чем расстояние от R до этой плоскости, поэтому объём пирамиды $R'ABC$ (она же $SABC$) вдвое больше объёма пирамиды $RABC$.

4. См. задачу 4 для 10 класса (с. 36).

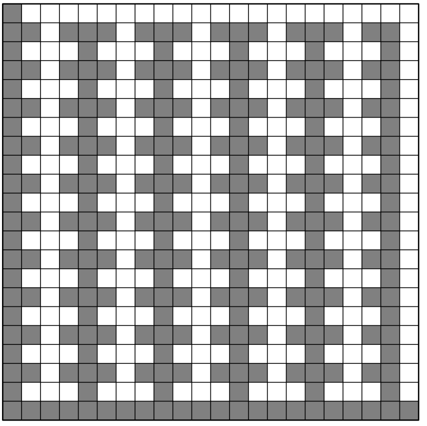
5. См. задачу 6 для 9 класса (с. 29).

6. Петя красит каждую клетку доски 22×22 в чёрный или белый цвет так, чтобы клетки каждого цвета образовывали многоугольник. Затем Вася разрезает доску на двухклеточные доминошки. Петя стремится к тому, чтобы в итоге получилось как можно больше разноцветных доминошек, а Вася — к тому, чтобы их получилось как можно меньше. Наличие какого наибольшего числа разноцветных доминошек может гарантировать Петя, как бы ни действовал Вася? (Напомним, что граница многоугольника — замкнутая ломаная без самопересечений.) (*А. Грибалко*)

Ответ: 101.

Решение. Решим задачу для прямоугольника $2m \times 2n$, где m, n — произвольные натуральные числа (в нашем случае $m = n = 11$). Мы докажем, что ответом является число $1 + (m-1)(n-1)$.

Сначала покажем, что Петя может раскрасить доску так, чтобы при любом разрезании Васи получилось не менее чем $1 + (m-1)(n-1)$ разноцветных доминошек. Покрасим прямоугольник шахматным образом в синий и красный цвета так, чтобы левая нижняя клетка была красной. Пете достаточно добиться того, чтобы в чёрном многоугольнике было на $1 + (m-1)(n-1)$ больше синих клеток, чем красных. Действительно, тогда при любом разрезании на доминошки будет хотя бы $1 + (m-1)(n-1)$ доминошек, в которых есть синяя клетка чёрного многоугольника, но нет красной (так как в каждой доминошке ровно одна синяя и ровно одна красная клетка), все такие доминошки будут чёрно-белыми. Занумеруем строки снизу вверх, а столбцы слева направо. Добиться такого перевеса синих клеток в чёрном многоугольнике Петя может, например, покрасив в точности следующие клетки в чёрный цвет: все клетки первого столбца, в остальных столбцах с номерами, дающими остаток 1 от деления на 4, — все клетки, кроме самой верхней, во всех столбцах с чётными номерами, кроме самого правого, — все синие клетки, во всех остальных столбцах — только самую нижнюю клетку (см. рис. ниже). Действительно, тогда в первом столбце синих и красных клеток одинаковое количество, в остальных столбцах с нечётными номерами



красных клеток на одну больше, чем синих, а в каждом чётном столбце, кроме последнего, синих клеток на m больше, чем красных, в последнем столбце синих на одну больше, чем красных, итого суммарно синих больше, чем красных, на $(n-1)m+1-(n-1)=1+(n-1)(m-1)$ клеток. При такой покраске как чёрные, так и белые клетки образуют многоугольник.

Теперь докажем, что как бы Петя ни раскрасил клетки, Вася сможет добиться того, чтобы разноцветных доминошек было не более чем $1+(m-1)(n-1)$. Назовём *каёмкой* множество всех клеток прямоугольника, прилегающих к границе. Достаточно доказать, что Вася всегда сможет разбить все клетки, отличные от клеток каёмки, на доминошки так, чтобы среди них было не более $(m-1)(n-1)$ разноцветных, и что он всегда сможет разрезать каёмку на доминошки так, чтобы среди них было не более одной разноцветной.

Сначала докажем первое из этих утверждений. Пусть Вася разрежет образуемый не каёмочными клетками прямоугольник $(2m-2)\times(2n-2)$ на квадраты 2×2, а затем каждый квадрат порежет на доминошки так, чтобы среди них была хотя бы одна одноцветная. Он действительно сможет так сделать, так как иначе какой-то квадрат 2×2 покрашен шахматным образом, но тогда все четыре ребра клетчатой плоскости, проходящие через его центр, являются граничными для белого многоугольника, что невозможно. Таким образом, из этой части прямоугольника Вася получит не более $(m-1)(n-1)$ разноцветных доминошек.

Теперь докажем второе утверждение. Для этого достаточно доказать, что белые клетки каёмки образуют связное по сторонам множество клеток. Действительно, тогда в каёмке белые клетки представляют собой несколько последовательных клеток, и Вася может порезать всю каёмку на доминошки, порезав при этом всю белую часть на доминошки, за исключением, возможно, одной клетки (если в каёмке белых клеток нечётное количество). Таким образом, разрезав каёмку, Вася получит не более одной разноцветной доминошки.

Итак, докажем связность множества белых клеток каёмки. Клетки белого многоугольника образуют связное по сторонам множество клеток, поэтому достаточно доказать, что если между некоторыми двумя различными не соседними белыми клетками в каёмке есть путь γ по белым клеткам, не содержащий других клеток каёмки, то между ними есть и путь по белым клеткам каёмки. Докажем это. Клетки пути γ разбивают прямоугольник на две (необязательно связные по сторонам) части, между которыми нет путей по клеткам, не содержащих клеток пути γ. Значит, γ разбивает каёмку на две связные части, только в одной из которых могут быть чёрные клетки (так как чёрные клетки сами образуют связное по сторонам множество клеток, не содержащее клеток пути γ). Следовательно, одна из частей каёмки полностью белая, и поэтому между рассмотренными белыми клетками каёмки есть путь по белым клеткам каёмки.

Комментарий. Известное утверждение о том, что γ разбивает клетки прямоугольника на две такие части, что части каёмки лежат в разных частях прямоугольника, можно доказать, например, так: соединим отрезками центры соседних в γ клеток, центр начальной клетки соединим с серединой её стороны, лежащей на границе прямоугольника, аналогично поступим с конечной клеткой. Получилась ломаная γ', соединяющая две точки на границе прямоугольника и лежащая (за исключением этих двух точек) строго внутри прямоугольника. По следствию из *теоремы Жордана* эта ломаная разбивает прямоугольник на две части, и клетки каёмки, соседние с начальной клеткой, лежат в разных частях, так как ломаная, состоящая из отрезков, соединяющих центр начальной клетки с центрами этих соседей, пересекает γ' ровно в одной точке, не являющейся вершиной ломаной γ'. Тогда между этими соседними с начальной клетками нет клетчатого пути, не имеющего общих клеток с γ, так как в противном случае ломаная, проходящая по центрам клеток такого пути, не пересекала бы γ'.

11 класс, второй день

1. Между двумя восьмёрками в числе 88 вписали несколько нулей. Докажите, что можно всегда дописать слева в начало нового числа ещё несколько цифр так, чтобы получилось число, которое является полным кубом.

(*М. Евдокимов*)

Решение. Рассмотрим выражение $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$. Заметим, что если натуральное число x оканчивается на $40\ldots0$ (всего $n+1$ нуль, где n — натуральное), то это выражение примет значение, оканчивающееся на $80\ldots08$ (n нулей между восьмёрками):

$$(4\cdot10^{n+1}+2)^3 = 64\cdot10^{3n+3} + 96\cdot10^{2n+2} + 48\cdot10^{n+1} + 8.$$

Поэтому можно дописать несколько цифр в начало нового числа так, чтобы получилось число $40\ldots02^3$. Отметим, что подойдёт также число $90\ldots02^3$.

2. Кусок сыра массой 1 кг разрезали на $n \geqslant 4$ кусков массами меньше 600 г. Оказалось, что их нельзя разбить на две кучки так, чтобы масса каждой кучки была не меньше 400 г, но не больше 600 г (кучка может состоять из одного или нескольких кусков). Докажите, что найдутся три таких куска, что суммарная масса любых двух из них больше 600 г.

(*Д. Горяшин*)

Первое решение. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — массы кусков в граммах. Упорядочим их по величине: $600 > x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n$. Тогда $x_1 < 400$, иначе кучка из одного куска массой x_1 и кучка из всех остальных кусков противоречат условию.

Теперь достаточно показать, что $x_2 + x_3 > 600$. Предположим противное: пусть $x_2 + x_3 \leqslant 600$, тогда $x_2 + x_3 < 400$

(иначе снова есть две кучки, противоречащие условию: кучка из кусков массами x_2, x_3 и кучка из всех остальных кусков). Поэтому $200 > x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n$. Будем теперь класть на весы по одному куски массами $x_2, x_3, \ldots, x_n$ именно в этом порядке. Начальная масса кучки на весах будет равна $x_2 < 400$, а конечная — $x_2 + x_3 + \ldots + x_n = 1000 - x_1 > 600$, так как $x_1 < 400$. Поскольку масса каждого очередного куска меньше 200 г, в некоторый момент на весах окажется кучка, масса которой будет не меньше 400 г, но не больше 600 г, что противоречит условию.

Второе решение. Из условия следует, что масса каждого куска меньше 400 г. При любом разбиении кусков на две кучки масса одной из них будет меньше 400 г, а масса другой — больше 600 г. В первом случае назовём кучку *лёгкой*, а во втором — *тяжёлой*. Лёгкой кучке соответствует тяжёлая (из остальных кусков), и наоборот. Также назовём произвольный кусок *большим*, если при добавлении его к некоторой лёгкой кучке она становится тяжёлой, а в противном случае назовём кусок *маленьким* (при добавлении его к любой лёгкой кучке она остаётся лёгкой). Масса любого большого куска больше 200 г.

Рассмотрим кучку, состоящую из всех маленьких кусков. Она лёгкая, так как её можно получить, добавляя к одному маленькому куску, образующему лёгкую кучку, последовательно все остальные маленькие куски. Ей соответствует тяжёлая кучка из остальных кусков. В этой тяжёлой кучке не менее двух кусков, причём они все большие. Выберем один из этих кусков и переложим к кучке из маленьких кусков. Полученная кучка также лёгкая, так как её можно получить, добавляя последовательно к этому большому куску все маленькие куски. Ей снова соответствует тяжёлая кучка, также состоящая не менее чем из двух кусков.

Таким образом, найдены три больших куска, любые два из которых образуют тяжёлую кучку, т. е. имеют суммарную массу больше 600 г.

Комментарий. Такая тройка больших кусков единственна. Действительно, если бы было хотя бы 4 больших куска, то составленная из них тяжёлая кучка имела бы массу более $2 \cdot 600 = 1200$ г.

Кроме того, при сужении промежутка [400; 600] г, в который не должны попадать массы кучек при произвольном разбиении, утверждение задачи перестаёт быть верным, что показывает пример разрезания на 4 куска массами 200, 200, 200 и 400 г.

3. Пусть O — центр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. На стороне BC отметили точку D. Окружности, описанные около треугольников BOD и COD, повторно пересекают отрезки AB и AC в точках X и Y соответственно. Докажите, что из отрезков BX, XY и YC можно сложить треугольник. (*А. Соколов*)

Решение. Поскольку четырёхугольники $BXOD$, $CYOD$ вписанные, то $\angle XOD + \angle CBA = \angle YOD + \angle ACB = 180^\circ$. Так как

$$\angle XOD + \angle YOD = 360^\circ - \angle ACB - \angle CBA > \\ > 360^\circ - \angle ACB - \angle CBA - \angle BAC = 180^\circ,$$

точки O и A лежат по разные стороны от прямой XY. В частности, мы показали, что точка O лежит строго внутри треугольника XYD.

Тогда

$$\angle XOY + \angle BAC = 360^\circ - \angle XOD - \angle YOD + \angle BAC = \\ = (180^\circ - \angle XOD) + (180^\circ - \angle YOD) + \angle BAC = \\ = \angle CBA + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ,$$

поэтому четырёхугольник $AXOY$ также является вписанным.

Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Пусть точка Z, отличная от C, на отрезке BC такова, что $YC = YZ$ (рис. 1). Тогда поскольку треугольник YZC равнобедренный, $\angle YZC = \angle ACB$. Заметим, что

$$\angle YXD = \angle YXO + \angle DXO = \angle YAO + \angle DBO = \\ = (90^\circ - \angle ABC) + (90^\circ - \angle BAC) = \angle BCA.$$

Значит, $\angle YZC = \angle YXD$, откуда следует (вне зависимости от порядка расположения точек D и Z на отрезке BC), что точки X, Y, Z и D лежат на одной окружности. Следова-

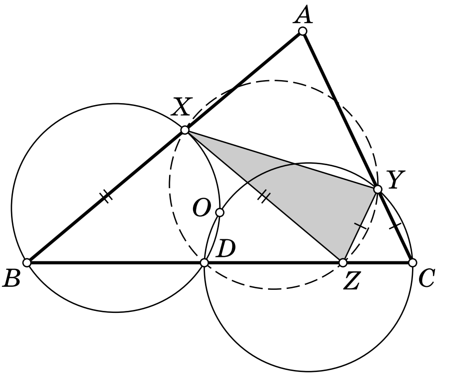


Рис. 1

тельно,

$$\angle XZB = \angle XYD = \angle XYO + \angle DYO = \angle XAO + \angle DCO = \\ = (90^\circ - \angle BCA) + (90^\circ - \angle BAC) = \angle ABC.$$

Поэтому треугольник XZB равнобедренный и $XZ = XB$. Получаем, что треугольник XYZ составлен из отрезков XY, XZ и YZ, равных XY, BX и CY соответственно, что и требовалось.

Второй способ. Пусть точки X', Y' симметричны точкам X и Y относительно середин M и N сторон AB и AC соответственно (рис. 2). Поскольку O — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, $\angle OMA = \angle ONA = 90^\circ$. Тогда из четырёхугольников $MONA$, $XOYA$ находим $\angle MON = \angle XOY = 180^\circ - \angle BAC$. Не ограничивая общности, предположим, что X лежит на отрезке AM. Поскольку $\angle MON = \angle XOY$, точка Y лежит на отрезке NC. По-

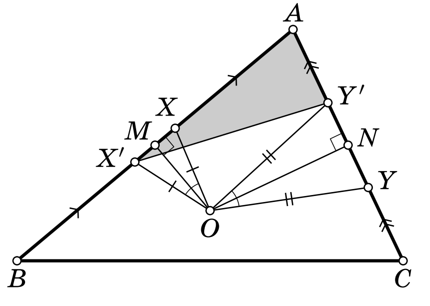


Рис. 2

лучаем, что

$$\angle XOX' = 2\angle XOM = 2(\angle MON - \angle XON) = \\ = 2(\angle XOY - \angle XON) = 2\angle YON = \angle YOY'.$$

Следовательно, треугольники $X'OY'$ и XOY равны по двум сторонам и углу между ними (на самом деле, мы показали, что они совмещаются поворотом с центром в точке O на угол $\angle YOY' = \angle XOX'$). Тогда $X'Y' = XY$. Поскольку $AX' = BX$, $AY' = CY$ из симметрии, получаем, что треугольник $AX'Y'$ составлен из отрезков, равных XY, BX и CY, что и требовалось.

Третий способ. По теореме синусов радиус окружности, описанной около $AXOY$, равен $\frac{AO}{2\sin\angle AXO}$, а радиус окружности, описанной около $BXOD$, равен $\frac{BO}{2\sin\angle BXO}$. Поскольку $BO = AO$, $\angle BXO + \angle AXO = 180^\circ$, получаем, что радиусы этих двух окружностей равны. Проводя аналогичное рассуждение для четырёхугольников $AXOY$ и $CYOD$, получаем, что радиусы окружностей, описанных около всех трёх четырёхугольников $AXOY$, $BXOD$ и $CYOD$ равны. Обозначим эти окружности ω_1, ω_2, ω_3 соответственно (рис. 3). Для того чтобы показать, что из отрезков BX, XY, YC можно сложить треугольник, достаточно проверить, что вписанные углы, опирающиеся на эти отрезки в окружностях ω_2, ω_1, ω_3 соответственно, в сумме дают 180°.

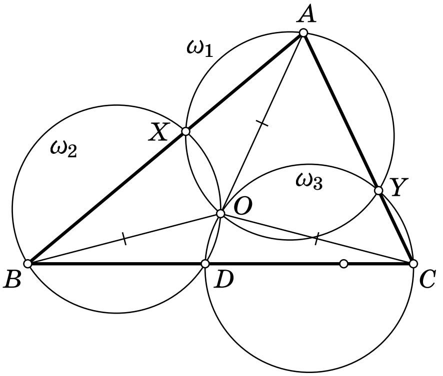


Рис. 3

Убедимся в этом. Заметим, что

$$\angle BOX+\angle COY=\angle BDX+\angle CDY=$$
$$=180^\circ-\angle ODX-\angle ODY=180^\circ-\angle OBA-\angle OCA=$$
$$=180^\circ-(90^\circ-\angle ACB)-(90^\circ-\angle CBA)=\angle ACB+\angle CBA.$$

Таким образом,

$$\angle XAY+\angle BOX+\angle COY=\angle BAC+\angle ACB+\angle CBA=180^\circ,$$

что и требовалось доказать.

Комментарий. Отметим, что во всех трёх способах решения неявно предполагается, что точки X и Y отличны от A. Тем не менее все три рассуждения можно уточнить и в противном случае. Например, если точка X совпадёт с точкой A, то утверждение о вписанности четырёхугольника $AXOY$ из решения нужно заменить на утверждение о касании описанной окружности треугольника AOY стороны AB в точке A.

4. Назовём подмножество A плоскости *похожим на прямую*, если для некоторой прямой ℓ той же плоскости найдётся такое взаимно однозначное соответствие $f\colon \ell\to A$, что для всяких двух точек X, Y на прямой ℓ длина отрезка XY отличается от длины отрезка $f(X)f(Y)$ не более, чем на 1. Верно ли, что любое подмножество плоскости, похожее на прямую, лежит между некоторыми двумя параллельными прямыми? (*И. Михайлов*)

Ответ: нет, неверно.

Решение. Приведём контрпример. Возьмём в качестве ℓ ось абсцисс, а в качестве множества A — график функции $g(x)=\sqrt{|x|}$. Докажем, что отображение $(x,\ 0)\to(x,\ g(x))$ удовлетворяет условию.

Достаточно проверить, что для произвольных $y>x$ выполнены неравенства

$$\sqrt{(y-x)^2+(\sqrt{|y|}-\sqrt{|x|})^2}\leqslant(y-x)+1, \qquad (1)$$

$$y-x\leqslant\sqrt{(y-x)^2+(\sqrt{|y|}-\sqrt{|x|})^2}+1. \qquad (2)$$

Неравенство (2) верно, так как

$$y-x\leqslant\sqrt{(y-x)^2+(\sqrt{|y|}-\sqrt{|x|})^2}.$$

Обоснуем неравенство (1). Возводя его в квадрат и сокращая слагаемое $(y-x)^2$, получаем, что достаточно доказать неравенство

$$(\sqrt{|y|}-\sqrt{|x|})^2 \leqslant 2(y-x)+1.$$

1) Если $y > x \geqslant 0$, то

$$(\sqrt{|y|}-\sqrt{|x|})^2 \leqslant 2(\sqrt{|y|}-\sqrt{|x|})(\sqrt{|y|}+\sqrt{|x|}) = \\ = 2(y-x) < 2(y-x)+1.$$

2) Если $y \geqslant 0 > x$, то

$$(\sqrt{|y|}-\sqrt{|x|})^2 = (\sqrt{y}-\sqrt{-x})^2 = y-x-2\sqrt{y}\sqrt{-x} \leqslant \\ \leqslant y-x < 2(y-x)+1.$$

3) Если $0 \geqslant y > x$, то заметим, что при замене y на $-x$ и x на $-y$ левая и правая части доказываемого неравенства не меняются, и справедливо рассуждение пункта 1.

Таким образом, неравенства (1) и (2) верны для произвольных $y > x$.

Остаётся показать, что график функции $g(x)$ не лежит между никакими двумя параллельными прямыми. Предположим противное: график функции $g(x)$ лежит между параллельными прямыми ℓ_1 и ℓ_2. Прямые ℓ_1 и ℓ_2 не могут быть вертикальными, поскольку на графике $g(x)$ есть точки со сколь угодно большими абсциссами. Предположим теперь, что прямые ℓ_1 и ℓ_2 задаются уравнениями $y=kx+b_1$, $y=kx+b_2$, причём $b_1 < b_2$. Поскольку точка $(0, g(0))$ находится между данными прямыми и $g(0)=0$, получаем $b_1 < 0 < b_2$. Заметим, что на графике $g(x)$ есть точки со сколь угодно большими ординатами и при положительных x, и при отрицательных. Следовательно, при любом k на этом графике есть пара точек (с положительной и отрицательной абсциссами), ординаты которых больше b_2 и хотя бы одна из которых находится выше прямой ℓ_2, а значит, не лежит между рассматриваемыми прямыми. Противоречие.

Комментарий. Отметим, что данная задача тесно связана с активно развивающейся областью метрической геометрии, которая занимается геометрией расстояния Громова—Хаусдорфа. Для того чтобы познакомиться с профессиональной переформулировкой этой задачи, понадобится ввести несколько вспомогательных определений. Для произвольных точек x, y плоскости через $|xy|$ будем обозначать обычное евклидово расстояние между ними. Пусть A, B — два непустых подмножества плоскости. *Открытыми r-окрестностями* A и B назовём множества

$$U_r(A) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \exists a \in A, \text{ для которой } |ax| < r\},$$
$$U_r(B) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon \exists b \in B, \text{ для которой } |bx| < r\}.$$

Расстоянием по Хаусдорфу между A и B называется величина

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 \colon A \subset U_r(B),\ B \subset U_r(A)\}.$$

Таким образом, вопрос задачи 4 на самом деле заключается в том, верно ли, что расстояние Хаусдорфа между произвольным подмножеством плоскости, похожим на прямую, и некоторой прямой конечно.

Теперь расшифруем понятие множества, похожего на прямую.

Каждое подмножество $\sigma \subset A \times B$ декартова произведения A и B называется *соответствием* между A и B, если проекции

$$\pi_A|_\sigma \colon \sigma \to A, \quad \pi_A(a, b) = a,$$
$$\pi_B|_\sigma \colon \sigma \to B, \quad \pi_B(a, b) = b,$$

подмножества $\sigma \subset A \times B$ на множители A и B декартова произведения $A \times B$ сюръективны.

Искажением соответствия σ называется величина

$$\operatorname{dis} \sigma = \sup\Big\{\big||aa'| - |bb'|\big| \ \colon\ (a, b),\ (a', b') \in \sigma\Big\}.$$

Обозначим $\mathcal{R}(A, B)$ множество соответствий между A и B.

Расстоянием по Громову—Хаусдорфу между A и B называется величина

$$d_{GH}(A, B) = \frac{1}{2} \inf\big\{\operatorname{dis} \sigma \colon \sigma \in \mathcal{R}(A, B)\big\}.$$

Возвращаясь к задаче, мы видим, что подмножество плоскости называется *похожим на прямую*, если расстояние Громова—Хаусдорфа между A и $\mathbb{R}$ не превосходит $1/2$. Отметим, что, как видно из решения, взаимная однозначность f не существенна для решения задачи и была включена в формулировку для её технического упрощения.

Итак, переформулировка задачи в терминах метрической геометрии, в которой она и возникла в недавних исследованиях, звучит следующим образом. Расстояние Громова—Хаусдорфа между подмножеством $A \subset \mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}$ конечно. Верно ли, что расстояние по Хаусдорфу между A и некоторой прямой (которую естественным образом можно отождествить с $\mathbb{R}$ с сохранением расстояний) конечно?

Как показано в задаче, в данном случае существует неожиданный контрпример. Однако оказывается, что если в условии заменить прямую $\mathbb{R}$ на плоскость $\mathbb{R}^2$, то ответ изменится на противоположный! Иначе говоря, если расстояние Громова—Хаусдорфа между подмножеством $A \subset \mathbb{R}^2$ и самой плоскостью $\mathbb{R}^2$ конечно, то и расстояние Хаусдорфа между ними конечно. То есть в таком случае найдётся такое положительное число ε, что для каждой точки x плоскости найдётся некоторая точка a из A такая, что $|ax| < \varepsilon$. Более того, оказывается, что аналог этого утверждения верен в $\mathbb{R}^n$ для произвольного натурального числа n. Несмотря на естественность этого утверждения, данный результат является сложной теоремой, а его доказательство существенно опирается на специфику пространства $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой. Например, если заменить евклидово расстояние в $\mathbb{R}^n$ на произвольную норму, то до сих пор неизвестно, будет ли верен аналог этого утверждения!

Для дальнейшего знакомства с метрической геометрией рекомендуем замечательный учебник [1], а заинтересовавшимся геометрией расстояния Громова—Хаусдорфа и, более конкретно, обобщением задачи 11.4, предлагаем конспект [2] и свежую работу [3], в которой доказано данное обобщение.

Литература

[1] *Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В.* Курс метрической геометрии. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

[2] *Tuzhilin A. A.* Lectures on Hausdorff and Gromov–Hausdorff Distance Geometry. ArXiv e-prints, arXiv:2012.00756, 2019.

[3] *Mikhailov I. N., Tuzhilin A. A.* When the Gromov–Hausdorff distance between finite-dimensional space and its subset is finite? ArXiv e-prints, arXiv:2411.13539, 2024.

5. Фокусник вместе со своим помощником собираются показать следующий фокус. Помощник надевает фокуснику повязку на глаза, приглашает на сцену случайного зрителя из зала и просит его написать последовательность из нулей и единиц длины 2^{2025}. Затем помощник верно называет фокуснику номер и значение некоторого одного члена последовательности. Задача фокусника — отгадать 2025 других членов последовательности (т. е. назвать их номера и значения). Докажите, что они могут заранее договориться так, чтобы фокус удался. (*М. Гасанов*)

Решение. Пусть A — множество всех последовательностей из нулей и единиц длины 2^{2025}. Определим функцию $f(a)$, сопоставляющую каждой последовательности a из A последовательность, состоящую из её последних 2025 цифр. Пусть B — множество всех последовательностей из нулей и единиц длины 2025, в которых ровно один элемент равен 1, а C — множество всех остальных последовательностей длины 2025. Тогда $|B| = 2025$, $|C| = 2^{2025} - 2025$. Введём функцию «нумерации» для последовательностей из C, т. е. функцию $g: C \to \{1, 2, 3, \ldots, 2^{2025} - 2025\}$, взаимно однозначно сопоставляющую каждой последовательности из C какой-то номер от 1 до $2^{2025} - 2025$. Обе функции f и g известны как фокуснику, так и его помощнику.

Теперь опишем действия каждого из них. Пусть помощник увидел перед собой последовательность x. Тогда у него есть несколько вариантов.

1) Если $f(x) \in C$, то он сообщает значение элемента под номером $g(f(x))$.

2) Если $f(x) \in B$ и первая цифра последовательности x равна 1, то помощник сообщает значение и номер единицы из последовательности $f(x)$.

3) Если $f(x) \in B$ и первая цифра последовательности x равна 0, то помощник сообщает значение и номер того нуля, который следует за единственной единицей в последовательности $f(x)$ (такая единица единственна, так как эта последовательность принадлежит множеству B). Если же единица стоит на последнем месте, то помощник сообщает значение и номер первого нуля.

Опишем действия фокусника.

Если он услышал цифру с номером из диапазона от 1 до $2^{2025} - 2025$, то он понимает, что это случай 1). Значит, по этому номеру с помощью функции нумерации (ввиду её биективности) он может восстановить $f(x)$, а значит, и последние 2025 цифр вместе с их номерами.

Если он услышал цифру с номером из последних 2025 номеров, то он понимает, что это случай 2) или 3). Но в обоих случаях среди последних 2025 цифр последовательности x все, кроме одной, нули. Из последних 2025 цифр он может отгадать 2024 других цифры, так как одну уже назвал помощник. Также он может назвать самую первую цифру последовательности, так как она в случаях 2) и 3) совпадает с той цифрой, что называет помощник. Значит, и в этом случае фокусник отгадает 2025 цифр.

Комментарий. Утверждение задачи остаётся верным при замене 2025 на произвольное натуральное k.

Покажем также, что фокусник и помощник не смогут договориться так, чтобы отгадать больше, чем k бит последовательности, состоящей из 2^k бит. Предположим противное: фокусник всегда может определить $k+1$ бит. Он может получить от помощника 2^{k+1} различных сообщений, так как полученный бит может иметь 2^k номеров и может иметь 2 возможных значения. Пусть A — множество таких пар (номер и значение). Для каждой такой информации фокусник должен уметь определять значение $k+1$ бит. Для каждого элемента $a \in A$ пусть S_a — множество битовых последовательностей длины 2^k, у которых $k+2$ бита (вместе с тем битом, что раскрыл помощник), угаданные фокусником для элемента a, совпадают с действительными значениями. Тогда $|S_a| \leqslant 2^{2^k-(k+2)}$. Более того, для любой битовой последовательности x длины 2^k помощник отправляет сообщение $a \in A$, для которого фокусник правильно определяет $k+2$ бита этой последовательности, то есть $x \in S_a$. Следовательно, $\bigcup_{a\in A} S_a$ — это в точности все битовые последовательности длины 2^k. Однако

$$\Big|\bigcup_{a\in A} S_a\Big| \leqslant \sum_{a\in A} |S_a| \leqslant 2^{k+1}\cdot 2^{2^k-(k+2)} < 2^{2^k}.$$

Противоречие.

6 класс (7585 работ)

	1	2	3	4	5	6
8					23	1
7				41	0	1
6		323	520	222	1	0
5		55	0	245	0	0
4	3390	176	0	221	0	2
3	13	367	0	120	63	0
2	0	1667	0	108	21	0
1	122	12	0	369	91	0
0	4060	4985	7065	6259	7386	7581

7 класс (5447 работ)

	1	2	3	4	5	6
8				344	24	31
7				71	6	0
6				9	6	3
5		1011	1819	2	8	0
4	2888	254	0	2	150	0
3	0	339	10	1	94	0
2	100	1600	1	72	228	10
1	0	611	0	9	44	7
0	2459	1632	3617	4937	4887	5396

8 класс (2124 работы)

	1	2	3	4	5	6
$+$	1196	511	211	118	8	6
$\pm$	0	145	21	0	7	0
$\mp$	0	83	80	1	22	3
$-$	661	1211	1364	1425	1207	1394
0	267	174	448	580	880	721

СТАТИСТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

9 класс (*1251 работа*)

	1	2	3	4	5	6
+	349	221	135	63	4	8
±	7	0	1	12	0	0
∓	1	1	6	458	1	0
−	797	592	510	450	709	173
0	97	437	599	268	537	1070

10 класс (*1245 работ*)

	1	2	3	4	5	6
+	352	192	139	29	20	4
±	15	12	3	1	1	0
∓	31	10	36	1	6	8
−	659	619	473	525	259	501
0	188	412	594	689	959	732

11 класс, первый день (*853 работы*)

	1	2	3	4	5	6
+	608	339	215	52	23	3
±	60	67	69	2	2	2
∓	102	8	14	7	5	25
−/0	83	439	555	792	823	823

11 класс, второй день (*219 работ*)

	1	2	3	4	5
+	176	155	94	16	26
±	11	23	2	8	2
∓	6	14	16	13	0
−/0	26	27	107	182	191

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ

Мехмат МГУ — крупнейший механико-математический факультет страны и ведущий учебно-научный центр в области математики и механики, в котором представлены все современные разделы этих наук.

Обучение на мехмате даёт академическое образование, позволяющее приобрести фундаментальные знания в области математики и механики, а также умение применять математические методы при решении прикладных задач. Выбор кафедры — углубление в научную деятельность и выбор конкретного направления — происходит только в конце второго курса, что позволяет основательно познакомиться со всеми разделами, прежде чем выбирать более узкую специализацию.

Огромное разнообразие спецкурсов по всевозможным областям математики и механики охватывает все доступные и интересные студентам направления в этих областях и создаёт фактически индивидуальную траекторию обучения, предоставляя обширные возможности для реализации потенциала студентов.

В обучении большой упор сделан именно на фундаментальные знания и научную деятельность, что позволяет студентам глубоко погрузиться в изучение математики и механики и создаёт широкие перспективы дальнейшего применения полученных знаний.

Выпускники мехмата имеют широкие возможности для трудоустройства в сферах научных исследований, информационных технологий, финансов и аналитики, и др. В частности, выпускники мехмата востребованы такими работодателями, как Сбер, Яндекс, Huawei, Сибур и многими другими.

Мехмат также тесно сотрудничает с ведущими научными институтами страны: Математическим институтом Академии наук имени Стеклова, НИИ механики МГУ, Институтом математики им. Келдыша РАН и другими.

Сайт: math.msu.ru/
Приёмная комиссия: pk.math.msu.ru/ru
Группа ВК: vk.com/mech.math.lmsu
Телеграм-канал: Механико-математический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова t.me/mech_math_lmsu
Группа ВК для абитуриентов: vk.com/mm_abiturient
Телеграм-канал для абитуриентов: t.me/abiturient_mm_msu

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ НИУ ВШЭ

создан в 2007 г. при участии Независимого Московского Университета для подготовки ведущих специалистов мирового уровня в области чистой математики, ее приложений и математического образования. Лидерские позиции НИУ ВШЭ в области математики отражены в ключевых предметных рейтингах: университет входит в топ-100 по математике предметного рейтинга ARWU.

Отличительная особенность факультета — сочетание глубокой фундаментальной подготовки с возможностью раннего погружения в интересующую область чистой математики или ее приложений. Этой цели служат индивидуальные учебные планы и большой объем персонального взаимодействия преподавателя с каждым студентом, начиная с 1 курса (включая сдачу листочков и курсовые работы), а также вовлечение студентов в активную научную жизнь. На факультете действуют 4 международные лаборатории, специализирующиеся на различных областях математики, лаборатория математического образования, научно-учебная лаборатория «Сложные сети». Для старшекурсников, ориентированных на приложения, есть возможность участвовать в работе проектно-учебных групп с индустриальными партнерами (Тинькофф, Huawei).

Благодаря такому подходу выпускники, нацеленные на академическую карьеру, поступают в лучшие аспирантуры мира, а остальные неизменно востребованы в IT, финтехе и других наукоемких приложениях.

Помимо программы общего профиля «Математика», на факультете есть программа совместного бакалавриата с Центром педагогического мастерства, нацеленная на подготовку высококвалифицированных преподавателей физико-математических школ.

ФАКУЛЬТЕТ КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК НИУ ВШЭ

создан в 2014 году совместно с компанией «Яндекс». Факультет ведет подготовку специалистов высокого уровня по работе с данными, аналитиков, исследователей в области компьютерных наук и программных инженеров для ведущих ИТ-компаний и исследовательских центров. На факультете реализуется семь бакалаврских программ, которые ежегодно привлекают сильнейших абитуриентов страны.

Наряду с отличной фундаментальной подготовкой в области математики и информатики большое внимание уделяется прикладным курсам и проектной работе, построению индивидуальной образовательной траектории. В числе преподавателей — ведущие российские математики и эксперты в области Computer Science, международные специалисты, исследователи из институтов РАН, сотрудники высокотехнологичных компаний, победители олимпиад по спортивному программированию и математике. В 2024 году на программе «Прикладная математике и информатика» открыта специализация ИИ360, все программы бакалавриата охватывает Исследовательская программа ФКН.

Образовательные программы ФКН реализуются совместно со Сбером, Школой анализа данных Яндекса, 1С, Т-Банком, МТС, Альфа-Банком, Сколтехом, Институтом системного программирования РАН и другими академическими и индустриальными партнерами. Наши студенты участвуют в фундаментальных и прикладных проектах, побеждают на олимпиадах и хакатонах, проходят стажировки в ведущих научных центрах и компаниях-лидерах ИТ-индустрии.

ФИЗТЕХ-ШКОЛА
ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ
МОСКОВСКОГО ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА (МФТИ)

МФТИ занимает 1 место среди технических вузов России в рейтинге лучших университетов мира Times Higher Education по направлениям «Computer Sciences» и «Physical Sciences».

Физтех-школа прикладной математики и информатики МФТИ специализируется на образовании и исследованиях в области чистой и прикладной математики, компьютерных наук и технологий работы с большими данными и искусственным интеллектом. Образовательные программы ФПМИ, создаваемые на стыке этих областей, актуализируются ежегодно. В 2022 году обновлен трек по чистой математике (совместно с МИАН), открыт набор на новые треки по экономике (с РЭШ), олимпиадному программированию, математическому и IT-образованию (с Яндекс, Сириус).

Благодаря системе индивидуальных учебных планов, разнообразию базовых кафедр и лабораторий студенты выстраивают образовательную траекторию в соответствии со своими интересами, а также участвуют в исследовательской работе уже с первых курсов бакалавриата.

Мощная фундаментальная подготовка, закладываемая на младших курсах, позволяет будущим выпускникам не упираться в потолок возможностей и справляться с решением задач любой сложности. А начиная со второго-третьего курса студенты привлекаются к работе на базовых кафедрах от ведущих IT-компаний (Тинькофф, Яндекс, 1С, А4, СБЕР и др.) и институтов РАН (МИАН, ИСП РАН, ВЦ РАН, ИППИ РАН и др.).

Такое сочетание — Академии и Индустрии — не имеет аналогов и позволяет предоставить выпускникам ФПМИ максимальную свободу в выборе дальнейшей карьерной траектории.

Сайт: `fpmi.mipt.ru`   Вконтакте: `vk.com/abitu`

ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК СПбГУ

— сообщество увлеченных своим делом профессионалов, в которое мы приглашаем Вас! В этом году Санкт-Петербургский Государственный Университет отмечает 300-летие, он был основан одновременно с Академией наук. Мы развиваем традиции Петербургской-Ленинградской математической школы, у истоков которой стояли такие умы как П. Л. Чебышев и Л. Эйлер. Факультет МКН, самый молодой факультет в СПбГУ, в 2019 году объединил новые образовательные программы «Науки о данных» и «Современное программирование» с программами бакалавриата и магистратуры по направлению «Математика», развивающимися с 2015 года совместно с лабораторией им. П. Л. Чебышева. Затем была открыта программа аспирантуры и магистерская программа «Разработка программного обеспечения и науки о данных».

Со студентами работает выдающийся коллектив преподавателей и научных сотрудников, председатель Совета программы «Математика» — филдсовский лауреат С. К. Смирнов. Студенты МКН СПбГУ получают глубокое понимание фундаментальных основ современной математики и спектра возможных приложений, а также полную свободу в выборе своей траектории. С третьего курса студенты выбирают из 100+ спецкурсов примерно половину предметов каждый семестр. Посмотрите сами удобные учебные планы интересующих программ:

Математика `bit.ly/syllabus_math`
Науки о данных `bit.ly/syllabus_maad`
Современное программирование `bit.ly/syllabus_mp`

Студенты активно вовлекаются в научную работу в сотрудничестве с лабораториями СПбГУ, а также в работу над программными продуктами под руководством профессионалов из индустрии. Многие задачи поступают от партнеров факультета, среди которых такие крупные компании как Газпром нефть, Яндекс, ВКонтакте. Партнеры обеспечивают хорошо обучающихся студентов достойными стипендиями, а также проводят на факультете ивенты и приглашают на практику и стажировки. Выпускники МКН собирают портфолио, с которым могут уверенно чувствовать себя при поступлении на любые магистерские и PhD программы мира или строить карьеру в передовых областях IT-индустрии.

Наш приём 55 + 30 + 30 человек на три программы позволяет с первого семестра много общаться с каждым студентом и создавать атмосферу, способствующую индивидуальному развитию. Конкурсную ситуацию можно оценить на сайте bit.ly/mkn_entry. Все занятия проходят в центре Санкт-Петербурга — на Васильевском острове, а комфортное общежитие расположено на расстоянии двадцатиминутной прогулки.

joinmkn.ru

Задать вопрос о поступлении в чате: t.me/mathcs_admission
Новости факультета ВКонтакте: vk.com/spbumathcs
E-mail: math-cs@spbu.ru

БИБЛИОТЕКА САЙТА Math.Ru
www.math.ru/lib

В этой библиотеке вы найдете и самые первые российские учебники математики («Арифметика» Л. Ф. Магницкого и геометрия Я. В. Брюса), и научно-популярную литературу советского периода, а также интересные книги современных ученых (всего около 500 книг).

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ»
www.problems.ru

На сайте www.problems.ru размещаются все задачи Московских олимпиад (с 1935 г.), Турнира городов и других соревнований, задачи из разных книг. Большинство задач приведено с решениями, есть тематический рубрикатор.

ПРОЕКТ «ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ»
zadachi.mccme.ru

Более 12 000 задач по планиметрии и без малого 4000 задач по стереометрии с решениями, чертежами, атрибутами для тематического поиска и прослеживания взаимосвязей.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ

www.etudes.ru

На сайте представлены этюды, выполненные с использованием современной компьютерной 3D-графики, увлекательно и интересно рассказывающие о математике и ее приложениях.

Недавно сайту исполнилось 15 лет, открылась его новая версия, каждую неделю появляются новые материалы.

АРХИВ ИЗДАТЕЛЬСТВА «MATHESIS»

maTHesis.ru

Одесское издательство «Mathesis» с 1904 по 1925 год выпускало удивительно интересные книги. Некоторые из них стали классикой, часть сейчас незаслуженно забыта.

Ясность и доступность изложения, подбор научно-популярных книг поможет лучше понять математику, физику, астрономию, другие естественные науки, а также историю их познания.

Чтение этих книг заведомо будет полезно молодому поколению, а также тем, кто занимается его образованием и воспитанием.

Книгоиздательство научныхъ и популярно научныхъ сочиненій изъ области физико-математическихъ наукъ

МЕХАНИЗМЫ П. Л. ЧЕБЫШЕВА

tcheb.ru

В проекте собираются все механизмы, созданные Пафнутием Львовичем Чебышевым (1821—1894), великим российским математиком. Задача проекта — навсегда сохранить уникальное наследие путем создания высокоточных компьютерных моделей уцелевших механизмов, воссоздать уже утраченные по архивным документам. По договоренности с музеями моделирование производится на основе тщательного измерения всех параметров оригиналов.

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЕ ЖУРНАЛЫ В ИНТЕРНЕТЕ

Первые научно-популярные журналы начали выходить в России более двух веков назад. На их статьях выросло не одно поколение российских ученых, инженеров, просто думающих и читающих людей самых разных родов занятий. Сейчас старые номера этих журналов доступны читателям лишь в ничтожном числе библиотек. Электронные архивы призваны сделать их материалы доступными для широкой аудитории.

ВѢСТНИКЪ ОПЫТНОЙ ФИЗИКИ И ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ (1886—1917)

vofem.ru

Журнал, фактически заложивший традиции жанра в литературе на русском языке. За 31 год его существования вышло 674 выпуска В.О.Ф.Э.М.

На страницах журнала печатались и научные статьи, и, например, задачи для учеников и для учителей, научная хроника, обзоры издаваемой литературы и многое другое. Среди постоянных рубрик журнала были, например: «Статьи, посвященные вопросам преподавания математики и физики», «Опыты и приборы», «Математические мелочи», «Библиографический отдел».

Статьи составлялись настолько популярно, насколько это возможно без ущерба для научной стороны дела.

ЖУРНАЛ «ПРИРОДА» (1912—)

priroda.ras.ru

Ежемесячный научно-популярный журнал Российской академии наук (РАН) «Природа» — одно из старейших в России изданий. Первый номер этого журнала вышел в 1912 году.

Фактически перед вами огромная энциклопедия по естественным наукам, составленная и регулярно пополнявшаяся отечественными учеными на протяжении 100 лет.

ЖУРНАЛ «КВАНТИК» (2012—)

kvantik.com

В журнале вы найдёте статьи и задачи по математике, лингвистике, физике, химии, биологии и другим естественным наукам. Журнал доступен школьникам 5—8 классов, но может быть интересен любознательным читателям любого возраста.

ЖУРНАЛ «КВАНТ» (1970—)

kvant.ras.ru

Первый номер «Кванта» вышел в январе 1970 года. Материалы, накопленные в журнале с этого времени, бесценны. Не раз доводилось спрашивать молодых ученых, многого добившихся в науке, и замечательных учителей: «Что повлияло на выбор профессии?» Ответы почти всегда были одни и те же: Учитель (школьный учитель, сумевший увлечь своим предметом) и «Квант».

СБОРНИКИ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ» (3 сер., 1997—)

www.mccme.ru/free-books/matpros.html

Сборники с таким названием выходили в 1934—38 и 1957—61 годах. Сборники новой серии играют роль связующего звена между специальной и популярной математической литературой. Математическое содержание «должно быть понятно вдумчивому и настойчивому читателю, даже при отсутствии специальной подготовки». Кроме того в сборниках публикуются материалы о математической жизни, материалы по преподаванию математики.

СЕРИИ КНИГ

БИБЛИОТЕКА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ»

mccme.ru/mmmf-lectures/books/

Осенью 1999 года Московское математическое общество, Малый мехмат МГУ и Московский центр непрерывного математического образования возобновили популярные лекции по математике для школьников 9–11 классов. В том же году возникла серия небольших брошюр по материалам избранных лекций — вышло более 40 выпусков.

БРОШЮРЫ ЛЕТНЕЙ ШКОЛЫ «СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»

mccme.ru/dubna/books/

написаны по материалам интенсивных мини-курсов, вплотную подводящих студентов и подготовленных старшеклассников к действительно современной математике.

А на странице mccme.ru/dubna/courses/ доступны видеозаписи многих занятий ЛШСМ.

«ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

ashap.info/Knigi/Matkruzhki/

Главный адресат серии — школьный учитель математики, который понимает, что для пробуждения интереса к математике и для развития учеников школьных уроков часто не хватает. Но брошюры могут быть интересны и полезны и школьникам.

В брошюру по каждой теме входят разработки нескольких занятий с изложением необходимой теории, разобранными примерами, задачами (к ним приводятся подробные решения) и методическими указаниями. Изложение каждой темы начинается практически «с нуля» или, во всяком случае, там, где заканчиваются стандартные школьные учебники.

Двадцать четвертая летняя школа
«СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА»
имени Виталия Арнольда

для старших школьников (окончивших 10 или 11 класс) и студентов младших курсов (окончивших I или II курс) пройдет с 19 по 30 июля 2025 года в Подмосковье.

Математики крупнейших научных и учебных центров проведут в рамках школы лекционные и семинарские учебные курсы для старших школьников и студентов младших курсов. Не менее важным, чем сами занятия, будет живое общение школьников и студентов с академиками и профессорами, общение, позволяющее обсудить интересный вопрос, получить квалифицированный ответ от занимающегося данным разделом старшего — просто «приобщиться к большой науке». Слушатели смогут получить конкретные ориентиры в разных областях науки, что поможет им выбрать себе сферу интересов.

Отличительной чертой школы является как высочайший научный уровень преподавателей, так и очень высокий уровень участников. Если вы хотите участвовать в работе школы, заполните до 20 мая анкету участника.

Материалы прошедших школ и информацию о ЛШСМ-2025 смотрите на сайте

`www.mccme.ru/dubna`

Контактный e-mail оргкомитета `dubna@mccme.ru`

ОГЛАВЛЕНИЕ

LXXXVIII Московская математическая олимпиада
Задачи и решения

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11
Тел. (499) 241-08-04