11 класс **Заключительный тур** **2024-2025**

Вариант 1

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (11 баллов) Решите неравенство

$$9\sqrt{2-\log_2 x}-2|4\log_2 x-7| \leq 9\log_2 x-2\left|4\sqrt{2-\log_2 x}-7\right|.$$

Ответ: $[2;4]$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$9\sqrt{2-\log_2 x}+2\left|4\sqrt{2-\log_2 x}-7\right| \leq 9\log_2 x+2|4\log_2 x-7|.$$

Пусть $f(t)=9t+2|4t-7|$. Тогда неравенство принимает вид: $f\left(\sqrt{2-\log_2 x}\right) \leq f(\log_2 x)$. Заметим, что функция f возрастающая, так как при любом раскрывании модуля угловой коэффициент получаемой линейной функции положителен. Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2-\log_2 x} \leq \log_2 x$. Для решения полученного неравенства выпишем систему $\begin{cases} 2-\log_2 x \geq 0, \\ \log_2 x \geq 0, \\ 2-\log_2 x \leq \log_2^2 x. \end{cases}$ Получаем $x \in [2;4]$.

Критерии оценивания: Возможны и другие варианты решения неравенства. За способ решения баллы не снимаются. Выписано ОДЗ – 1 балл. При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное обоснованное решение – 11 баллов.

2. (13 баллов) Петя раскрашивает клетчатый прямоугольник размером 8×12. У него 3 краски: белая, серая, черная. Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании клеток, он раскрасит прямоугольник так, что соседние клетки в нём будут разного цвета, но при этом не будет резкой смены цвета, то есть белая и чёрная клетки не будут соседними. (Клетки – соседние, если у них есть общая сторона).

Ответ: $\frac{2^{49}}{3^{96}}$.

Решение. Применим формулу классической вероятности $p=\frac{m}{n}$, где общее число возможных исходов $n=3^{96}$, так как всего в прямоугольнике 96 клеток, и каждую клетку можно окрасить в 3 цвета. Найдём количество благоприятных исходов – m. Для этого перекрасим временно белый и чёрный цвета в красный. Раскрасим данный прямоугольник в красно-серые цвета так, чтобы соседние клетки имели разный цвет (шахматная раскраска). Таких раскрасок будет ровно две. Теперь осталось для каждой из 48 красных клеток выбрать произвольно один из двух цветов – белый или чёрный. Таких раскрасок будет 2^{48}, а всего $m=2^{49}$.

Критерии оценивания. Верно найдено n – 3 балла. Для нахождения m белые и чёрные клетки покрашены в один цвет (или как-то иначе сделаны одинаковыми), но получен неверный ответ – это 6 баллов. Найдено верно m, а n – неверно, это 10 баллов. Полное решение 13 баллов.

3. (13 баллов) Известно, что функция $f(x) = ax^2 + (a+1)x + b$ принимает неотрицательные значения для всех x. Найдите наименьшее значение выражения $2a + b + 1$.

Ответ: 3.

Решение. Так как $f(x)$ принимает неотрицательные значения для всех x, то $(a+1)^2 \leq 4ab, a > 0$. Получаем $b \geq \frac{(a+1)^2}{4a}$, построим оценку:

$$2a + b + 1 \geq 2a + \frac{(a+1)^2}{4a} + 1 = \frac{8a^2 + (a+1)^2 + 4a}{4a} = \frac{9a^2 + 6a + 1}{4a} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{9a^2+1}{4a} \geq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{9a^2}}{2a} = 3,$$

причём равенство достигается, при $a = \frac{1}{3}, b = \frac{4}{3}$.

Критерии оценивания. Отмечено, что должны выполняться неравенства $D \leq 0, a > 0$ – по 1 баллу за каждое неравенство. Ответ угадан – 2 балла, найдена верная оценка значений данного выражения – 9 баллов. Приведены верные значения для a, b без оценки – 4 балла. Полное решение 13 баллов.

4. (13 баллов) Прямоугольный параллелепипед размером 6×7×11, разбитый на единичные кубики, проткнули иглой по его диагонали. Сколько единичных кубиков проткнула игла?

Ответ: 22.

Решение. Параллелепипед разрезан на единичные кубики плоскостями трёх семейств, в каждое из которых входят все плоскости, параллельные какой-то грани. Количество этих плоскостей – 5, 6 и 10 соответственно. Заметим, что игла не прокалывает две плоскости из разных семейств в одной точке, пусть в M. Действительно, в таком случае проекция иглы на грань α третьего семейства была бы её диагональю, на которой есть целочисленная точка P – проекция точки M на α. Но очевидно, что если целочисленная точка лежит на диагонали целочисленного прямоугольника внутри его, то стороны прямоугольника не взаимно просты. Итак, игла прокалывает 5, 6 и 11 плоскостей в разных точках, поэтому на игле $5 + 6 + 10 = 21$ следов её пересечения с гранями кубиков, поэтому количество прокалываемых кубиков равно $21 + 1 = 22$.

Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Отмечено, но не показано, что игла пересекает грани кубиков в разных точках, 10 балов. Если это даже не упомянуто, но приведена схема решения и получен правильный ответ, то 8 баллов.

5. (10 баллов) Положительно заряженная частица, масса которой m и заряд q, двигаясь вертикально вверх со скоростью v, в момент времени t=0 на высоте h попала в однородное горизонтальное магнитное поле, индукция которого B. В тот момент, когда частица достигла наивысшей точки своего полёта, она вылетела из магнитного поля, и, тут же оказалась в однородном электрическом поле. Напряженность электрического поля равна E, и его силовые линии направлены вертикально вниз. Определите, в какой момент времени частица снова окажется на высоте h. Силой тяжести пренебречь.

Решение:

Частица двигается в магнитном поле:

$F_л = ma_ц,$ **(1 балл)**

$Bqv = m\frac{v^2}{R}.$ **(1 балл)**

Получаем:

$R = \frac{mv}{Bq}.$ **(1 балл)**

Время движения в магнитном поле:

$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi R}{2v} = \frac{\pi m}{2Bq}.$ **(1 балл)**

Частица двигается в электрическом поле:

$a = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m},$ **(1 балл)**

$R = \frac{at_2^2}{2}.$ **(1 балл)**

Время движения в электрическом поле:

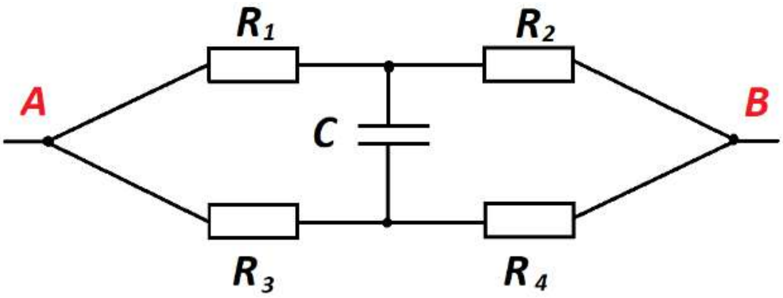
$t_2 = \sqrt{\frac{2R}{a}} = \sqrt{\frac{2mvm}{BqEq}}.$ **(2 балла)**

Получаем:

$t = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q}\sqrt{\frac{2v}{BE}}.$ **(2 балла)**

Ответ: $\frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q}\sqrt{\frac{2v}{BE}}$

6. (10 баллов) Электрическая цепь состоит из конденсатора ёмкости C=200 мкФ и четырех резисторов сопротивлениями R_1=10 Ом, R_2=20 Ом, R_3=30 Ом и R_4=40 Ом. К точкам A и B схемы присоединили источник постоянного напряжения U_0=210 В. Определите заряд конденсатора через достаточно большой время после подсоединения источника.



Решение:

Падение напряжения на резисторе R_1 составляет:

$U_1 = U_0 \frac{R_1}{R_1+R_2} = 210 \cdot \frac{10}{10+20} = 70$ В. **(2 балла)**

Падение напряжения на резисторе R_3 составляет:

$U_3 = U_0 \frac{R_3}{R_3+R_4} = 210 \cdot \frac{30}{30+40} = 90$ В. **(2 балла)**

Разность потенциалов на обкладках конденсатора:

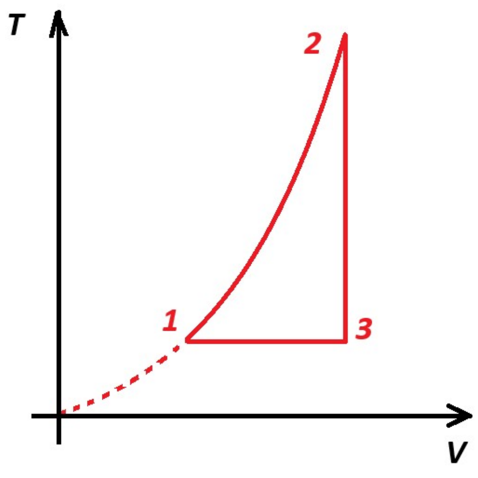
$U_C = U_3 - U_1 = 90 - 70 = 20$ В. **(2 балла)**

Заряд конденсатора:

$q = CU_C = 200 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 4 \cdot 10^{-3}$ Кл $= 4$ мКл. **(4 балла)**

Ответ: 4 мКл

7. (15 баллов) В основе работы тепловой машины лежит цикл, изображенный на рисунке. Процесс 1-2 представляет собой квадратичную зависимость температуры от объёма ($T=kV^2$), процесс 2-3 – изохорный, 3-1 – изотермический. Известно, что максимальный и минимальный объёмы в цикле отличаются в 2 раза. Кроме того, модули работ в процессах 1-2 и 3-1 связаны соотношением $A_{12}=2{,}16A_{31}$. Определите максимальный КПД данной тепловой машины.



Решение:

Процесс 1-2 в координатах p-V представляет прямую зависимость. **(2 балла)**

Работа в процессе 1-2:

$A_{12} = \frac{1}{2}\vartheta R(T_2 - T_1).$ **(2 балла)**

Работа в процессе 2-3:

$A_{23} = 0.$ **(2 балла)**

Работа в процессе 3-1:

$A_{31} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vartheta R(T_1 - T_2)}{2,16}.$ **(2 балла)**

Теплота, получаемая от нагревателя:

$Q_{\text{Н}} = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{i}{2}\vartheta R(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}\vartheta R(T_2 - T_1).$ **(2 балла)**

КПД тепловой машины:

$\eta = \frac{A_{12}+A_{23}+A_{31}}{Q_{\text{Н}}} = \frac{\frac{1}{2}\vartheta R(T_2-T_1)+0+\frac{1}{2}\cdot\frac{\vartheta R(T_1-T_2)}{2,16}}{\frac{i}{2}\vartheta R(T_2-T_1)+\frac{1}{2}\vartheta R(T_2-T_1)} = \frac{1-\frac{1}{2,16}}{i+1} = \frac{1,16}{2,16\cdot(i+1)}.$ **(3 балла)**

Так как речь идет о максимальном КПД, то берем одноатомный газ i=3:

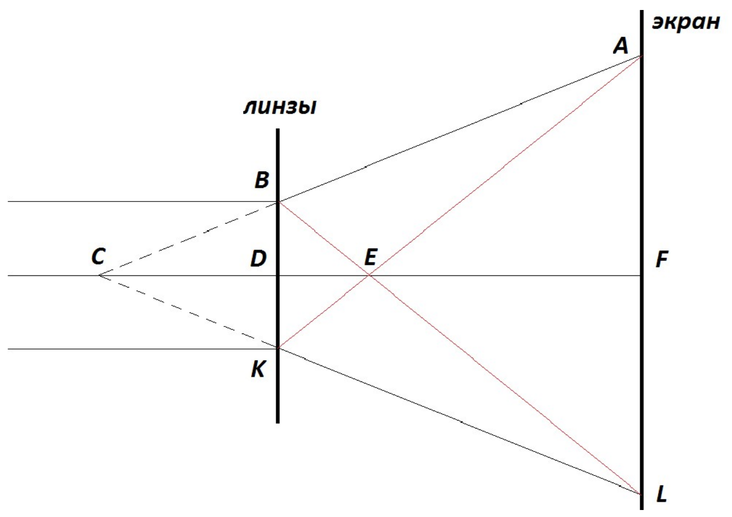
$\eta = 0,134.$ **(2 балла)**

Ответ: 0,134

8. (15 баллов) На тонкую рассеивающую линзу, оптическая сила которой D_P=-4 Дптр, нормально падает пучок света диаметром d_1=5 см. На экране расположенном параллельно линзе наблюдается светлое пятно диаметром d_2=20 см. После замены тонкой рассеивающей линзы на тонкую собирающую размер пятна на экране не изменился. Определите оптическую силу D_C собирающей линзы.

Решение:

Оптическая схема, соответствующая условию: **(2 балла)**



Черным цветом – ход лучей после рассеивающей линзы, красным – после собирающей.

$CD = \left|\frac{1}{D_{\text{р}}}\right| = \frac{1}{4} = 0{,}25$ м. **(2 балла)**

Из подобия треугольников следует, что:

$\frac{CD}{CF} = \frac{BK}{AL} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$. **(2 балла)**

т.е. получаем, что:

$DF = CF - CD = 4CD - CD = 3CD = 0{,}75$ м. **(2 балла)**

Из подобия треугольников следует, что:

$\frac{DE}{FE} = \frac{BK}{AL} = \frac{1}{4}$. **(2 балла)**

Получаем, что:

$DE = \frac{1}{5}DF = \frac{0{,}75}{5}$. **(2 балла)**

В результате оптическая сила собирающей линзы:

$D_C = \frac{1}{DE} = \frac{5}{0{,}75} = 6{,}7$ Дптр. **(3 балла)**

Ответ: 6,7 Дптр

11 класс **Заключительный тур** **2024-2025**

Вариант 2

Задания, ответы и критерии оценивания

1. (11 баллов) Решите неравенство

$$7\sqrt{2-\log_3 x} - 3|2\log_3 x - 5| \le 7\log_3 x - 3\left|2\sqrt{2-\log_3 x} - 5\right|.$$

Ответ: $[3; 9]$.

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$7\sqrt{2-\log_3 x} + 3\left|2\sqrt{2-\log_3 x} - 5\right| \le 7\log_3 x + 3|2\log_3 x - 5|.$$

Пусть $f(t) = 7t + 3|2t - 5|$. Тогда неравенство принимает вид:

$f\left(\sqrt{2-\log_3 x}\right) \le f(\log_3 x)$. Заметим, что функция f возрастающая, так как при любом раскрывании модуля угловой коэффициент получаемой линейной функции положителен. Следовательно, исходное неравенство равносильно неравенству $\sqrt{2-\log_3 x} \le \log_3 x$. Для решения полученного неравенства выпишем систему $\begin{cases} 2-\log_3 x \ge 0, \\ \log_3 x \ge 0, \\ 2-\log_3 x \le \log_3^2 x. \end{cases}$ Получаем $x \in [3; 9]$.

Критерии оценивания: Возможны и другие варианты решения неравенства. За способ решения баллы не снимаются. Выписано ОДЗ – 1 балл. При верном ходе решения имеется арифметическая ошибка – минус 2 балла. Полное обоснованное решение – 11 баллов.

2. (13 баллов) Петя раскрашивает клетчатый прямоугольник размером 6×14. У него 3 краски: белая, серая, черная. Найдите вероятность того, что при случайном раскрашивании клеток, он раскрасит прямоугольник так, что соседние клетки в нём будут разного цвета, но при этом не будет резкой смены цвета, то есть белая и чёрная клетки не будут соседними. (Клетки – соседние, если у них есть общая сторона).

Ответ: $\frac{2^{43}}{3^{84}}$.

Решение. Применим формулу классической вероятности $p = \frac{m}{n}$, где общее число возможных исходов $n = 3^{84}$, так как всего в прямоугольнике 84 клетки, и каждую клетку можно окрасить в 3 цвета. Найдём количество благоприятных исходов – m. Для этого перекрасим временно белый и чёрный цвета в красный. Раскрасим данный прямоугольник в красно-серые цвета так, чтобы соседние клетки имели разный цвет (шахматная раскраска). Таких раскрасок будет ровно две. Теперь осталось для каждой из 42 красных клеток выбрать произвольно один из двух цветов – белый или чёрный. Таких раскрасок будет 2^{42}, а всего $m = 2^{43}$.

Критерии оценивания. Верно найдено n – 3 балла. Для нахождения m белые и чёрные клетки покрашены в один цвет (или как-то иначе сделаны одинаковыми), но получен неверный ответ – это 6 баллов. Найдено верно m, а n – неверно, это 10 баллов. Полное решение 13 баллов.

3. (13 баллов) Известно, что функция $f(x) = ax^2 + (3a+1)x + b$ принимает неотрицательные значения для всех x. Найдите наименьшее значение выражения $4a + b$.

Ответ: 4.

Решение. Так как $f(x)$ принимает неотрицательные значения для всех x, то $(3a+1)^2 \leq 4ab, a > 0$. Получаем $b \geq \frac{(3a+1)^2}{4a}$, построим оценку:

$$4a + b \geq 4a + \frac{(3a+1)^2}{4a} = \frac{16a^2 + 9a^2 + 6a + 1}{4a} = \frac{25a^2 + 6a + 1}{4a} =$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{25\ \ ^2+1}{4a} \geq \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{25a^2}}{2a} = 4,$$

причём равенство достигается, при $a = \frac{1}{5}, b = \frac{16}{5}$.

Критерии оценивания. Отмечено, что должны выполняться неравенства $D \leq 0, a > 0$ – по 1 баллу за каждое неравенство. Ответ угадан – 2 балла, найдена верная оценка значений данного выражения – 9 баллов. Приведены верные значения для a, b без оценки – 4 балла. Полное решение 13 баллов.

4. (13 баллов) Прямоугольный параллелепипед размером $7 \times 8 \times 13$, разбитый плоскостями, параллельными граням, на единичные кубики, проткнули иглой по его большой диагонали. Сколько единичных кубиков проткнула игла?

Ответ: 26.

Решение. Параллелепипед разрезан на единичные кубики плоскостями трёх семейств, в каждое из которых входят все плоскости, параллельные какой-то грани. Количество этих плоскостей – 6, 7 и 12 соответственно. Заметим, что игла не прокалывает две плоскости из разных семейств в одной точке, пусть в M. Действительно, в таком случае проекция иглы на грань α третьего семейства была бы её диагональю, на которой есть целочисленная точка P – проекция точки M на α. Но очевидно, что если целочисленная точка лежит на диагонали целочисленного прямоугольника внутри его, то стороны прямоугольника не взаимно просты. Итак, игла прокалывает 6, 7 и 12 плоскостей в разных точках, поэтому на игле $6+7+12=25$ следов её пересечения с гранями кубиков, поэтому количество прокалываемых кубиков равно $25+1=26$.

Критерии оценивания. Полное решение 13 баллов. Отмечено, но не показано, что игла пересекает грани кубиков в разных точках, 10 балов. Если это даже не упомянуто, но приведена схема решения и получен правильный ответ, то 8 баллов.

5. (10 баллов) Положительно заряженная частица, масса которой m и заряд q, двигаясь вертикально вверх со скоростью v, в момент времени t=0 на высоте h попала в однородное горизонтальное магнитное поле, индукция которого B. В тот момент, когда частица достигла наивысшей точки своего полёта, она вылетела из магнитного поля, и, тут же оказалась в однородном электрическом поле. Напряженность электрического поля равна E, и его силовые линии направлены вертикально вниз. Определите, в какой момент времени частица снова окажется на высоте h. Силой тяжести пренебречь.

Решение:

Частица двигается в магнитном поле:

$F_л = ma_ц$, **(1 балл)**

$Bqv = m\frac{v^2}{R}$. **(1 балл)**

Получаем:

$R = \frac{mv}{Bq}$. **(1 балл)**

Время движения в магнитном поле:

$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi R}{2v} = \frac{\pi m}{2Bq}$. **(1 балл)**

Частица двигается в электрическом поле:

$a = \frac{F}{m} = \frac{Eq}{m}$, **(1 балл)**

$R = \frac{at_2^2}{2}$. **(1 балл)**

Время движения в электрическом поле:

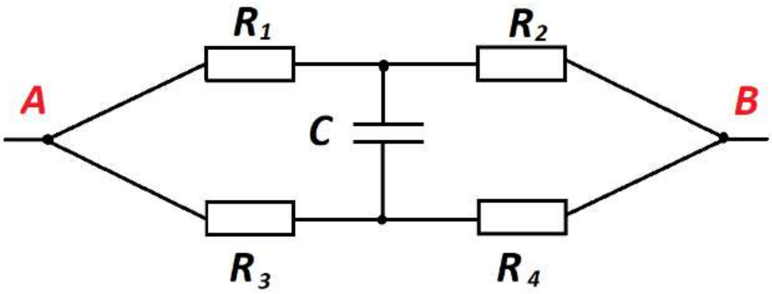
$t_2 = \sqrt{\frac{2R}{a}} = \sqrt{\frac{2mvm}{BqEq}}$. **(2 балла)**

Получаем:

$t = t_1 + t_2 = \frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q}\sqrt{\frac{2v}{BE}}$. **(2 балла)**

Ответ: $\frac{\pi m}{2Bq} + \frac{m}{q}\sqrt{\frac{2v}{BE}}$

6. (10 баллов) Электрическая цепь состоит из конденсатора ёмкости C=500 мкФ и четырех резисторов сопротивлениями R1=20 Ом, R2=10 Ом, R3=40 Ом и R4=30 Ом. К точкам A и B схемы присоединили источник постоянного напряжения U0=420 В. Определите заряд конденсатора через достаточно большой время после подсоединения источника.



Решение:

Падение напряжения на резисторе R_1 составляет:

$U_1 = U_0 \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 420 \cdot \frac{20}{20+10} = 280$ В. **(2 балла)**

Падение напряжения на резисторе R3 составляет:

$U_3 = U_0 \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 420 \cdot \frac{40}{40+30} = 240$ В. **(2 балла)**

Разность потенциалов на обкладках конденсатора:

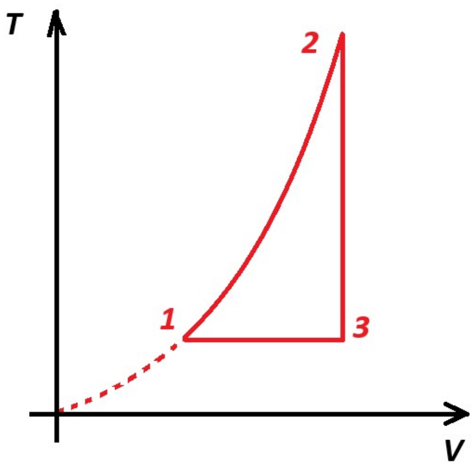
$U_C = U_1 - U_3 = 280 - 240 = 40$ В. **(2 балла)**

Заряд конденсатора:

$q = CU_C = 500 \cdot 10^{-6} \cdot 40 = 20 \cdot 10^{-3}$ Кл $= 20$ мКл. **(4 балла)**

Ответ: 20 мКл

7. (15 баллов) В основе работы тепловой машины лежит цикл, изображенный на рисунке. Процесс 1-2 представляет собой квадратичную зависимость температуры от объёма ($T=kV^2$), процесс 2-3 – изохорный, 3-1 – изотермический. Известно, что максимальный и минимальный объёмы в цикле отличаются в 3 раза. Кроме того, модули работ в процессах 1-2 и 3-1 связаны соотношением $A_{12}=3{,}64 \cdot A_{31}$. Определите максимальный КПД данной тепловой машины.



Решение:

Процесс 1-2 в координатах p-V представляет прямую зависимость. **(2 балла)**

Работа в процессе 1-2:

$A_{12} = \frac{1}{2}\vartheta R(T_2 - T_1).$ **(2 балла)**

Работа в процессе 2-3:

$A_{23} = 0.$ **(2 балла)**

Работа в процессе 3-1:

$A_{31} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\vartheta R(T_1 - T_2)}{3{,}64}.$ **(2 балла)**

Теплота, получаемая от нагревателя:

$$Q_{\text{Н}} = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{i}{2}\vartheta R(T_2 - T_1) + \frac{1}{2}\vartheta R(T_2 - T_1).$$ **(2 балла)**

КПД тепловой машины:

$$\eta = \frac{A_{12}+A_{23}+A_{31}}{Q_{\text{Н}}} = \frac{\frac{1}{2}\vartheta R(T_2-T_1)+0+\frac{1}{2}\cdot\frac{\vartheta R(T_1-T_2)}{3{,}64}}{\frac{i}{2}\vartheta R(T_2-T_1)+\frac{1}{2}\vartheta R(T_2-T_1)} = \frac{1-\frac{1}{3{,}64}}{i+1} = \frac{2{,}64}{3{,}64\cdot(i+1)}.$$ **(3 балла)**

Так как речь идет о максимальном КПД, то берем одноатомный газ i=3:

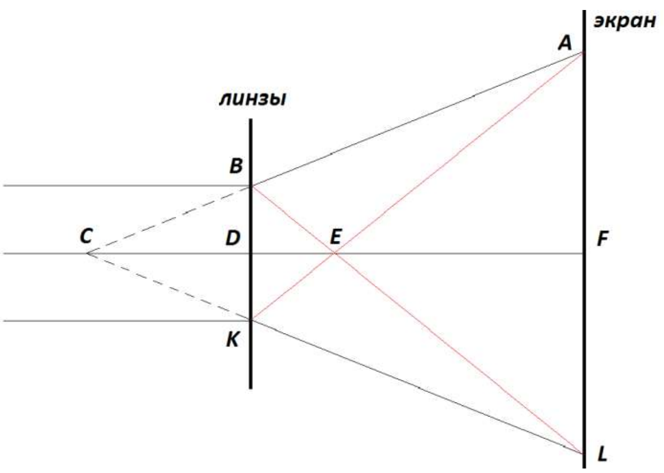
$\eta = 0{,}181.$ **(2 балла)**

Ответ: 0,181

8. (15 баллов) На тонкую рассеивающую линзу, оптическая сила которой D_P=-5 Дптр, нормально падает пучок света диаметром d_1=6 см. На экране расположенном параллельно линзе наблюдается светлое пятно диаметром d_2=12 см. После замены тонкой рассеивающей линзы на тонкую собирающую размер пятна на экране не изменился. Определите оптическую силу DC собирающей линзы.

Решение:

Оптическая схема, соответствующая условию: **(2 балла)**



Черным цветом – ход лучей после рассеивающей линзы, красным – после собирающей.

$CD = \left|\frac{1}{D_{\text{р}}}\right| = \frac{1}{5} = 0{,}2$ м. **(2 балла)**

Из подобия треугольников следует, что:

$\frac{CD}{CF} = \frac{BK}{AL} = \frac{d_1}{d_2} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$. **(2 балла)**

т.е. получаем, что:

$DF = CF - CD = 2CD - CD = CD = 0{,}2$ м. **(2 балла)**

Из подобия треугольников следует, что:

$\frac{DE}{FE} = \frac{BK}{AL} = \frac{1}{2}$. **(2 балла)**

Получаем, что:

$DE = \frac{1}{3}DF = \frac{0{,}2}{3}$. **(2 балла)**

В результате оптическая сила собирающей линзы:

$D_C = \frac{1}{DE} = \frac{3}{0{,}2} = 15$ Дптр. **(3 балла)**

Ответ: 15 Дптр