ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

11 КЛАСС

Общее количество баллов **100. Решение каждой задачи оценивается Жюри из 20 баллов** в соответствии с разработанными критериями и методикой оценки:

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
20	Полное (верное) решение.
16-20	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
12-16	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрены отдельные случаи, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
8-12	Верно рассмотрен один из двух существенных случаев.
6-8	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
2-6	Рассмотрены частные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0-2	Решение начато, но продвижение незначительное.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Вариант 1

1. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $f(x) = x^2 - 2x - 1$, а x_3, x_4 – корни квадратного трехчлена $g(x) = x^2 - 3x - 1$. Найдите все возможные значения выражения $\left(g(x_1)\right)^3 f(x_3) + \left(g(x_2)\right)^3 f(x_4)$.

Ответ. $-21 \pm 5\sqrt{26}$.

Решение. Заметим, что $g(x) = f(x) - x$. Так как $f(x_1) = f(x_2) = g(x_3) = g(x_4) = 0$, легко получаем $g(x_1) = -x_1$, $g(x_2) = -x_2$, а также $f(x_3) = x_3$, $f(x_4) = x_4$. Поэтому исходное выражение

$$A = \left(g(x_1)\right)^3 f(x_3) + \left(g(x_2)\right)^3 f(x_4) = -x_1^3 x_3 - x_2^3 x_4.$$

Его несложно вычислить прямой подстановкой корней; однако, можно поступить иначе.
Пусть $B = -x_1^3 x_4 - x_2^3 x_3$. Заметим, что

$$x_1 x_2 = x_3 x_4 = -1; \quad x_1 + x_2 = 2, \quad x_3 + x_4 = 3,$$
$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 8 + 6 = 14,$$
$$x_3^2 + x_4^2 = (x_3 + x_4)^2 - 2x_3 x_4 = 9 + 2 = 11,$$
$$x_1^6 + x_2^6 = (x_1^3 + x_2^3)^2 - 2x_1^3 x_2^3 = 196 + 2 = 198.$$

Далее,

$$A + B = -(x_1^3 + x_2^3)(x_3 + x_4) = -14 \cdot 3 = -42,$$
$$AB = (x_1^6 + x_2^6) x_3 x_4 + x_1^3 x_2^3 (x_3^2 + x_4^2) = -98 - 11 = -209.$$

Поэтому A и B – корни квадратного уравнения $x^2 + 42x - 209 = 0$ (обратная теорема Виета). Корни этого уравнения $-21 + 5\sqrt{26}$ и $-21 - 5\sqrt{26}$. Осталось отметить, что если переобозначить, допустим, корни трехчлена $f(x)$: x_1 через x_2, а x_2 через x_1, то значения A и B поменяются местами. Это значит, что искомое значение выражения A может принимать оба указанных выше значения.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть неточности в записи выражений – 18 баллов. Одна арифметическая ошибка – 16 баллов. Часть вычислений не показана – 10 баллов. При верном ходе решения в преобразованиях допущена одна ошибка – 5-10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6-8 баллов. Решение* *начато, но продвижение несущественно – 2 балла. Решение содержит грубые ошибки или отсутствует – 0 баллов.*

2. Петя выписал на доску два числа: сначала 4, затем 6. Позже пришёл Толя и стал дальше записывать числа по следующему правилу: очередное число x_n – это наименьшее составное число, большее $2x_{n-1} - x_{n-2}$, где x_{n-1}, x_{n-2} – это предыдущее и предпредыдущее записанные на доске числа соответственно. Какое число появится на доске 100-м?

Ответ. 5150.

Решение. Докажем, что $n-$й элемент последовательности после третьего (равного 9) можно задать формулой $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1$. Действительно, 9 и 14 проверяются вручную, а следующие элементы задаются по предыдущим, так как

$$\frac{(n+k+3)(n+k+4)}{2} - 1 = \\ = 2\cdot\left(\frac{(n+k+2)(n+k+3)}{2} - 1\right) - \left(\frac{(n+k+1)(n+k+2)}{2} - 1\right) + 1.$$

Осталось заметить, что каждый следующий элемент x_n действительно равен $2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$, так как $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)-1$ представляется как произведение двух натуральных чисел $\frac{1}{2}n(n+3)$, а значит, составное. В итоге $x_{100} = \frac{1}{2}(100+1)(100+2) - 1 = 5150$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верно получен n-й элемент последовательности с некоторого номера, однако имеются небольшие недочёты в доказательстве формулы – 14 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

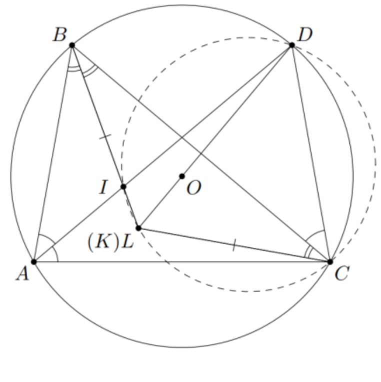
3. У скольких наборов из 4 натуральных чисел с суммой 1001 среди чисел есть равные?

Ответ. $C_{500}^2 = 124750$ наборов.

Решение. Пусть (k, k, a, b) – такой набор. Так как $a + b = 1001 - 2k$ нечётно, то числа a и b разной чётности и между собой не равны. Пусть a чётно. Упорядоченной парой (a, b) набор однозначно определяется, поскольку k вычисляется однозначно, а двух пар равных чисел в наборе нет ввиду нечётности суммы. Сопоставим набору строку $(2k, a, b+1)$. В ней все слагаемые чётны, а их сумма равна 1002. По такой строке набор тоже однозначно восстанавливается. Число таких строк можно посчитать так: выложим ряд из 501 двухрублёвой монет, в который в два разных промежутка вставлены две перегородки. Числа $2k$, a и $b+1$ будут равны сумме монет (в рублях) до первой перегородки, между перегородками и после второй перегородки соответственно. Так как между монетами 500 промежутков, есть ровно C_{500}^2 способов выбрать два из них.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. Точка I – центр окружности, вписанной в неравнобедренный треугольник ABC. Луч AI пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точке D. Окружность, проходящая через точки C, D и I, вторично пересекает луч BI в точке K. Докажите, что $BK = CK$.



Решение. Пусть O – центр описанной окружности ΔABC. Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Обозначим $\angle ABC = \beta$, $\angle ACB = \gamma$. Проведём через точки D и O прямую, и пусть L – точка пересечения этой прямой с лучом BI. Поскольку AI – биссектриса угла BAC, то $\smile BD = \smile DC$, и, следовательно, прямая DO – серединный перпендикуляр к отрезку BC. Поэтому $BL = CL$, т.е. треугольник BLC равнобедренный и $\angle LBC = \angle LCB = \frac{\beta}{2}$ (BI – биссектриса угла ABC). Тогда

$$\angle ILC = \angle BLC = 180^\circ - (\angle LBC + \angle LCB) = 180^\circ - \beta.$$
С другой стороны,
$$\angle CDI = \angle CDA = 180^\circ - (\angle DAC + \angle ACD) =$$
$$= [\angle DCB = \angle DAB = \angle DAC = 0{,}5\alpha,\quad \angle ACB = \gamma,\quad \angle ACD = \angle ACB + \angle DCB = \gamma + 0{,}5\alpha] =$$
$$= 180^\circ - (0{,}5\alpha + \gamma + 0{,}5\alpha) = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta.$$
Таким образом, $\angle ILC + \angle CDI = 180^\circ$. Это означает, что точки I, D, C и L лежат на одной окружности (проходящей через точки I, D, C). Следовательно, точки K и L совпадают. Поэтому $CK = CL = BL = BK$, что и требовалось доказать.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Найдите все тройки (a, b, c) натуральных чисел, для которых
$$a^3 + b^3 = (abc - 1)^2.$$
Ответ. $(a, b, c) \in \{(1, 2, 2), (2, 1, 2)\}$.
Решение. Из-за симметрии можно считать, что $a \geq b$. Положим $t = bc$ и перепишем уравнение в виде $F(a) = 0$, где $F(a) = a^3 - t^2a^2 + 2ta + b^3 - 1$. Если $a \geq t^2$, то
$$F(a) = a^2(a - t^2) + 2ta + b^3 - 1 > 0.$$
Если $b \leq a \leq t^2 - 1$ (а значит, $t \geq 2$), то при $t \geq 4$ будет верно неравенство
$$F(a) < 0.$$
Действительно, точка локального максимума
$$a_0 = \frac{t^2 - \sqrt{t^4 - 6t}}{3} < 1$$
функции $F(a)$ не лежит на отрезке $[b, t^2 - 1]$, поэтому максимальное значение на данном отрезке $F(a)$ принимает на его концах. Вместе с тем, имеем
$$F(b) = -t^2b^2 + 2b^3 + 2tb - 1 = -c^2b^4 + 2b^3 + 2cb^2 - 1 = -b^2(b^2c^2 - 2b - 2c) - 1 < 0,$$
поскольку $b^2c^2 - 2b - 2c > 0$ при $bc \geq 4$, а также
$$F(t^2 - 1) = -t^4 + 2t^3 + b^3 + 2t^2 - 2t - 2 \leq -t^4 + 3t^3 + 2t^2 - 2t - 2 =$$
$$= -t^2(t^2 - 3t - 2) - 2t - 2 < 0$$
при $t \geq 4$. Остаётся случай $2 \leq t \leq 3$, где находим тройку $(2, 1, 2)$.
Комментарий. *Найдены оба ответа – 2 балла, доказано, что других ответов нет – 18 баллов, баллы суммируются. В верном решении есть пробелы – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

Вариант 2

1. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $f(x) = x^2 - 3x - 1$, а x_3, x_4 – корни квадратного трехчлена $g(x) = x^2 - 4x - 1$. Найдите все возможные значения выражения $\left(g(x_1)\right)^3 f(x_3) + \left(g(x_2)\right)^3 f(x_4)$.
Ответ. $-72 \pm 10\sqrt{65}$.
Решение. Заметим, что $g(x) = f(x) - x$. Так как $f(x_1) = f(x_2) = g(x_3) = g(x_4) = 0$, легко получаем $g(x_1) = -x_1$, $g(x_2) = -x_2$, а также $f(x_3) = x_3$, $f(x_4) = x_4$. Поэтому исходное выражение
$$A = \left(g(x_1)\right)^3 f(x_3) + \left(g(x_2)\right)^3 f(x_4) = -x_1^3x_3 - x_2^3x_4.$$
Его несложно вычислить прямой подстановкой корней; однако, можно поступить иначе.
Пусть $B = -x_1^3x_4 - x_2^3x_3$. Заметим, что
$$x_1x_2 = x_3x_4 = -1;\quad x_1 + x_2 = 3,\quad x_3 + x_4 = 4,$$
$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 27 + 9 = 36,$$

$$x_3^2+x_4^2=(x_3+x_4)^2-2x_3x_4=16+2=18,$$
$$x_1^6+x_2^6=(x_1^3+x_2^3)^2-2x_1^3x_2^3=1296+2=1298.$$

Далее,

$$A+B=-(x_1^3+x_2^3)(x_3+x_4)=-36\cdot 4=-144,$$
$$AB=(x_1^6+x_2^6)x_3x_4+x_1^3x_2^3(x_3^2+x_4^2)=-1298-18=-1316.$$

Поэтому A и B – корни квадратного уравнения $x^2+144x-1316=0$ (обратная теорема Виета). Корни этого уравнения $-72+10\sqrt{65}$ и $-72-10\sqrt{65}$. Осталось отметить, что если переобозначить, допустим, корни трехчлена $f(x)$: x_1 через x_2, а x_2 через x_1, то значения A и B поменяются местами. Это значит, что искомое значение выражения A может принимать оба указанных выше значения.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть неточности в записи выражений – 18 баллов. Одна арифметическая ошибка – 16 баллов. Часть вычислений не показана – 10 баллов. При верном ходе решения в преобразованиях допущена одна ошибка – 5-10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6-8 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 2 балла. Решение содержит грубые ошибки или отсутствует – 0 баллов.*

2. Петя выписал на доску два числа: сначала 2, затем 3. Позже пришёл Толя и стал дальше записывать числа по следующему правилу: очередное число x_n – это наименьшее составное число, большее $2x_{n-1}-x_{n-2}$, где x_{n-1}, x_{n-2} – это предыдущее и предпредыдущее записанные на доске числа соответственно. Какое число появится на доске 99-м?

Ответ. 4950.

Решение. Докажем, что $n-$й элемент последовательности после третьего (равного 6) можно задать формулой $\frac{1}{2}n(n+1)$. Действительно, 6 и 10 проверяются вручную, а следующие элементы задаются по предыдущим, так как

$$\frac{(n+k+2)(n+k+3)}{2}=2\cdot\left(\frac{(n+k+1)(n+k+2)}{2}\right)-\left(\frac{(n+k)(n+k+1)}{2}\right)+1.$$

Осталось заметить, что каждый следующий элемент x_n действительно равен $2x_{n-1}-x_{n-2}+1$, так как $\frac{1}{2}n(n+1)$ представляется как произведение двух натуральных чисел, а значит, составное. В итоге $x_{99}=\frac{1}{2}\cdot 99\cdot(99+1)=4950$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верно получен n-й элемент последовательности с некоторого номера, однако имеются небольшие недочёты в доказательстве формулы – 14 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

3. У скольких наборов из 4 натуральных чисел с суммой 1003 среди чисел есть равные?

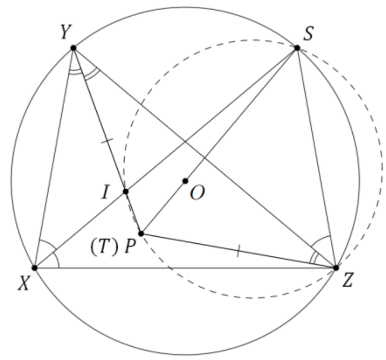
Ответ. $C_{501}^2=125250$ наборов.

Решение. Пусть (k,k,a,b) – такой набор. Так как $a+b=1003-2k$ нечётно, то числа a и b разной чётности и между собой не равны. Пусть a чётно. Упорядоченной парой (a,b) набор однозначно определяется, поскольку k вычисляется однозначно, а двух пар равных чисел в наборе нет ввиду нечётности суммы. Сопоставим набору строку $(2k,a,b+1)$. В ней все слагаемые чётны, а их сумма равна 1004. По такой строке набор тоже однозначно восстанавливается. Число таких строк можно посчитать так: выложим ряд из 502 двухрублёвой монет, в который в два разных промежутка вставлены две перегородки. Числа $2k$, a и $b+1$ будут равны сумме монет (в рублях) до первой перегородки, между перегородками и после второй перегородки соответственно. Так как между монетами 501 промежуток, есть ровно C_{501}^2 способов выбрать два из них.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. Точка I – центр окружности, вписанной в неравнобедренный треугольник XYZ. Луч XI пересекает окружность, описанную около треугольника XYZ, в точке S. Окружность, проходящая через точки Z, S и I, вторично пересекает луч YI в точке T. Докажите, что $YT = ZT$.

Решение. Пусть O – центр описанной окружности ΔXYZ. Обозначим $\angle YXZ = \alpha$. Обозначим $\angle XYZ = \beta$, $\angle XZY = \gamma$. Проведём через точки S и O прямую, и пусть P – точка пересечения этой прямой с лучом YI. Поскольку XI – биссектриса угла YXZ, то $\smile YS = \smile SZ$, и, следовательно, прямая SO – серединный перпендикуляр к отрезку YZ. Поэтому $YP = ZP$, т.е. треугольник YPZ равнобедренный и $\angle PYZ = \angle PZY = \frac{\beta}{2}$ (YI – биссектриса угла XYZ). Тогда



$$\angle IPZ = \angle YPZ = 180^\circ - (\angle POZ + \angle PZY) = 180^\circ - \beta.$$

С другой стороны,

$$\angle ZSI = \angle ZSX = 180^\circ - (\angle SXZ + \angle XZS) =$$
$$= [\angle SZY = \angle SXY = \angle SXZ = 0{,}5\alpha, \quad \angle XZY = \gamma, \quad \angle XZS = \angle XZY + \angle SZY = \gamma + 0{,}5\alpha] =$$
$$= 180^\circ - (0{,}5\alpha + \gamma + 0{,}5\alpha) = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta.$$

Таким образом, $\angle IPZ + \angle ZSI = 180^\circ$. Это означает, что точки I, S, Z и P лежат на одной окружности (проходящей через точки I, S, Z). Следовательно, точки T и P совпадают. Поэтому $ZT = ZP = YP = YT$, что и требовалось доказать.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Найдите все тройки (a, b, c) натуральных чисел, для которых

$$a^3 + b^3 = (abc + 1)^2.$$

Ответ. $(a, b, c) \in \{(1, 2, 1), (2, 1, 1)\}$.

Решение. Из-за симметрии можно считать, что $a \geq b$. Положим $t = bc$ и перепишем уравнение в виде $F(a) = 0$, где $F(a) = a^3 - t^2a^2 - 2ta + b^3 - 1$. Если $a \geq t^2 + 1$, то

$$F(a) = a^2(a - t^2) - 2ta + b^3 - 1 \geq a^2 - 2ta + b^3 - 1 = a(a - 2t) + b^3 - 1 > 0,$$

кроме случая $a = 2$, $t = b = 1$, где находим тройку $(a, b, c) = (2, 1, 1)$. Если $b \leq a \leq t^2$, то верно неравенство

$$F(a) < 0.$$

Действительно, точка локального максимума

$$a_0 = \frac{t^2 - \sqrt{t^4 + 6t}}{3} < 0$$

функции $F(a)$ не лежит на отрезке $[b, t^2]$, поэтому максимальное значение на данном отрезке $F(a)$ принимает на его концах. Вместе с тем, имеем

$$F(b) = -t^2b^2 + 2b^3 - 2tb - 1 \leq -b^4 + 2b^3 - 2b^2 - 1 = -b^3(b - 2) - 2b^2 - 1 < 0,$$

а также

$$F(t^2) = -2t^3 + b^3 - 1 \leq -b^3 - 1 < 0.$$

Таким образом, других троек (a, b, c) нет.

Комментарий. *Найдены оба ответа – 2 балла, доказано, что других ответов нет – 18 баллов, баллы суммируются. В верном решении есть пробелы – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

Вариант 3

1. Пусть x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $f(x) = x^2 - 4x - 1$, а x_3, x_4 – корни квадратного трехчлена $g(x) = x^2 - 5x - 1$. Найдите все возможные значения выражения $\left(g(x_1)\right)^3 f(x_3) + \left(g(x_2)\right)^3 f(x_4)$.

Ответ. $-190 \pm 17\sqrt{145}$.

Решение. Заметим, что $g(x) = f(x) - x$. Так как $f(x_1) = f(x_2) = g(x_3) = g(x_4) = 0$, легко получаем $g(x_1) = -x_1$, $g(x_2) = -x_2$, а также $f(x_3) = x_3$, $f(x_4) = x_4$. Поэтому исходное выражение

$$A = \left(g(x_1)\right)^3 f(x_3) + \left(g(x_2)\right)^3 f(x_4) = -x_1^3 x_3 - x_2^3 x_4.$$

Его несложно вычислить прямой подстановкой корней; однако, можно поступить иначе. Пусть $B = -x_1^3 x_4 - x_2^3 x_3$. Заметим, что

$$x_1 x_2 = x_3 x_4 = -1; \quad x_1 + x_2 = 4, \quad x_3 + x_4 = 5,$$
$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 64 + 12 = 76,$$
$$x_3^2 + x_4^2 = (x_3 + x_4)^2 - 2x_3 x_4 = 25 + 2 = 27,$$
$$x_1^6 + x_2^6 = (x_1^3 + x_2^3)^2 - 2x_1^3 x_2^3 = 5776 + 2 = 5778.$$

Далее,

$$A + B = -(x_1^3 + x_2^3)(x_3 + x_4) = -76 \cdot 5 = -380,$$
$$AB = (x_1^6 + x_2^6) x_3 x_4 + x_1^3 x_2^3 (x_3^2 + x_4^2) = -5778 - 27 = -5805.$$

Поэтому A и B – корни квадратного уравнения $x^2 + 380x - 5805 = 0$ (обратная теорема Виета). Корни этого уравнения $-190 + 17\sqrt{145}$ и $-190 - 17\sqrt{145}$. Осталось отметить, что если переобозначить, допустим, корни трехчлена $f(x)$: x_1 через x_2, а x_2 через x_1, то значения A и B поменяются местами. Это значит, что искомое значение выражения A может принимать оба указанных выше значения.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть неточности в записи выражений – 18 баллов. Одна арифметическая ошибка – 16 баллов. Часть вычислений не показана – 10 баллов. При верном ходе решения в преобразованиях допущена одна ошибка – 5-10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6-8 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 2 балла. Решение содержит грубые ошибки или отсутствует – 0 баллов.*

2. Петя выписал на доску два числа: сначала 5, затем 7. Позже пришёл Толя и стал дальше записывать числа по следующему правилу: очередное число x_n – это наименьшее составное число, большее $2x_{n-1} - x_{n-2}$, где x_{n-1}, x_{n-2} – это предыдущее и предпредыдущее записанные на доске числа соответственно. Какое число появится на доске 98-м?

Ответ. 4949.

Решение. Докажем, что n –й элемент последовательности после четвертого (равного 14) можно задать формулой $\frac{1}{2}n(n+3)$. Действительно, 14 и 20 проверяются вручную, а следующие элементы задаются по предыдущим, так как

$$\frac{(n+k+3)(n+k+4)}{2} = 2 \cdot \left(\frac{(n+k+2)(n+k+3)}{2}\right) - \left(\frac{(n+k+1)(n+k+2)}{2}\right) + 1.$$

Осталось заметить, что каждый следующий элемент x_n действительно равен $2x_{n-1} - x_{n-2} + 1$, так как $\frac{1}{2}n(n+3)$ представляется как произведение двух натуральных чисел, а значит, составное. В итоге $x_{98} = \frac{1}{2} \cdot 98 \cdot (98+3) = 4949$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Верно получен n-й элемент последовательности с некоторого номера, однако имеются небольшие недочёты в доказательстве формулы – 14 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

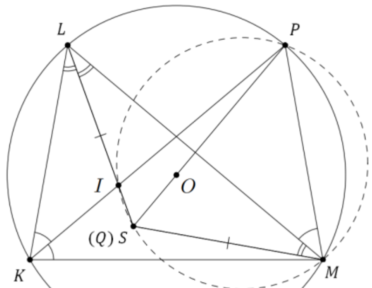
3. У скольких наборов из 4 натуральных чисел с суммой 1005 среди чисел есть равные?

Ответ. 125751 набор.

Решение. Пусть (k, k, a, b) – такой набор. Так как $a + b = 1005 - 2k$ нечётно, то числа a и b разной чётности и между собой не равны. Пусть a чётно. Упорядоченной парой (a, b) набор однозначно определяется, поскольку k вычисляется однозначно, а двух пар равных чисел в наборе нет ввиду нечётности суммы. Сопоставим набору строку $(2k, a, b + 1)$. В ней все слагаемые чётны, а их сумма равна 1006. По такой строке набор тоже однозначно восстанавливается. Число таких строк можно посчитать так: выложим ряд из 503 двухрублёвой монет, в который в два разных промежутка вставлены две перегородки. Числа $2k$, a и $b + 1$ будут равны сумме монет (в рублях) до первой перегородки, между перегородками и после второй перегородки соответственно. Так как между монетами 502 промежутков, есть ровно C_{502}^2 способов выбрать два из них.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. Точка I – центр окружности, вписанной в неравнобедренный треугольник KLM. Луч KI пересекает окружность, описанную около треугольника KLM, в точке P. Окружность, проходящая через точки M, P и I, вторично пересекает луч LI в точке Q. Докажите, что $LQ = MQ$.



Решение. Пусть O – центр описанной окружности ΔKLM. Обозначим $\angle LKM = \alpha$. Обозначим $\angle KLM = \beta$, $\angle KML = \gamma$. Проведём через точки P и O прямую, и пусть S – точка пересечения этой прямой с лучом LI. Поскольку KI – биссектриса угла LKM, то $\smile LP = \smile PM$, и, следовательно, прямая PO – серединный перпендикуляр к отрезку LM. Поэтому $LS = MS$, т.е. треугольник LSM равнобедренный и $\angle SLM = \angle SML = \frac{\beta}{2}$ (LI – биссектриса угла KLM). Тогда

$$\angle ISM = \angle LSM = 180^\circ - (\angle SLM + \angle SML) = 180^\circ - \beta.$$

С другой стороны,

$$\angle MPI = \angle MPK = 180^\circ - (\angle PKM + \angle KMP) =$$

$$= [\angle PMB = \angle PKL = \angle PKM = 0{,}5\alpha, \quad \angle KML = \gamma, \quad \angle KMP = \angle KML + \angle PML = \gamma + 0{,}5\alpha]$$

$$=$$

$$= 180^\circ - (0{,}5\alpha + \gamma + 0{,}5\alpha) = 180^\circ - \alpha - \gamma = \beta.$$

Таким образом, $\angle ISC + \angle CPI = 180^\circ$. Это означает, что точки I, P, M и S лежат на одной окружности (проходящей через точки I, P, M). Следовательно, точки Q и S совпадают. Поэтому $MQ = MS = LS = LQ$, что и требовалось доказать.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Натуральные числа a, b, c таковы, что $a^3 - b^3 = (abc - 1)^2$. Докажите, что $a = b = c = 1$.

Решение. Положим $t = bc$ и перепишем уравнение в виде

$$a^3 - t^2a^2 + 2ta - b^3 - 1 = 0.$$

Если $a \geq t^2$, то

$$a^3 - t^2a^2 + 2ta - b^3 - 1 = a^2(a - t^2) + 2ta - b^3 - 1 \geq 2t^3 - b^3 - 1 \geq b^3 - 1 > 0,$$

кроме случая $t = b = 1$, где получаем $a = b = c = 1$. Если же $a \leq t^2 - 1$ (что возможно только при $t \geq 2$), то

$$a^3 - t^2a^2 + 2ta - b^3 - 1 = a(a^2 - t^2a + 2t) - b^3 - 1 < 0$$

при $t \geq 3$. Действительно, $f(a) = a^2 - t^2a + 2t < 0$, так как корни $f(a)$ суть

$$a_{\pm}=\frac{t^2\pm\sqrt{t^4-8t}}{2},$$

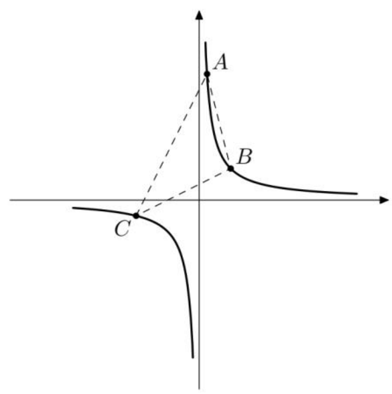
при этом имеем $a_-<1\le a\le t^2-1<a_+$ (крайние неравенства эквивалентны неравенству $\sqrt{t^4-8t}>t^2-2$, которое при $t\ge 3$ проверяется возведением в квадрат). Остаётся случай $t=2$, где решений нет.

Комментарий. *Найдены оба ответа – 2 балла, доказано, что других ответов нет – 18 баллов, баллы суммируются. В верном решении есть пробелы – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

Вариант 4

1. Точка C с абсциссой -2 принадлежит гиперболе $y=\frac{1}{x}$. Через C проведены две прямые с угловыми коэффициентами 2 и $\frac{1}{2}$, пересекающие гиперболу в точках A и B (отличных от точки C) соответственно. Найдите координаты центра описанной окружности треугольника ABC.

Ответ. $\left(-\frac{11}{8};2\right)$.



Решение. Уравнение указанных прямых имеют вид $y=2(x+2)-\frac{1}{2}$ и $y=\frac{x+2}{2}-\frac{1}{2}$, т.е. $y=2x+\frac{7}{2}$ и $y=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$. Соответственно. Абсциссы a и b точек A и B находятся из уравнений $\frac{1}{x}=2x+\frac{7}{2}$ и $\frac{1}{x}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$; они равны $a=\frac{1}{4}$ и $b=1$.

Пусть центр окружности, описанной около треугольника ABC, имеет координаты $(\alpha;\beta)$, и пусть R – радиус этой окружности. Тогда уравнение окружности имеет вид $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-R^2=0$. Подставив в это уравнение $y=\frac{1}{x}$, после преобразований получаем уравнение $x^4-2\alpha x^3+Dx^2-2\beta x+1=0$, где через D обозначено выражение $\alpha^2+\beta^2-R^2$. Поскольку точки A, B и C принадлежат этой окружности, то их абсциссы удовлетворяют этому уравнению. Подставляя последовательно $x=-2$, 1 и $\frac{1}{4}$, получаем систему

$$\begin{cases}16+16\alpha+4D+4\beta+1=0,\\ 1-2\alpha+D-2\beta+1=0,\\ 1-8\alpha+16D-128\beta+256=0.\end{cases}$$

Из второго уравнения находим $D=2(\alpha+\beta)-2$. Подставляя это выражение в первое и третье уравнения системы, приходим к

$$\begin{cases}16+16\alpha+8(\alpha+\beta)-8+4\beta+1=0,\\ 1-8\alpha+32(\alpha+\beta)-32-128\beta+256=0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}8\alpha+4\beta=-3,\\ 8\alpha-32\beta=-75.\end{cases}$$

Решая полученную систему, находим $\beta=2$ и $\alpha=-\frac{11}{8}$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть неточности в записи выражений – 18 баллов. Одна арифметическая ошибка – 16 баллов. Часть вычислений не показана – 10 баллов. При верном ходе решения в преобразованиях допущена одна ошибка – 5-10 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6-8 баллов. Решение начато, но продвижение несущественно – 2 балла. Решение содержит грубые ошибки или отсутствует – 0 баллов.*

2. Для каждого натурального числа $n\in\mathbb{N}$ возьмём $x_n=n^2+300$ и $y_n=\text{НОД}(x_n,x_{n+1})$. Чему равно максимально возможное значение y_n?

Ответ. 1201.

Решение. Будем пользоваться соотношениями

$$\text{НОД}(u,v)=\text{НОД}(u\pm v,v),\qquad \text{НОД}(u,2v+1)=\text{НОД}(2u,2v+1).$$

Запишем цепочку равенств:

$$\text{НОД}(n^2+300\,,(n+1)^2+300)=\text{НОД}(n^2+300\,,2n+1)=\text{НОД}(2n^2+600\,,2n+1)=$$
$$=\text{НОД}(600-n,2n+1)=\text{НОД}(1200-2n,2n+1)=\text{НОД}(1201,2n+1).$$

Остаётся заметить, что последняя величина не превосходит 1201, и равенство достигается при $n=600$.

Комментарий. *Полное обоснованное решение – 20 баллов. Получена оценка – 14 баллов, приведён пример – 6 баллов, баллы суммируются. За рассмотрение неоптимальных примеров баллы не начисляются. Задача не решена или решена неверно – 0 баллов.*

3. Собрав 1001 орех, бельчата Боря, Вася и Петя решили разделить их. Каждый должен что-то получить, все – разное число орехов, Боря – больше всех. Сколькими способами можно так поделить орехи?

Ответ. 166000 наборов.

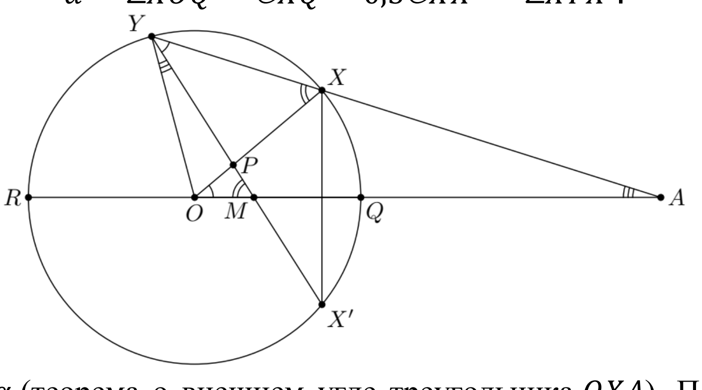
Решение. Сосчитаем способы без учёта ограничений на повторы и максимум у Бори. Метод шаров и перегородок даёт $C_{1000}^2=499500$ способов деления. Теперь вычтем способы с повторами. Так как 1001 не кратно 3, число орехов может совпасть только у двоих. это число n может быть любым от 1 до 500. Для каждого возможного n есть 3 способа распределить $n,\, n$ и $1000-2n$ орехов между троими. Значит, число способов с повторами равно $500\cdot 3=1500$, а без повторов – $499500-1500=498000$. Пусть теперь бельчата делят «случайно», так, что каждый получает разное число. Однако дальше они распределение «исправляют»: тот, кто получит больше всех, меняется своей долей с Борей. Тогда одно и то же «исправленное» распределение получается из трёх «случайных»: Боря мог получить максимум 1) сразу; 2) поменявшись с Васей; 3) поменявшись с Петей. Тогда «исправленных» распределений втрое меньше, чем «случайных», т.е. $498000:3=166000$.

Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. Есть существенное продвижение, но не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

4. Дана окружность с центром O и точка A вне её. Секущая, проходящая через точку A, пересекает окружность в точках X и Y. Пусть X' – точка окружности, симметричная точке X относительно прямой OA. Докажите, что точка пересечения прямых OA и $X'Y$ не зависит от выбора секущей.

Решение. Пусть R – радиус окружности. Соединим центр окружности O с точками X и Y. Тогда $OX=OY=R$. Пусть $\alpha=\angle XOA, \beta=\angle OXY$. Так как точка X' симметрична точке X относительно прямой OA, а значит, и относительно диаметра RQ, то

$$\alpha=\angle XOQ=\smile XQ=0{,}5\smile XX'=\angle XYX'.$$



Тогда $\angle XAO=\beta-\alpha$ (теорема о внешнем угле треугольника OXA). Поэтому из теоремы синусов для треугольника OXA имеем

$$\frac{R}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{OA}{\sin(180^\circ-\beta)}=\frac{OA}{\sin\beta}.\quad (*)$$

Так как $\angle YPX=\angle OPM$ (как вертикальные), то $\angle YMO=\angle YXO=\beta$. Кроме того, в равнобедренном треугольнике YQX углы при основании YX равны, и, следовательно, $\angle OYM=\beta-\alpha$. Из теоремы синусов для треугольника YOM получаем

$$\frac{OM}{\sin(\beta-\alpha)}=\frac{R}{\sin\beta}.$$

Учитывая (∗), находим $OM=\frac{R^2}{OA}$, что и означает независимость точки M от выбора секущей. Заметим, что расположение точек X и Y не влияет на решение.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*

5. Натуральные числа $m>n$ таковы, что дробь $\frac{3^m+2}{3^n+2}$ есть целое число. Докажите, что $m>n^2$.
Решение. Имеем $m=nq+r$, где $0\le r<n$ и $q\ge 1$. Из $3^n\equiv -2 \pmod{3^n+2}$ следует

$$0\equiv 3^m+2=(3^n)^q3^r+2=(-2)^q3^r+2 \pmod{3^n+2},$$

т.е. $(-2)^q3^r+2$ делится на 3^n+2.
а) Пусть q – чётно. Тогда $2^q3^r+2=k(3^n+2)$. Для некоторого натурального k. Имеем $2\equiv 2k \pmod{3^r}$, откуда $k=3^rl+1$ для некоторого натурального l. Значит, $2^q3^r+2=(3^rl+1)(3^n+2)$ или $2^q=3^nl+3^{n-r}+2l>3^n$, откуда следует $q>n$. Но тогда $m=nq+r>n^2$, что и требовалось.
б) Пусть q – нечётно. Тогда $2^q3^r-2=k(3^n+2)$ для некоторого натурального k. Имеем $-2\equiv 2k \pmod{3^r}$, откуда $k=3^rl-1$ для некоторого натурального l. Значит, $2^q3^r-2=(3^rl-1)(3^n+2)$ или $2^q=3^nl-3^{n-r}+2l$. Если $l\ge 2$, то $2^q>3^n$ и $q>n$. Если же $l=1$, то $r\ge 1$ и тогда $2^q=3^n-3^{n-r}+2\ge 3^n-3^{n-1}+2$, откуда снова $q>n$. Далее, как и выше, получаем требуемое неравенство $m>n^2$.
Комментарий. *Верное решение – 20 баллов. В верном решении есть пробелы – 16 баллов. Есть существенное продвижение, но решение не доведено до конца или допущена ошибка в дальнейших рассуждениях – 12 баллов. Решение начато, есть некоторое продвижение – 6 баллов. Решение начато, но заметного продвижения нет – 2 балла. Решение неверно или отсутствует – 0 баллов.*