11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{(25x-9)(x-6)}$, девятый член равен $x+3$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}}$.

Ответ: $x=18$, $x=0$.

Решение. Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots$ – данная геометрическая прогрессия, а q – её знаменатель. Тогда $b_7 = b_1 q^6$, $b_9 = b_1 q^8$, $b_{15} = b_1 q^{14}$, откуда следует, что $b_9^4 = b_7^3 b_{15}$, а b_7, b_9 и b_{15} – числа одного знака (несложно видеть, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы данные числа являлись членами геометрической прогрессии с соответствующими номерами). Значит,

$$(x+3)^4 = \left(\sqrt{(25x-9)(x-6)}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{25x-9}{(x-6)^3}},$$

что на ОДЗ равносильно уравнению $(x+3)^4 = (25x-9)^2$. Решаем его:

$$\left(x^2+6x+9\right)^2 = (25x-9)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+6x+9 = 25x-9, \\ x^2+6x+9 = 9-25x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=18, \\ x=-31, \\ x=0. \end{array}\right.$$

Значение $x=1$ не принадлежит ОДЗ (подкоренное выражение отрицательно). Значение $x=-31$ не подходит, так как при этом $b_7>0$, $b_9<0$, $b_{15}>0$, что невозможно.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x-4z} + 4 = 2\sqrt{y-4x-x^2+z}, \\ |y+4| + 4|y-5| = \sqrt{81-z^2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-2-2\sqrt{2}; 5; 0\right)$, $\left(\frac{\sqrt{11}-4}{2}; 5; 0\right)$

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Его левая часть зависит только от y, а правая только от z. Сравним их множества значений. Несложно видеть, что множеством значений функции $f(z) = \sqrt{81-z^2}$ является отрезок $[0;9]$. Пусть $h(y) = |y+4| + 4|y-5|$. Исследуем $h(y)$ на монотонность. Для раскрытия модулей нужно рассмотреть несколько промежутков; на каждом из них $h(y)$ – линейная функция. Возрастает она или убывает – зависит исключительно от знака при y. В первом слагаемом коэффициент при y по модулю меньше, чем во втором. Таким образом, знак коэффициента при y определяется тем, как раскроется второй модуль. Значит, $h(y)$ возрастает при $y \geqslant 5$ и убывает при $y \leqslant 5$. Отсюда следует, что $y=5$ – точка минимума, а минимальное значение $h(y)$ равно $h(5)=9$. Поскольку $\min h(y) = \max f(z) = 9$, из второго уравнения находим, что $f(z)=9 \Leftrightarrow z=0$ и $h(y)=9 \Leftrightarrow y=5$.
Подставляя y и z в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+5} - \sqrt{1-x} + 4 = 2\sqrt{5-4x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+5} - \sqrt{1-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+5-2\sqrt{(x+5)(1-x)}+ +1-x$, откуда $2\sqrt{5-4x-x^2} = 6-t^2$. Уравнение принимает вид $t+4 = 6-t^2$. Решая его, находим

$t=-2$ или $t=1$.

- Если $t=1$, то

$$\sqrt{x+5}=\sqrt{1-x}+1 \Leftrightarrow x+5=1-x+2\sqrt{1-x}+1 \Leftrightarrow 2x+3=2\sqrt{1-x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2x+3)^2=4(1-x),\\ 2x+3\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{-4\pm\sqrt{11}}{2},\\ x\geqslant -\frac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{11}-4}{2}.$$

- Аналогично рассматриваем второе значение $t=-2$:

$$\sqrt{x+5}+2=\sqrt{1-x} \Leftrightarrow x+5+4\sqrt{x+5}+4=1-x \Leftrightarrow 2\sqrt{x+5}=-x-4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}4(x+5)=(-x-4)^2,\\ -x-4\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\pm 2\sqrt{2},\\ x\leqslant -4\end{cases} \Leftrightarrow x=-2-2\sqrt{2}.$$

Итак, система имеет два решения: $\left(-2-2\sqrt{2};5;0\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{11}-4}{2};5;0\right)$.

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$p\cos 3x+3(p+4)\cos x=6\cos 2x+10$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

Ответ: Решения есть при $p\in(-\infty;-7]\cup[1;+\infty)$.
Они задаются формулой $x=2\pi k\pm\arccos\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$, $k\in\mathbb{Z}$.

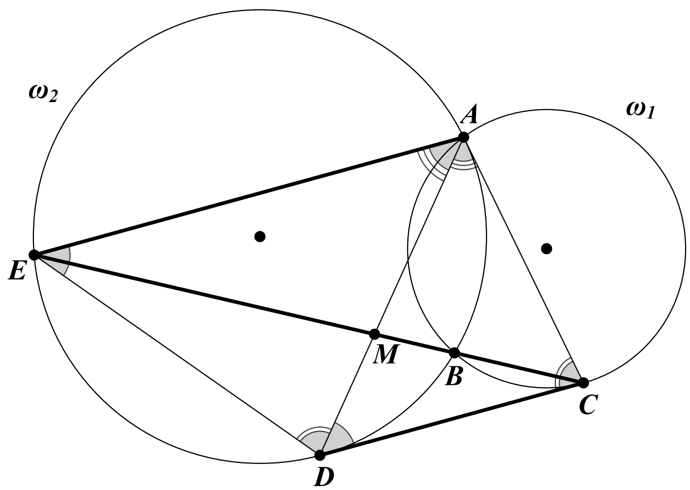
Решение. Применяя формулы $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$, $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ и обозначая $\cos x=t$, приводим уравнение к виду $pt^3-3t^2+3t-1=0$. Выделяя в левой части полный куб, получаем $(p-1)t^3+(t-1)^3$. Так как равенство кубов эквивалентно равенству самих чисел, это уравнение равносильно следующему: $\left(t\sqrt[3]{p-1}\right)^3=(1-t)^3 \Leftrightarrow t\sqrt[3]{p-1}=1-t \Leftrightarrow t=\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$.
Ввиду ограниченности косинуса, отсюда получаем неравенства

$$\left|\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}\right|\leqslant 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1+\sqrt[3]{p-1}\geqslant 1,\\ 1+\sqrt[3]{p-1}\leqslant -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}p\leqslant -7,\\ p\geqslant 1.\end{array}\right.$$

При этих значениях p уравнение $\cos x=\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$ имеет решения $x=2\pi k\pm\arccos\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$, $k\in\mathbb{Z}$.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED:CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $2:5$, считая от вершины C.

Ответ: $\sqrt{\frac{5}{2}}$.



Решение. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle ADC$ равен половине дуги AD. По теореме о вписанном угле $\angle AED$ также равен половине дуги AD. Следовательно, $\angle AED = \angle ADC$. Обозначим $\angle ADE = \beta$ и заметим, что $\angle ABE = \angle ADE = \beta$ (вписанные, опираются на одну дугу); $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - \beta$. Кроме того, $\angle ABC + \angle ACD = 180^\circ$ (второй угол равен половине дуги ABC как угол между касательной и хордой; первый угол является вписанным в окружность и опирается на дугу AC, не содержащую точку B), откуда $\angle ACD = 180^\circ - \angle ABC = \beta$. Отсюда следует, что в треугольниках ADE и ACD есть по два равных угла. Во-первых, это означает, что третьи углы этих треугольников также равны (то есть AD – биссектриса угла CAE), а во-вторых – что треугольники подобны. Из подобия получаем пропорциональность сторон: $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD}$. Отсюда можно выразить, что $\left(\frac{ED}{CD}\right)^2 = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AC}$.
Обозначим точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDE$ через M. Учитывая сказанное выше, AM – биссектриса треугольника ACE. По свойству биссектрисы $\frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE}$. Значит, $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{AE}{AC}} = \sqrt{\frac{ME}{CM}} = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 100×400. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $3 \cdot C_{20\,000}^4 - 2 \cdot C_{10\,000}^2$.

Решение. Пусть O – центр прямоугольника, а отрезки ℓ_1 и ℓ_2 – его средние линии (для определённости считаем, что средняя линия ℓ_1 горизонтальна, а ℓ_2 – вертикальна. Обозначим множество раскрасок, обладающих симметрией относительно ℓ_1 через A_1, относительно ℓ_2 – через A_2, относительно O – через B. Для обозначения количества элементов множества будем использовать модуль. Согласно формуле включений и исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup B| = |A_1| + |A_2| + |B| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap B| - |A_2 \cap B| + |A_1 \cap A_2 \cap B|.$$

Чтобы получить любую раскраску, входящую в A_1, достаточно выбрать четыре произвольные клетки в верхней половине прямоугольника (т.е. выше ℓ_1), после чего клетки в нижней половине получаются симметрией четырёх выбранных клеток относительно ℓ_1. Так как в верхней половине прямоугольника всего 20 000 клеток, $|A_1| = C_{20\,000}^4$. Любую раскраску из A_2 или B можно получить,

выбрав 4 клетки из 20 000 в левой половине прямоугольника (нужно отразить их относительно ℓ_2 или O соответственно). Отсюда $|A_2| = |B| = C^4_{20\,000}$.
Заметим, что из наличия любых двух симметрий следует третья. Это означает, что $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap B| = |A_2 \cap B| = |A_1 \cap A_2 \cap B|$. Чтобы получить любую раскраску, обладающую всеми тремя симметриями, нужно выбрать две точки в одной из четвертей прямоугольника (например, в левой верхней, расположенной выше ℓ_1 и левее ℓ_2). Отражая две клетки относительно ℓ_1, получаем множество из четырёх закрашенных клеток. Отражая все четыре клетки относительно ℓ_2, получаем множество из восьми точек, обладающее всеми симметриями. Итак, $|A_1 \cap A_2 \cap B| = C^2_{10\,000}$, следовательно, $|A_1 \cap A_2| = C^2_{10\,000}$, $|A_2 \cap B| = C^2_{10\,000}$, $|A_1 \cap B| = C^2_{10\,000}$, поэтому $|A_1 \cup A_2 \cup B| = 3 \cdot C^4_{20\,000} - 2 \cdot C^2_{10\,000}$.

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 710$.

Ответ: $(26; 34; 35)$, $(26; 34; 25)$, $(-27; -19; -18)$, $(-27; -19; -28)$.

Решение. Так как $(a - c)(b - c) = p^2$, где p – простое, а $a - c < b - c$ (за счёт того, что $a < b$), возможны следующие два варианта:

$$\begin{cases} a - c = 1, \\ b - c = p^2 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} a - c = -p^2, \\ b - c = -1. \end{cases} \qquad (*)$$

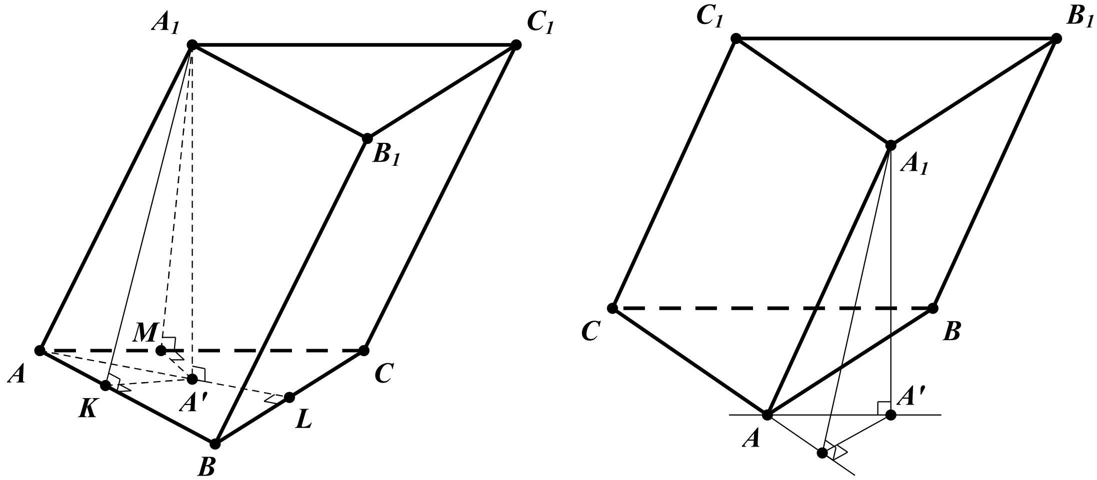
Вычитая из второго равенства первое, в обоих случаях получаем $b - a = p^2 - 1$. Рассмотрим возможные остатки от деления p на 3:

- $p = 3k + 1$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3\,(3k^2 - 2k)$ – делится на 3;
- $p = 3k + 2$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3\,(3k^2 + 4k + 1)$ – также делится на 3;
- $p = 3k$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 - 1$, и делимость на 3 отсутствует.

Поскольку число $b - a$ не кратно 3 по условию, возможен лишь третий случай. Но так как p простое, $p = 3$. Значит, $b - a = 8$. Добавляя сюда уравнение $a^2 + b = 710$, данное в условии, получаем систему с двумя неизвестными a и b. Решая её, находим $a = 26$, $b = 34$ или $a = -27$, $b = -19$. Исходя из систем $(*)$, для каждой пары $(a; b)$ существуют два подходящих значения c. Это $c = a + p^2 = a + 9$ или $c = a - 1$.
Итого есть 4 пары $(a; b; c)$, удовлетворяющие условию: $(26; 34; 35)$, $(26; 34; 25)$, $(-27; -19; -18)$, $(-27; -19; -28)$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1. Площади её боковых граней равны 3, 3 и 2. Найдите объём призмы.

Ответ: $\sqrt[4]{3}$.



Решение. Заметим, что призма не может быть прямой: иначе все её боковые грани имели бы равные площади. Так как в основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 1, его сторона равна $a = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$. Пусть грани ABB_1A_1 и ACC_1A_1 имеют площадь 3. Эти грани имеют равные площади, а их основания AB и AC также равны. Следовательно, высоты A_1M и A_1K этих граней равны между собой. Пусть AA' – высота призмы. Так как равные наклонные имеют равные проекции, отрезки $A'K$ и $A'M$ равны между собой. Значит, точка A' равноудалена от прямых AB и AC. Рассмотрим два возможных случая.

1) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла A треугольника ABC. По теореме о трёх перпендикулярах $AA_1 \perp BC$, следовательно, $BB_1 \perp BC$, то есть грань BCC_1B_1 – прямоугольник. Тогда $BB_1 = AA_1 > A_1K$, откуда следует, что $2 = S_{BB_1C_1C} = a \cdot BB_1 > a \cdot A_1K = S_{AA_1B_1B} = 3$ – противоречие. Значит, этот случай невозможен.

2) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внешнего угла A треугольника ABC. Тогда $AA' \parallel BC$ и $AA_1A' \parallel BCC_1B_1$. Но $AA_1A' \perp ABC$, следовательно, $BCC_1B_1 \perp ABC$ и высота параллелограмма BCC_1B_1 совпадает с высотой призмы и равна $\frac{2}{a} = \sqrt[4]{3}$. Так как площадь основания призмы равна 1, её объём есть $\sqrt[4]{3}$. Несложно понять, что такая призма существует.

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её четвёртый член равен $\sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}}$, десятый член равен $x+4$, а двенадцатый член равен $\sqrt{(15x+6)(x-3)}$.

Ответ: $x=-1$, $x=5$.

Решение. Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots$ – данная геометрическая прогрессия, а q – её знаменатель. Тогда $b_4 = b_1q^3$, $b_{10} = b_1q^9$, $b_{12} = b_1q^{11}$, откуда следует, что $b_{10}^4 = b_{12}^3 b_4$, а b_4, b_{10} и b_{12} – числа одного знака (несложно видеть, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы данные числа являлись членами геометрической прогрессии с соответствующими номерами). Значит,

$$(x+4)^4 = \left(\sqrt{(15x+6)(x-3)}\right)^3 \cdot \sqrt{\frac{15x+6}{(x-3)^3}},$$

что на ОДЗ равносильно уравнению $(x+4)^4 = (15x+6)^2$. Решаем его:

$$\left(x^2+8x+16\right)^2 = (15x+6)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+8x+16 = 15x+6, \\ x^2+8x+16 = -15x-6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=5, \\ x=-22, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Значение $x=2$ не принадлежит ОДЗ (подкоренное выражение отрицательно). Значение $x=-22$ не подходит, так как при этом $b_4>0$, $b_{10}<0$, $b_{12}>0$, что невозможно.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x+7} - \sqrt{5-x-3z} + 6 = 2\sqrt{y-2x-x^2+z}, \\ |y-20| + 2|y-35| = \sqrt{225-z^2}. \end{cases}$$

Ответ: $\left(2\sqrt{5}-1; 35; 0\right)$, $\left(-1-\frac{3\sqrt{15}}{2}; 35; 0\right)$.

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Его левая часть зависит только от y, а правая только от z. Сравним их множества значений. Несложно видеть, что множеством значений функции $f(z)=\sqrt{225-z^2}$ является отрезок $[0;15]$. Пусть $h(y)=|y-20|+2|y-35|$. Исследуем $h(y)$ на монотонность. Для раскрытия модулей нужно рассмотреть несколько промежутков; на каждом из них $h(y)$ – линейная функция. Возрастает она или убывает – зависит исключительно от знака при y. В первом слагаемом коэффициент при y по модулю меньше, чем во втором. Таким образом, знак коэффициента при y определяется тем, как раскроется второй модуль. Значит, $h(y)$ возрастает при $y \geqslant 35$ и убывает при $y \leqslant 35$. Отсюда следует, что $y=35$ – точка минимума, а минимальное значение $h(y)$ равно $h(35)=15$. Поскольку $\min h(y) = \max f(z) = 15$, из второго уравнения находим, что $f(z)=15 \Leftrightarrow z=0$ и $h(y)=15 \Leftrightarrow y=35$.
Подставляя y и z в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+7} - \sqrt{5-x} + 6 = 2\sqrt{35-2x-x^2}.$$

Обозначим $t=\sqrt{x+7}-\sqrt{5-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+7-2\sqrt{(x+7)(5-x)}+ + 5 - x$, откуда $2\sqrt{35-2x-x^2} = 12-t^2$. Уравнение принимает вид $t+6=12-t^2$. Решая его, находим $t = 2$ или $t = -3$.

- Если $t = 2$, то

$$\sqrt{x+7} = \sqrt{5-x} + 2 \Leftrightarrow x + 7 = 5 - x + 4\sqrt{5-x} + 4 \Leftrightarrow x - 1 = 2\sqrt{5-x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = 4(5-x), \\ x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \pm \sqrt{20}, \\ x \geqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5} - 1.$$

- Аналогично рассматриваем второе значение $t = -3$:

$$\sqrt{x+7} + 3 = \sqrt{5-x} \Leftrightarrow x + 7 + 6\sqrt{x+7} + 9 = 5 - x \Leftrightarrow 6\sqrt{x+7} = -2x - 11 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 36(x+7) = (-2x-11)^2, \\ -2x - 11 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \pm \frac{3\sqrt{15}}{2}, \\ x \leqslant -\frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -1 - \frac{3\sqrt{15}}{2}.$$

Итак, система имеет два решения: $\left(2\sqrt{5} - 1; 35; 0\right)$ и $\left(-1 - \frac{3\sqrt{15}}{2}; 35; 0\right)$.

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$\cos 3x + 6\cos x = 3\cos 2x + p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

Ответ: Решения есть при $p \in [-10; 4]$.
Они задаются формулой $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{1+\sqrt[3]{2p-7}}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

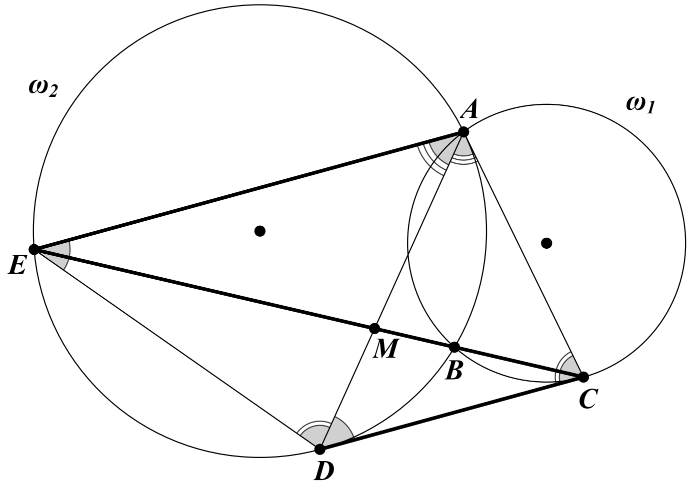
Решение. Применяя формулы $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и обозначая $\cos x = t$, приводим уравнение к виду $8t^3 - 12t^2 + 6t = 2p - 6$. Выделяя в левой части полный куб, получаем $(2t-1)^3 = 2p - 7$. Так как равенство кубов эквивалентно равенству самих чисел, это уравнение равносильно следующему: $2t - 1 = \sqrt[3]{2p-7} \Leftrightarrow t = \frac{\sqrt[3]{2p-7}+1}{2}$.
Ввиду ограниченности косинуса, отсюда получаем неравенства

$$\left|\frac{1+\sqrt[3]{2p-7}}{2}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow -2 \leqslant \sqrt[3]{2p-7} + 1 \leqslant 2 \Leftrightarrow -10 \leqslant p \leqslant 4.$$

При этих значениях p уравнение $\cos x = \frac{1+\sqrt[3]{2p-7}}{2}$ имеет решения $x = 2\pi k \pm \arccos \frac{1+\sqrt[3]{2p-7}}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $9 : 25$, считая от вершины C.

Ответ: $\frac{5}{3}$.



Решение. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle ADC$ равен половине дуги AD. По теореме о вписанном угле $\angle AED$ также равен половине дуги AD. Следовательно, $\angle AED = \angle ADC$. Обозначим $\angle ADE = \beta$ и заметим, что $\angle ABE = \angle ADE = \beta$ (вписанные, опираются на одну дугу); $\angle ABC = 180° - \angle ABE = 180° - \beta$. Кроме того, $\angle ABC + \angle ACD = 180°$ (второй угол равен половине дуги ABC как угол между касательной и хордой; первый угол является вписанным в окружность и опирается на дугу AC, не содержащую точку B), откуда $\angle ACD = 180° - \angle ABC = \beta$. Отсюда следует, что в треугольниках ADE и ACD есть по два равных угла. Во-первых, это означает, что третьи углы этих треугольников также равны (то есть AD – биссектриса угла CAE), а во-вторых – что треугольники подобны. Из подобия получаем пропорциональность сторон: $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD}$. Отсюда можно выразить, что $\left(\frac{ED}{CD}\right)^2 = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AC}$.

Обозначим точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDE$ через M. Учитывая сказанное выше, AM – биссектриса треугольника ACE. По свойству биссектрисы $\frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE}$. Значит, $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{AE}{AC}} = \sqrt{\frac{ME}{CM}} = \frac{5}{3}$.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 150×200. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух "средних линий" прямоугольника ("средней линией" прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $3 \cdot C_{15\,000}^4 - 2 \cdot C_{7\,500}^2$.

Решение. Пусть O – центр прямоугольника, а отрезки ℓ_1 и ℓ_2 – его средние линии (для определённости считаем, что средняя линия ℓ_1 горизонтальна, а ℓ_2 – вертикальна. Обозначим множество раскрасок, обладающих симметрией относительно ℓ_1 через A_1, относительно ℓ_2 – через A_2, относительно O – через B. Для обозначения количества элементов множества будем использовать модуль. Согласно формуле включений и исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup B| = |A_1| + |A_2| + |B| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap B| - |A_2 \cap B| + |A_1 \cap A_2 \cap B|.$$

Чтобы получить любую раскраску, входящую в A_1, достаточно выбрать четыре произвольные клетки в верхней половине прямоугольника (т.е. выше ℓ_1), после чего клетки в нижней половине получаются симметрией четырёх выбранных клеток относительно ℓ_1. Так как в верхней половине прямоугольника всего 15 000 клеток, $|A_1| = C_{15\,000}^4$. Любую раскраску из A_2 или B можно получить,

выбрав 4 клетки из 15 000 в левой половине прямоугольника (нужно отразить их относительно ℓ_2 или O соответственно). Отсюда $|A_2| = |B| = C^4_{15\,000}$.
Заметим, что из наличия любых двух симметрий следует третья. Это означает, что $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap B| = |A_2 \cap B| = |A_1 \cap A_2 \cap B|$. Чтобы получить любую раскраску, обладающую всеми тремя симметриями, нужно выбрать две точки в одной из четвертей прямоугольника (например, в левой верхней, расположенной выше ℓ_1 и левее ℓ_2). Отражая две клетки относительно ℓ_1, получаем множество из четырёх закрашенных клеток. Отражая все четыре клетки относительно ℓ_2, получаем множество из восьми точек, обладающее всеми симметриями. Итак, $|A_1 \cap A_2 \cap B| = C^2_{7\,500}$, следовательно, $|A_1 \cap A_2| = C^2_{7\,500}$, $|A_2 \cap B| = C^2_{7\,500}$, $|A_1 \cap B| = C^2_{7\,500}$, поэтому $|A_1 \cup A_2 \cup B| = 3 \cdot C^4_{15\,000} - 2 \cdot C^2_{7\,500}$.

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 820$.

Ответ: $(36; 28; 27)$, $(36; 28; 37)$, $(-21; -29; -20)$, $(-21; -29; -30)$.

Решение. Так как $(a - c)(b - c) = p^2$, где p – простое, а $a - c > b - c$ (за счёт того, что $a > b$), возможны следующие два варианта:

$$\begin{cases} b - c = 1, \\ a - c = p^2 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} b - c = -p^2, \\ a - c = -1. \end{cases} \qquad (*)$$

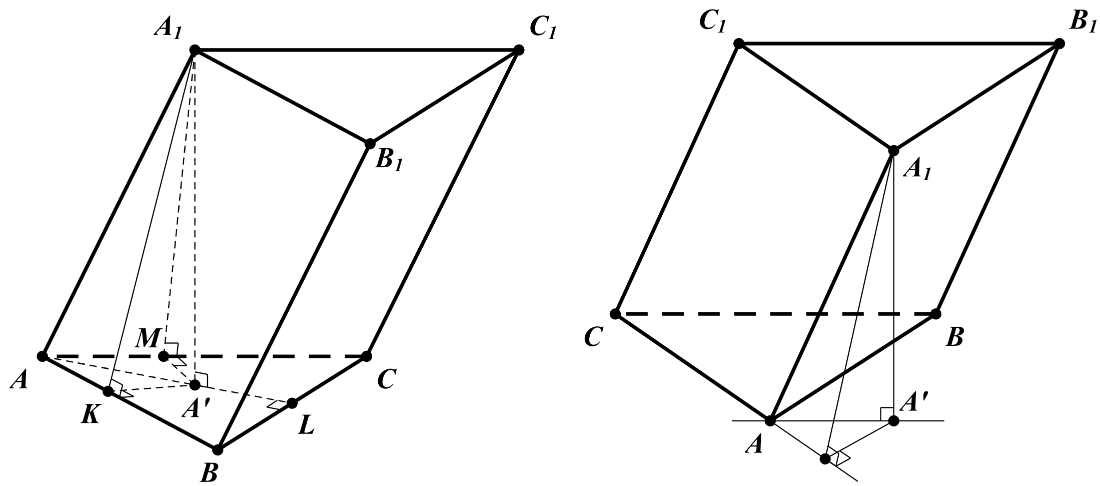
Вычитая из второго равенства первое, в обоих случаях получаем $a - b = p^2 - 1$. Рассмотрим возможные остатки от деления p на 3:

- $p = 3k + 1$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3\left(3k^2 - 2k\right)$ – делится на 3;
- $p = 3k + 2$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3\left(3k^2 + 4k + 1\right)$ – также делится на 3;
- $p = 3k$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 - 1$, и делимость на 3 отсутствует.

Поскольку число $a - b$ не кратно 3 по условию, возможен лишь третий случай. Но так как p простое, $p = 3$. Значит, $a - b = 8$. Добавляя сюда уравнение $a + b^2 = 820$, данное в условии, получаем систему с двумя неизвестными a и b. Решая её, находим $a = 36$, $b = 28$ или $a = -21$, $b = -29$. Исходя из систем $(*)$, для каждой пары $(a; b)$ существуют два подходящих значения c. Это $c = a - p^2 = a - 9$ или $c = a + 1$.
Итого есть 4 пары $(a; b; c)$, удовлетворяющие условию: $(36; 28; 27)$, $(36; 28; 37)$, $(-21; -29; -20)$, $(-21; -29; -30)$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 2. Площади её боковых граней равны 5, 5 и 4. Найдите высоту призмы.

Ответ: 2.



Решение. Заметим, что призма не может быть прямой: иначе все её боковые грани имели бы равные площади. Пусть грани ABB_1A_1 и ACC_1A_1 имеют площадь 5. Эти грани имеют равные площади, а их основания AB и AC также равны. Следовательно, высоты A_1M и A_1K этих граней равны между собой. Пусть AA' – высота призмы. Так как равные наклонные имеют равные проекции, отрезки $A'K$ и $A'M$ равны между собой. Значит, точка A' равноудалена от прямых AB и AC. Рассмотрим два возможных случая.

1) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла A треугольника ABC. По теореме о трёх перпендикулярах $AA_1 \perp BC$, следовательно, $BB_1 \perp BC$, то есть грань BCC_1B_1 – прямоугольник. Тогда $BB_1 = AA_1 > A_1K$, откуда следует, что $2 = S_{BB_1C_1C} = a \cdot BB_1 > a \cdot A_1K = S_{AA_1B_1B} = 3$ – противоречие ($a = 2$ – ребро основания призмы). Значит, этот случай невозможен.

2) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внешнего угла A треугольника ABC. Тогда $AA' \parallel BC$ и $AA_1A' \parallel BCC_1B_1$. Но $AA_1A' \perp ABC$, следовательно, $BCC_1B_1 \perp ABC$ и высота параллелограмма BCC_1B_1 совпадает с высотой призмы и равна $\frac{4}{a} = 2$. Несложно понять, что такая призма существует.

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её десятый член равен $\sqrt{(25x+34)(3x+2)}$, двенадцатый член равен $2-x$, а восемнадцатый член равен $\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}}$.

Ответ: $x=-19$, $x=-2$.

Решение. Пусть $b_1, b_2, b_3, \ldots$ – данная геометрическая прогрессия, а q – её знаменатель. Тогда $b_{10}=b_1q^9$, $b_{12}=b_1q^{11}$, $b_{18}=b_1q^{17}$, откуда следует, что $b_{12}^4=b_{10}^3b_{18}$, а b_{10}, b_{12} и b_{18} – числа одного знака (несложно видеть, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы данные числа являлись членами геометрической прогрессии с соответствующими номерами). Значит,

$$(2-x)^4=\left(\sqrt{(25x+34)(3x+2)}\right)^3\cdot\sqrt{\frac{25x+34}{(3x+2)^3}},$$

что на ОДЗ равносильно уравнению $(2-x)^4=(25x+34)^2$. Решаем его:

$$\left(x^2-4x+4\right)^2=(25x+34)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-4x+4=25x+34,\\ x^2-4x+4=-25x-34\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=30,\\ x=-2,\\ x=-19.\end{array}\right.$$

Значение $x=-1$ не принадлежит ОДЗ (подкоренное выражение отрицательно). Значение $x=30$ не подходит, так как при этом $b_{10}>0$, $b_{12}<0$, $b_{18}>0$, что невозможно.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x+6}-\sqrt{3-x-2z}+7=2\sqrt{y-3x-x^2+z},\\ |y+2|+2|y-18|=\sqrt{400-z^2}.\end{cases}$$

Ответ: $\left(-\frac{3+\sqrt{56}}{2};18;0\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{17}-3}{2};18;0\right)$.

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Его левая часть зависит только от y, а правая только от z. Сравним их множества значений. Несложно видеть, что множеством значений функции $f(z)=\sqrt{400-z^2}$ является отрезок $[0;20]$. Пусть $h(y)=|y+2|+2|y-18|$. Исследуем $h(y)$ на монотонность. Для раскрытия модулей нужно рассмотреть несколько промежутков; на каждом из них $h(y)$ – линейная функция. Возрастает она или убывает – зависит исключительно от знака при y. В первом слагаемом коэффициент при y по модулю меньше, чем во втором. Таким образом, знак коэффициента при y определяется тем, как раскроется второй модуль. Значит, $h(y)$ возрастает при $y\geqslant 18$ и убывает при $y\leqslant 18$. Отсюда следует, что $y=18$ – точка минимума, а минимальное значение $h(y)$ равно $h(18)=20$. Поскольку $\min h(y)=\max f(z)=20$, из второго уравнения находим, что $f(z)=20 \Leftrightarrow z=0$ и $h(y)=20 \Leftrightarrow y=18$.
Подставляя y и z в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+6}-\sqrt{3-x}+7=2\sqrt{18-3x-x^2}.$$

Обозначим $t=\sqrt{x+6}-\sqrt{3-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2=x+6-2\sqrt{(x+6)(3-x)}+$ $+3-x$, откуда $2\sqrt{18-3x-x^2}=9-t^2$. Уравнение принимает вид $t+9=9-t^2$. Решая его, находим

$t = 1$ или $t = -2$.

- Если $t = 1$, то

$$\sqrt{x+6} = \sqrt{3-x} + 1 \Leftrightarrow x + 6 = 3 - x + 2\sqrt{3-x} + 1 \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2 = 3 - x, \\ x + 1 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}, \\ x \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{17}-3}{2}.$$

- Аналогично рассматриваем второе значение $t = -2$:

$$\sqrt{x+6} + 2 = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow x + 6 + 4\sqrt{x+6} + 4 = 3 - x \Leftrightarrow 4\sqrt{x+6} = -2x - 7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16(x+6) = (-2x-7)^2, \\ -2x - 7 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3\pm\sqrt{56}}{2}, \\ x \leqslant -\frac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{3+\sqrt{56}}{2}.$$

Итак, система имеет два решения: $\left(-\frac{3+\sqrt{56}}{2}; 18; 0\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{17}-3}{2}; 18; 0\right)$.

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$p\cos 3x + 6\cos 2x + 3(p+4)\cos x + 10 = 0$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

Ответ: Решения есть при $p \in (-\infty; -7] \cup [1; +\infty)$.
Они задаются формулой $x = 2\pi k + \pi \pm \arccos \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

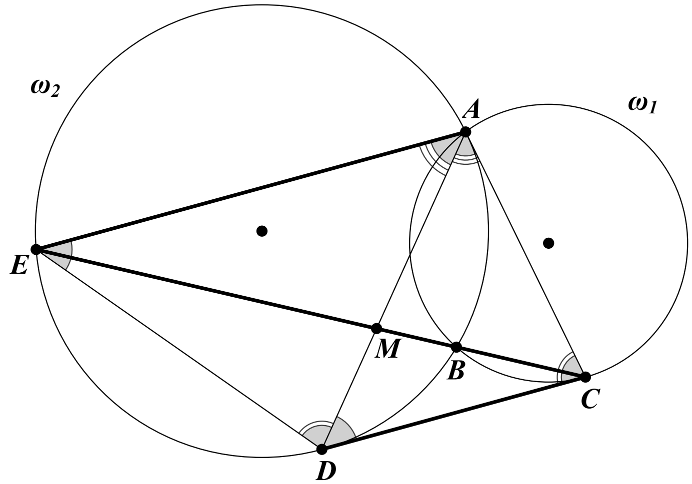
Решение. Применяя формулы $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и обозначая $\cos x = t$, приводим уравнение к виду $pt^3 + 3t^2 + 3t + 1 = 0$. Выделяя в левой части полный куб, получаем $(p-1)t^3 + (t+1)^3$. Так как равенство кубов эквивалентно равенству самих чисел, это уравнение равносильно следующему: $\left(t\sqrt[3]{p-1}\right)^3 = (-1-t)^3 \Leftrightarrow t\sqrt[3]{p-1} = -1 - t \Leftrightarrow t = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$.
Ввиду ограниченности косинуса, отсюда получаем неравенства

$$\left|-\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}\right| \leqslant 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 + \sqrt[3]{p-1} \geqslant 1, \\ 1 + \sqrt[3]{p-1} \leqslant -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p \leqslant -7, \\ p \geqslant 1. \end{array}\right.$$

При этих значениях p уравнение $\cos x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$ имеет решения $x = 2\pi k + \pi \pm \arccos \frac{1}{1+\sqrt[3]{p-1}}$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED : CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $7 : 20$, считая от вершины C.

Ответ: $2\sqrt{\frac{5}{7}}$.



Решение. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle ADC$ равен половине дуги AD. По теореме о вписанном угле $\angle AED$ также равен половине дуги AD. Следовательно, $\angle AED = \angle ADC$. Обозначим $\angle ADE = \beta$ и заметим, что $\angle ABE = \angle ADE = \beta$ (вписанные, опираются на одну дугу); $\angle ABC = 180° - \angle ABE = 180° - \beta$. Кроме того, $\angle ABC + \angle ACD = 180°$ (второй угол равен половине дуги ABC как угол между касательной и хордой; первый угол является вписанным в окружность и опирается на дугу AC, не содержащую точку B), откуда $\angle ACD = 180° - \angle ABC = \beta$. Отсюда следует, что в треугольниках ADE и ACD есть по два равных угла. Во-первых, это означает, что третьи углы этих треугольников также равны (то есть AD – биссектриса угла CAE), а во-вторых – что треугольники подобны. Из подобия получаем пропорциональность сторон: $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD}$. Отсюда можно выразить, что $\left(\frac{ED}{CD}\right)^2 = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AC}$.
Обозначим точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDE$ через M. Учитывая сказанное выше, AM – биссектриса треугольника ACE. По свойству биссектрисы $\frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE}$. Значит, $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{AE}{AC}} = \sqrt{\frac{ME}{CM}} = 2\sqrt{\frac{5}{7}}$.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 500×120. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух “средних линий” прямоугольника (“средней линией” прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $3 \cdot C_{30\,000}^4 - 2 \cdot C_{15\,000}^2$.

Решение. Пусть O – центр прямоугольника, а отрезки ℓ_1 и ℓ_2 – его средние линии (для определённости считаем, что средняя линия ℓ_1 горизонтальна, а ℓ_2 – вертикальна. Обозначим множество раскрасок, обладающих симметрией относительно ℓ_1 через A_1, относительно ℓ_2 – через A_2, относительно O – через B. Для обозначения количества элементов множества будем использовать модуль. Согласно формуле включений и исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup B| = |A_1| + |A_2| + |B| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap B| - |A_2 \cap B| + |A_1 \cap A_2 \cap B|.$$

Чтобы получить любую раскраску, входящую в A_1, достаточно выбрать четыре произвольные клетки в верхней половине прямоугольника (т.е. выше ℓ_1), после чего клетки в нижней половине получаются симметрией четырёх выбранных клеток относительно ℓ_1. Так как в верхней половине прямоугольника всего 30 000 клеток, $|A_1| = C_{30\,000}^4$. Любую раскраску из A_2 или B можно получить,

выбрав 4 клетки из 30 000 в левой половине прямоугольника (нужно отразить их относительно ℓ_2 или O соответственно). Отсюда $|A_2| = |B| = C^4_{30\,000}$.
Заметим, что из наличия любых двух симметрий следует третья. Это означает, что $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap B| = |A_2 \cap B| = |A_1 \cap A_2 \cap B|$. Чтобы получить любую раскраску, обладающую всеми тремя симметриями, нужно выбрать две точки в одной из четвертей прямоугольника (например, в левой верхней, расположенной выше ℓ_1 и левее ℓ_2). Отражая две клетки относительно ℓ_1, получаем множество из четырёх закрашенных клеток. Отражая все четыре клетки относительно ℓ_2, получаем множество из восьми точек, обладающее всеми симметриями. Итак, $|A_1 \cap A_2 \cap B| = C^2_{15\,000}$, следовательно, $|A_1 \cap A_2| = C^2_{15\,000}$, $|A_2 \cap B| = C^2_{15\,000}$, $|A_1 \cap B| = C^2_{15\,000}$, поэтому $|A_1 \cup A_2 \cup B| = 3 \cdot C^4_{30\,000} - 2 \cdot C^2_{15\,000}$.

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a < b$,
- число $b - a$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a^2 + b = 1000$.

Ответ: $(31; 39; 30)$, $(31; 39; 40)$, $(-32; -24; -23)$, $(-32; -24; -33)$.

Решение. Так как $(a - c)(b - c) = p^2$, где p – простое, а $a - c < b - c$ (за счёт того, что $a < b$), возможны следующие два варианта:

$$\begin{cases} a - c = 1, \\ b - c = p^2 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} a - c = -p^2, \\ b - c = -1. \end{cases} \qquad (*)$$

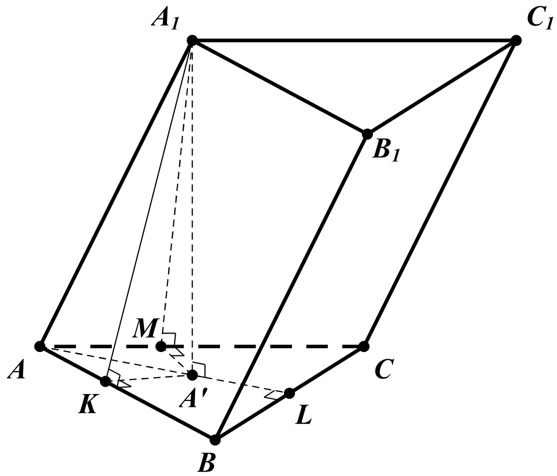
Вычитая из второго равенства первое, в обоих случаях получаем $b - a = p^2 - 1$. Рассмотрим возможные остатки от деления p на 3:

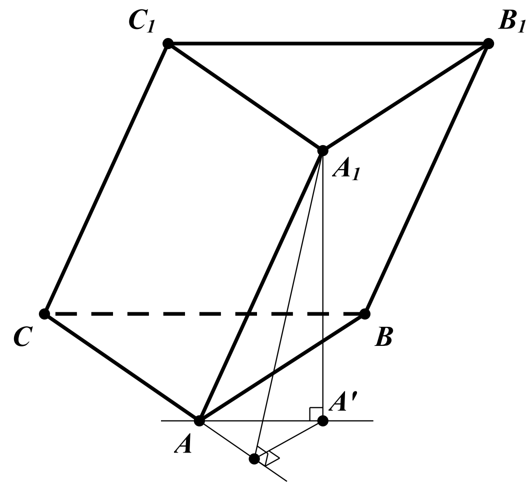
- $p = 3k + 1$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3\,(3k^2 - 2k)$ – делится на 3;
- $p = 3k + 2$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3\,(3k^2 + 4k + 1)$ – также делится на 3;
- $p = 3k$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 - 1$, и делимость на 3 отсутствует.

Поскольку число $b - a$ не кратно 3 по условию, возможен лишь третий случай. Но так как p простое, $p = 3$. Значит, $b - a = 8$. Добавляя сюда уравнение $a^2 + b = 1000$, данное в условии, получаем систему с двумя неизвестными a и b. Решая её, находим $a = 31$, $b = 39$ или $a = -32$, $b = -24$. Исходя из систем $(*)$, для каждой пары $(a; b)$ существуют два подходящих значения c. Это $c = a + p^2 = a + 9$ или $c = a - 1$.
Итого есть 4 пары $(a; b; c)$, удовлетворяющие условию: $(31; 39; 30)$, $(31; 39; 40)$, $(-32; -24; -23)$, $(-32; -24; -33)$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 4. Площади её боковых граней равны 6, 6 и 5. Найдите объём призмы.

Ответ: $5\sqrt[4]{3}$.





Решение. Заметим, что призма не может быть прямой: иначе все её боковые грани имели бы равные площади. Так как в основании призмы лежит равносторонний треугольник площади 5, его сторона равна $a = \frac{4}{\sqrt[4]{3}}$. Пусть грани ABB_1A_1 и ACC_1A_1 имеют площадь 6. Эти грани имеют равные площади, а их основания AB и AC также равны. Следовательно, высоты A_1M и A_1K этих граней равны между собой. Пусть AA' – высота призмы. Так как равные наклонные имеют равные проекции, отрезки $A'K$ и $A'M$ равны между собой. Значит, точка A' равноудалена от прямых AB и AC. Рассмотрим два возможных случая.

1) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла A треугольника ABC. По теореме о трёх перпендикулярах $AA_1 \perp BC$, следовательно, $BB_1 \perp BC$, то есть грань BCC_1B_1 – прямоугольник. Тогда $BB_1 = AA_1 > A_1K$, откуда следует, что $5 = S_{BB_1C_1C} = a \cdot BB_1 > a \cdot A_1K = S_{AA_1B_1B} = 6$ – противоречие. Значит, этот случай невозможен.

2) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внешнего угла A треугольника ABC. Тогда $AA' \parallel BC$ и $AA_1A' \parallel BCC_1B_1$. Но $AA_1A' \perp ABC$, следовательно, $BCC_1B_1 \perp ABC$ и высота параллелограмма BCC_1B_1 совпадает с высотой призмы и равна $\frac{5}{a} = \frac{5\sqrt[4]{3}}{4}$. Так как площадь основания призмы равна 4, её объём есть $5\sqrt[4]{3}$. Несложно понять, что такая призма существует.

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Найдите все действительные значения x, при каждом из которых существует геометрическая прогрессия, состоящая из действительных чисел и такая, что её седьмой член равен $\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}}$, тринадцатый член равен $5-x$, а пятнадцатый член равен $\sqrt{(13x-35)(x+1)}$.

Ответ: $x=-5$, $x=3$.

Решение. Пусть b_1, b_2, $b_3, \ldots$ – данная геометрическая прогрессия, а q – её знаменатель. Тогда $b_7=b_1q^6$, $b_{13}=b_1q^{12}$, $b_{15}=b_1q^{14}$, откуда следует, что $b_{13}^4=b_{15}^3b_7$, а b_7, b_{13} и b_{15} – числа одного знака (несложно видеть, что эти условия являются и достаточными для того, чтобы данные числа являлись членами геометрической прогрессии с соответствующими номерами). Значит,

$$(5-x)^4=\left(\sqrt{(13x-35)(x+1)}\right)^3\cdot\sqrt{\frac{13x-35}{(x+1)^3}},$$

что на ОДЗ равносильно уравнению $(5-x)^4=(13x-35)^2$. Решаем его:

$$\left(x^2-10x+25\right)^2=(13x-35)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-10x+25=13x-35,\\ x^2-10x+25=35-13x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=20,\\ x=-5,\\ x=2.\end{array}\right.$$

Значение $x=2$ не принадлежит ОДЗ (подкоренное выражение отрицательно). Значение $x=20$ не подходит, так как при этом $b_7>0$, $b_{13}<0$, $b_{15}>0$, что невозможно.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x+3}-\sqrt{4-x-z}+5=2\sqrt{y+x-x^2+z},\\ |y+1|+3|y-12|=\sqrt{169-z^2}.\end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};12;0\right)$, $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{10};12;0\right)$.

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы. Его левая часть зависит только от y, а правая только от z. Сравним их множества значений. Несложно видеть, что множеством значений функции $f(z)=\sqrt{169-z^2}$ является отрезок $[0;13]$. Пусть $h(y)=|y+1|+3|y-12|$. Исследуем $h(y)$ на монотонность. Для раскрытия модулей нужно рассмотреть несколько промежутков; на каждом из них $h(y)$ – линейная функция. Возрастает она или убывает – зависит исключительно от знака при y. В первом слагаемом коэффициент при y по модулю меньше, чем во втором. Таким образом, знак коэффициента при y определяется тем, как раскроется второй модуль. Значит, $h(y)$ возрастает при $y\geqslant 12$ и убывает при $y\leqslant 12$. Отсюда следует, что $y=12$ – точка минимума, а минимальное значение $h(y)$ равно $h(12)=13$. Поскольку $\min h(y)=\max f(z)=13$, из второго уравнения находим, что $f(z)=13\Leftrightarrow z=0$ и $h(y)=13\Leftrightarrow y=12$.
Подставляя y и z в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{4-x}+5=2\sqrt{12+x-x^2}.$$

Обозначим $t=\sqrt{x+3}-\sqrt{4-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2=x+3-2\sqrt{(x+3)(4-x)}+$ $+4-x$, откуда $2\sqrt{12+x-x^2}=7-t^2$. Уравнение принимает вид $t+5=7-t^2$. Решая его, находим

$t=1$ или $t=-2$.

- Если $t=1$, то

$$\sqrt{x+3}=\sqrt{4-x}+1 \Leftrightarrow x+3=4-x+2\sqrt{4-x}+1 \Leftrightarrow x-1=\sqrt{4-x} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2=4-x,\\ x-1\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2},\\ x\geqslant 1\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

- Аналогично рассматриваем второе значение $t=-2$:

$$\sqrt{x+3}+2=\sqrt{4-x} \Leftrightarrow x+3+4\sqrt{x+3}+4=4-x \Leftrightarrow 4\sqrt{x+3}=-2x-3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}16(x+3)=(-2x-3)^2,\\ -2x-3\geqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{1}{2}\pm\sqrt{10},\\ x\leqslant -\frac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}-\sqrt{10}.$$

Итак, система имеет два решения: $\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2};12;0\right)$ и $\left(\frac{1}{2}-\sqrt{10};12;0\right)$.

3. [5 баллов] Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$\cos 3x+3\cos 2x+6\cos x=p$$

имеет хотя бы одно решение. Решите это уравнение при всех таких p.

Ответ: Решения есть при $p\in[-4;10]$.
Они задаются формулой $x=2\pi k\pm\arccos\frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

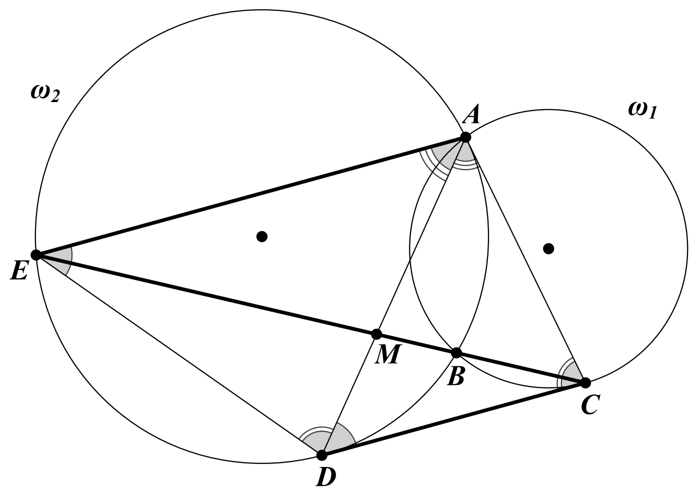
Решение. Применяя формулы $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$, $\cos 2x=2\cos^2 x-1$ и обозначая $\cos x=t$, приводим уравнение к виду $8t^3+12t^2+6t=2p+6$. Выделяя в левой части полный куб, получаем $(2t+1)^3=2p+7$. Так как равенство кубов эквивалентно равенству самих чисел, это уравнение равносильно следующему: $2t+1=\sqrt[3]{2p+7} \Leftrightarrow t=\frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}$.
Ввиду ограниченности косинуса, отсюда получаем неравенства

$$\left|\frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}\right|\leqslant 1 \Leftrightarrow -2\leqslant \sqrt[3]{2p+7}-11\leqslant 2 \Leftrightarrow -4\leqslant p\leqslant 10.$$

При этих значениях p уравнение $\cos x=\frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}$ имеет решения $x=2\pi k\pm\arccos\frac{\sqrt[3]{2p+7}-1}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

4. [5 баллов] Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B, а их общая касательная имеет с ω_1 и ω_2 общие точки C и D соответственно, причём точка B расположена ближе к прямой CD, чем точка A. Луч CB пересекает ω_2 в точках B и E. Найдите отношение $ED:CD$, если диагональ AD четырёхугольника $ACDE$ делит отрезок CE в отношении $3:10$, считая от вершины C.

Ответ: $\sqrt{\frac{10}{3}}$.



Решение. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle ADC$ равен половине дуги AD. По теореме о вписанном угле $\angle AED$ также равен половине дуги AD. Следовательно, $\angle AED = \angle ADC$. Обозначим $\angle ADE = \beta$ и заметим, что $\angle ABE = \angle ADE = \beta$ (вписанные, опираются на одну дугу); $\angle ABC = 180^\circ - \angle ABE = 180^\circ - \beta$. Кроме того, $\angle ABC + \angle ACD = 180^\circ$ (второй угол равен половине дуги ABC как угол между касательной и хордой; первый угол является вписанным в окружность и опирается на дугу AC, не содержащую точку B), откуда $\angle ACD = 180^\circ - \angle ABC = \beta$. Отсюда следует, что в треугольниках ADE и ACD есть по два равных угла. Во-первых, это означает, что третьи углы этих треугольников также равны (то есть AD – биссектриса угла CAE), а во-вторых – что треугольники подобны. Из подобия получаем пропорциональность сторон: $\frac{AD}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{ED}{CD}$. Отсюда можно выразить, что $\left(\frac{ED}{CD}\right)^2 = \frac{AD}{AC} \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AC}$.
Обозначим точку пересечения диагоналей четырёхугольника $ABDE$ через M. Учитывая сказанное выше, AM – биссектриса треугольника ACE. По свойству биссектрисы $\frac{CM}{ME} = \frac{AC}{AE}$. Значит, $\frac{ED}{CD} = \sqrt{\frac{AE}{AC}} = \sqrt{\frac{ME}{CM}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$.

5. [4 балла] Дан клетчатый прямоугольник 200×250. Сколькими способами можно закрасить 8 клеток этого прямоугольника так, чтобы закрашенное множество обладало хотя бы одной из следующих симметрий: относительно центра прямоугольника, относительно любой из двух “средних линий” прямоугольника (“средней линией” прямоугольника назовём отрезок, соединяющий середины двух его противоположных сторон). Ответ дайте в виде выражения, содержащего не более трёх членов (в них могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $3 \cdot C_{25\,000}^4 - 2 \cdot C_{12\,500}^2$.

Решение. Пусть O – центр прямоугольника, а отрезки ℓ_1 и ℓ_2 – его средние линии (для определённости считаем, что средняя линия ℓ_1 горизонтальна, а ℓ_2 – вертикальна. Обозначим множество раскрасок, обладающих симметрией относительно ℓ_1 через A_1, относительно ℓ_2 – через A_2, относительно O – через B. Для обозначения количества элементов множества будем использовать модуль. Согласно формуле включений и исключений

$$|A_1 \cup A_2 \cup B| = |A_1| + |A_2| + |B| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap B| - |A_2 \cap B| + |A_1 \cap A_2 \cap B|.$$

Чтобы получить любую раскраску, входящую в A_1, достаточно выбрать четыре произвольные клетки в верхней половине прямоугольника (т.е. выше ℓ_1), после чего клетки в нижней половине получаются симметрией четырёх выбранных клеток относительно ℓ_1. Так как в верхней половине прямоугольника всего 25 000 клеток, $|A_1| = C_{25\,000}^4$. Любую раскраску из A_2 или B можно получить,

выбрав 4 клетки из 25 000 в левой половине прямоугольника (нужно отразить их относительно ℓ_2 или O соответственно). Отсюда $|A_2| = |B| = C^4_{25\,000}$.
Заметим, что из наличия любых двух симметрий следует третья. Это означает, что $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap B| = |A_2 \cap B| = |A_1 \cap A_2 \cap B|$. Чтобы получить любую раскраску, обладающую всеми тремя симметриями, нужно выбрать две точки в одной из четвертей прямоугольника (например, в левой верхней, расположенной выше ℓ_1 и левее ℓ_2). Отражая две клетки относительно ℓ_1, получаем множество из четырёх закрашенных клеток. Отражая все четыре клетки относительно ℓ_2, получаем множество из восьми точек, обладающее всеми симметриями. Итак, $|A_1 \cap A_2 \cap B| = C^2_{12\,500}$, следовательно, $|A_1 \cap A_2| = C^2_{12\,500}$, $|A_2 \cap B| = C^2_{12\,500}$, $|A_1 \cap B| = C^2_{12\,500}$, поэтому $|A_1 \cup A_2 \cup B| = 3 \cdot C^4_{25\,000} - 2 \cdot C^2_{12\,500}$.

6. [4 балла] Найдите все тройки целых чисел $(a; b; c)$ такие, что:

- $a > b$,
- число $a - b$ не кратно 3,
- число $(a - c)(b - c)$ является квадратом некоторого простого числа,
- выполняется равенство $a + b^2 = 560$.

Ответ: $(31; 23; 22)$, $(31; 23; 32)$, $(-16; -24; -25)$, $(-16; -24; -15)$.

Решение. Так как $(a - c)(b - c) = p^2$, где p – простое, а $a - c > b - c$ (за счёт того, что $a > b$), возможны следующие два варианта:

$$\begin{cases} b - c = 1, \\ a - c = p^2 \end{cases} \qquad \text{или} \qquad \begin{cases} b - c = -p^2, \\ a - c = -1. \end{cases} \qquad (*)$$

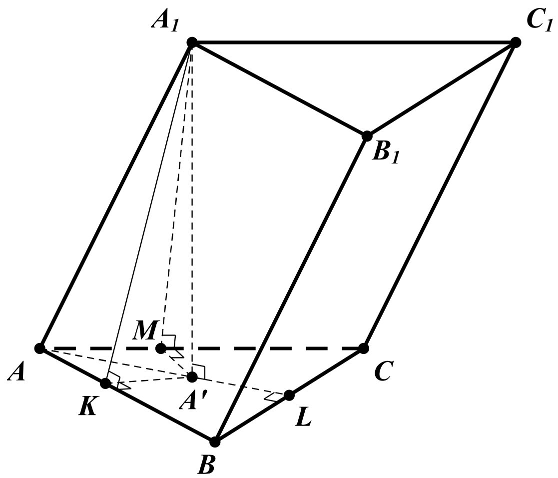
Вычитая из второго равенства первое, в обоих случаях получаем $a - b = p^2 - 1$. Рассмотрим возможные остатки от деления p на 3:

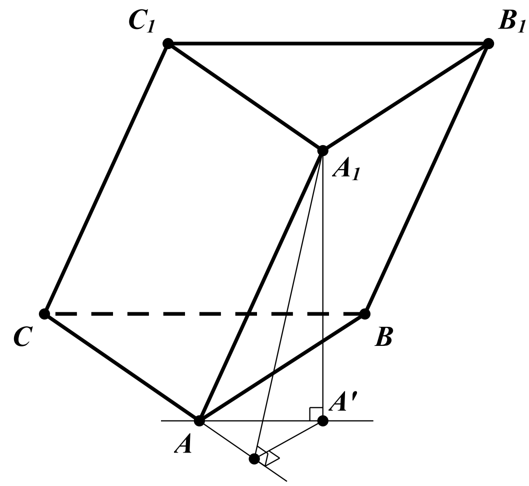
- $p = 3k + 1$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 6k = 3\,(3k^2 - 2k)$ – делится на 3;
- $p = 3k + 2$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 + 12k + 3 = 3\,(3k^2 + 4k + 1)$ – также делится на 3;
- $p = 3k$ – тогда $p^2 - 1 = 9k^2 - 1$, и делимость на 3 отсутствует.

Поскольку число $a - b$ не кратно 3 по условию, возможен лишь третий случай. Но так как p простое, $p = 3$. Значит, $a - b = 8$. Добавляя сюда уравнение $a + b^2 = 560$, данное в условии, получаем систему с двумя неизвестными a и b. Решая её, находим $a = 31$, $b = 23$ или $a = -16$, $b = -24$. Исходя из систем $(*)$, для каждой пары $(a; b)$ существуют два подходящих значения c. Это $c = a - p^2 = a - 9$ или $c = a + 1$.
Итого есть 4 пары $(a; b; c)$, удовлетворяющие условию: $(31; 23; 22)$, $(31; 23; 32)$, $(-16; -24; -25)$, $(-16; -24; -15)$.

7. [6 баллов] В основании призмы лежит равносторонний треугольник со стороной 1. Площади её боковых граней равны 4, 4 и 3. Найдите высоту призмы.

Ответ: 3.





Решение. Заметим, что призма не может быть прямой: иначе все её боковые грани имели бы равные площади. Пусть грани ABB_1A_1 и ACC_1A_1 имеют площадь 4. Эти грани имеют равные площади, а их основания AB и AC также равны. Следовательно, высоты A_1M и A_1K этих граней равны между собой. Пусть AA' – высота призмы. Так как равные наклонные имеют равные проекции, отрезки $A'K$ и $A'M$ равны между собой. Значит, точка A' равноудалена от прямых AB и AC. Рассмотрим два возможных случая.

1) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внутреннего угла A треугольника ABC. По теореме о трёх перпендикулярах $AA_1 \perp BC$, следовательно, $BB_1 \perp BC$, то есть грань BCC_1B_1 – прямоугольник. Тогда $BB_1 = AA_1 > A_1K$, откуда следует, что $3 = S_{BB_1C_1C} = a \cdot BB_1 > a \cdot A_1K = S_{AA_1B_1B} = 4$ – противоречие ($a = 1$ – ребро основания призмы). Значит, этот случай невозможен.

2) Точка A' лежит на прямой, содержащей биссектрису внешнего угла A треугольника ABC. Тогда $AA' \parallel BC$ и $AA_1A' \parallel BCC_1B_1$. Но $AA_1A' \perp ABC$, следовательно, $BCC_1B_1 \perp ABC$ и высота параллелограмма BCC_1B_1 совпадает с высотой призмы и равна $\frac{3}{a} = 3$. Несложно понять, что такая призма существует.

10 КЛАСС. Вариант 5

1. [3 балла] Третий член арифметической прогрессии равен $3x+3$, пятый член равен $(x^2+2x)^2$, а девятый равен $3x^2$. Найдите x.

   Ответ: $x=-1$, $x=-1\pm\sqrt{3}$.

   Решение. Числа A, B, C являются третьим, пятым и девятым членами арифметической прогрессии соответственно тогда и только тогда, когда они удовлетворяют соотношению $3B=2A+C$ ($a_5=a_3+2d$, $a_9=a_3+6d$). Таким образом, задача сводится к решению уравнения $3\left(x^2+2x\right)^2 = 3x^2+2(3x+3)$. Сделав замену $t=x^2+2x$, получаем $3t^2=3t+6 \Leftrightarrow t^2-t-2=0$. Данное уравнение имеет корни $t=-1$ и $t=2$. Далее находим значения x:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+2x+1=0, \\ x^2+2x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-1\pm\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $4y+8x$ при условии $\begin{cases} |x-3y|\leqslant 3, \\ |3x-y|\leqslant 1. \end{cases}$

   Ответ: 11.

   Решение. Данная система неравенств эквивалентна следующим:

$$\begin{cases} -3\leqslant x-3y\leqslant 3, \\ -1\leqslant 3x-y\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{3}-1\leqslant y\leqslant \frac{x}{3}+1, \\ 3x-1\leqslant y\leqslant 3x+1. \end{cases}$$

   Первое неравенство задаёт полосу между параллельными прямыми $y=\frac{x}{3}-1$ и $y=\frac{x}{3}+1$, а второе – полосу между прямыми $y=3x-1$ и $y=3x+1$. Их пересечением является параллелограмм с вершинами в точках $P(0;-1)$, $Q\left(-\frac{3}{4};-\frac{5}{4}\right)$, $R(0;1)$, $S\left(\frac{3}{4};\frac{5}{4}\right)$ (координаты вершин можно найти, решив соответствующие системы линейных уравнений).
   Рассмотрим уравнение $4y+8x=C$, где C – некоторая константа. Оно задаёт прямую на плоскости, причём в любой точке прямой значение выражения $4y+8x$ постоянно и равно C. Если изменить значение C, получится некоторая другая прямая, на которой выражение $4y+8x$ принимает новое значение. Нам необходимо определить максимальное значение C, при котором прямая $4y+8x=C$ пересекает параллелограмм. Несложно видеть, что при увеличении C прямая движется вверх на плоскости, и самое большое C получается, когда прямая проходит через точку S. Это значение равно $4\cdot\frac{3}{4}+8\cdot\frac{5}{4}=11$.

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A=m^2+2mn+n^2-9m-9n$ и $B=m^2n+mn^2-3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

   Ответ: $(3;10)$, $(10;3)$.

   Решение. Число A представимо в виде $A=(m+n)(m+n-9)$. Так как множители имеют разную чётность, A – чётное число. Рассмотрим два случая.
   • Если $A=75q^2$, то так как A чётное, q также должно быть чётным. Кроме того, q – простое число, следовательно, $q=2$. Отсюда получаем $(m+n)^2-9(m+n)-300=0$. Это уравнение является квадратным относительно $m+n$ и не имеет натуральных корней. Значит, первый случай невозможен.
   • Следовательно, $A=13p^2$, и тогда по условию $B=75q^2$. Рассуждая аналогично, получаем, что

$p = 2$. Тогда $(m+n)^2 - 9(m+n) - 52 = 0$, откуда $m+n = -4$ или $m+n = 13$. Подходит только $m+n = 13$, так как числа m и n положительны. Перейдём ко второму равенству

$$mn(m+n) - 3mn = 75q^2.$$

Так как $m+n = 13$, оно упрощается и принимает вид $2mn = 15q^2$. Отсюда q – чётное число, поэтому $q = 2$. Итак, числа m и n удовлетворяют системе

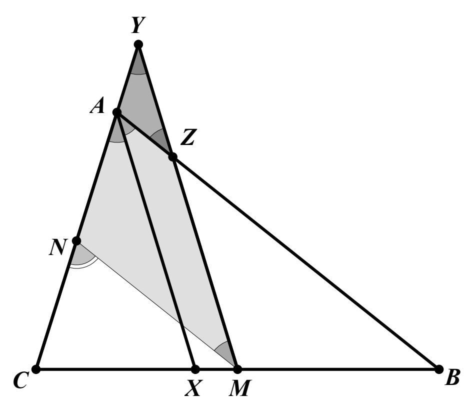
$$\begin{cases} m+n = 13, \\ mn = 30. \end{cases}$$

Её решениями являются пары чисел $(3; 10)$, $(10; 3)$.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

Ответ: $BC = 8\sqrt{21}$.

Решение. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда $\angle BAX = \angle CAX = \alpha$; за счёт параллельности AX и MY получаем $\angle AYZ = \angle CAX = \alpha$, $\angle AZY = \angle BAX = \alpha$. Пусть MN – средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AB. Тогда $\angle NMY = \angle AZY = \alpha$. В треугольниках MNY и AZY есть по два угла, равных α. Значит, они оба равнобедренные и подобны друг другу. Из треугольника AYZ находим, что $\cos\alpha = \frac{YZ}{2 \cdot AZ} = \frac{2}{3}$.



Заметим также, что $\angle CNM = 2\alpha$ (внешний угол треугольника MNY), $CN = \frac{1}{2}AC = 9$; $MN = NY = AN + AY = \frac{AC}{2} + AZ = 15$. Кроме того, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{1}{9}$. По теореме косинусов для треугольника MNC получаем

$$MC^2 = MN^2 + CN^2 - 2MN \cdot CN \cdot \cos 2\alpha = 336.$$

Отсюда $BC = 2MC = 8\sqrt{21}$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+1} - \sqrt{6-y} + 5 = 2\sqrt{6+5x-y^2}, \\ x^4 + 5x^2 - \sqrt{y} = y^4 - \sqrt{x} + 5y^2. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$.

Решение. Запишем второе уравнение системы в виде $x^4+5x^2+\sqrt{x} = y^4+5y^2+\sqrt{y}$. Введя функцию $f(t) = t^4 + 5t^2 + \sqrt{t}$, можем переписать это уравнение в виде $f(x) = f(y)$. Функция f строго

возрастает на всей своей области определения (как сумма трёх возрастающих при $t \geqslant 0$ функций). Отсюда следует, что каждое своё значение она принимает один-единственный раз. Значит, $y = x$. Подставляя y в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{6-x} + 5 = 2\sqrt{6+5x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+1} - \sqrt{6-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+1-2\sqrt{(x+1)(6-x)}+$ $+6-x$, откуда $2\sqrt{6+5x-x^2} = 7-t^2$. Уравнение принимает вид $t+5 = 7-t^2$. Решая его, находим $t = -2$ или $t = 1$. Если $t = 1$, то

$$\sqrt{6-x} + 1 = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow 6 - x + 2\sqrt{6-x} + 1 = x + 1 \Leftrightarrow \sqrt{6-x} = x - 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 - x = (x-3)^2, \\ x - 3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}, \\ x \geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{13}}{2}.$$

Если $t = -2$, то $\sqrt{x+1} + 2 = \sqrt{6-x}$. Левая часть этого уравнения – возрастающая функция, а правая – убывающая. Из второго уравнения следует, что $x \geqslant 0$. Значит, минимальное значение левой части равно $\sqrt{1}+2$, а максимальное значение правой есть $\sqrt{6}$ (оба значения принимаются при $x = 0$). Следовательно, в этом случае решений нет. (Разумеется, можно было решить это уравнение аналогично предыдущему, но мы бы получили корень $x < 0$, не удовлетворяющий системе.) Итак, система имеет единственное решение $\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}; \frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$.

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 8×8 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

   Ответ: 820.

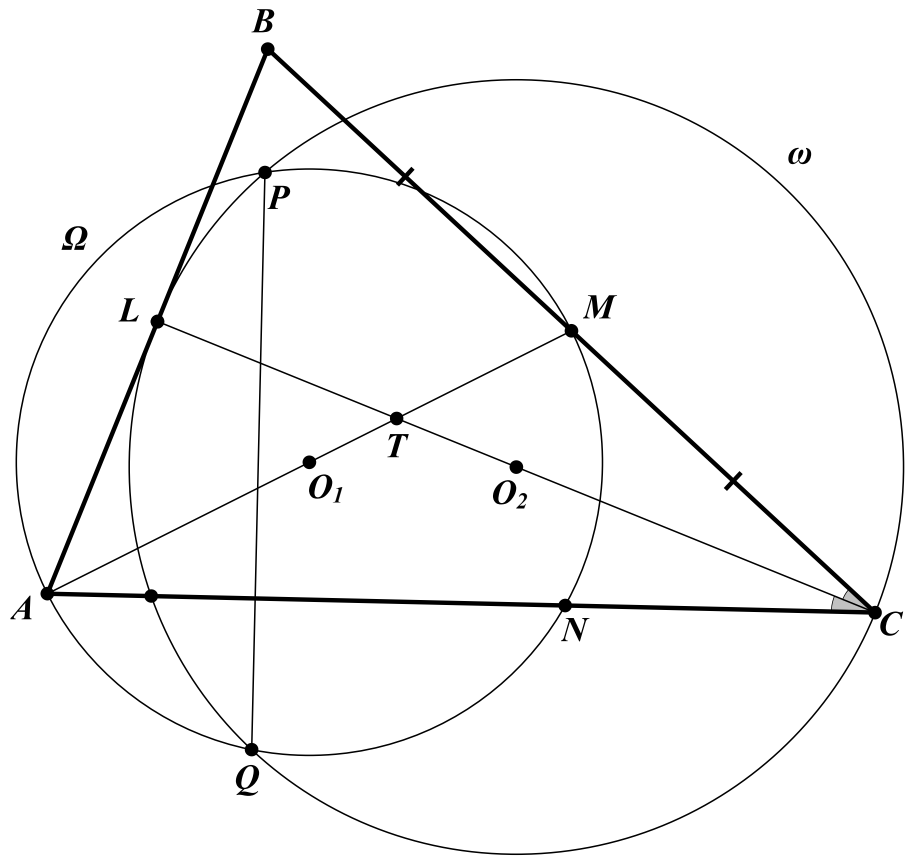
   Решение. Зафиксируем положение квадрата (временно запретим повороты) и перекрасим два его узла. Возможны два случая.

   - В белый цвет покрашены два узла, симметричных относительно центра квадрата.
   - В белый цвет покрашены два узла, не симметричных относительно центра.

   В первом случае раскраска переходит сама в себя при повороте на 180°, но не на 90° т. е. все такие раскраски разбиваются на пары считающихся одинаковыми. Во втором же случае совмещение с самой собой при поворотах на 90°, 180° и 270° не происходит, поэтому любая такая раскраска совмещается с четырьмя другими раскрасками, а всё множество раскрасок во втором случае разбивается на четвёрки считающихся одинаковыми.
   В первом случае количество раскрасок равно $\frac{81-1}{2}$, поскольку достаточно выбрать лишь один узел, не являющийся центральным, и тогда симметричный ему узел определён однозначно. Во втором случае можно брать любые из C_{81}^2 пар узлов, кроме относящихся к первому случаю, т. е. $C_{81}^2 - \frac{81-1}{2}$. В итоге получаем, что количество раскрасок равно $\frac{1}{4}\left(C_{81}^2 - \frac{81-1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{81-1}{2}\right) = 820$.

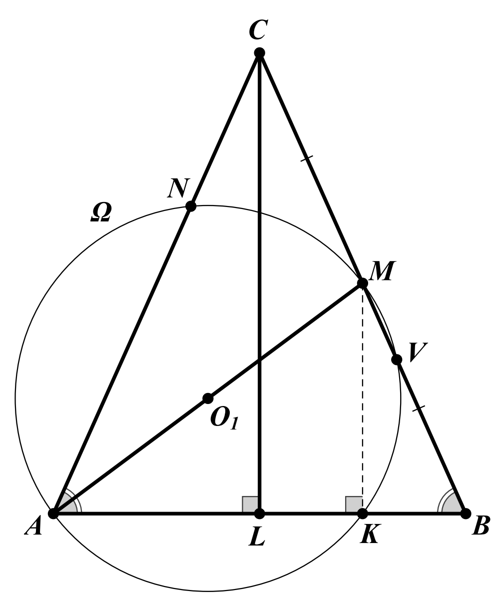
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB = 10$, $AN = 8$.

   Ответ: $AC = BC = 8 + \sqrt{14}$.



Решение. Пусть T – точка пересечения AM и CL, O_1 и O_2 – середины этих отрезков соответственно. Тогда $O_1O_2 \perp PQ$, откуда $AC \parallel O_1O_2$. Треугольники TO_1O_2 и TAC подобны по двум углам. Обозначим $TO_1 = x$, $TO_2 = y$, $k = \frac{AO_1}{TO_1}$. Тогда $TA = (k+1)x$, $TC = (k+1)y$. Поскольку O_1 и O_2 – середины AM и CL, $MT = AO_1 - TO_1 = (k-1)x$, $LT = CO_2 - TO_2 = (k-1)y$, а значит, $LT : TC = MT : TA$, и треугольники LMT и CAT подобны, откуда $LM \parallel AC$. Следовательно, L – середина стороны AB, отрезок CL является в треугольнике ABC медианой и биссектрисой, поэтому треугольник равнобедренный ($AC = BC$).

Пусть окружность Ω пересекает сторону AB в точке K, а сторону BC вторично пересекает в точке V. Угол MKA прямой, поскольку AM – диаметр окружности, поэтому MK – средняя линия треугольника CBL. Отсюда $BK = \frac{AB}{4} = \frac{5}{2}$. Пусть $CM = c$, $VM = t$. Тогда $CA = CB = 2c$, и по теореме о двух секущих получаем



$$CM \cdot CV = CN \cdot CA \;\Leftrightarrow\; (c+t)\cdot c = (2c-8)\cdot 2c;$$

$$BM \cdot BV = BK \cdot BA \;\Leftrightarrow\; (c-t)\cdot c = \frac{5}{2}\cdot 10.$$

Из первого равенства следует, что $t = 3c - 16$. Подставляя во второе равенство, имеем $(16-2c)\cdot c = 25 \Leftrightarrow c = \frac{8\pm\sqrt{14}}{2}$. Отсюда $BC = AC = 2c = 8\pm\sqrt{14}$. Но так как $AC > AN = 8$, подходит только $BC = AC = 8+\sqrt{14}$.

10 КЛАСС. Вариант 6

1. [3 балла] Второй член арифметической прогрессии равен $12-12x$, четвёртый член равен $\left(x^2+4x\right)^2$, а восьмой равен $(-6x^2)$. Найдите x.

   Ответ: $x=-2$, $x=-2\pm\sqrt{6}$.

   Решение. Числа A, B, C являются вторым, четвёртым и восьмым членами арифметической прогрессии соответственно тогда и только тогда, когда они удовлетворяют соотношению $3B=2A+C$ ($a_4=a_2+2d$, $a_8=a_2+6d$). Таким образом, задача сводится к решению уравнения $3\left(x^2+4x\right)^2=-6x^2+2(12-12x)$. Сделав замену $t=x^2-4x$, получаем $3t^2=-6t+24 \Leftrightarrow t^2+2t-8=0$. Данное уравнение имеет корни $t=-4$ и $t=2$. Далее находим значения x:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+4x+4=0, \\ x^2+4x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=-2\pm\sqrt{6}. \end{array}\right.$$

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $10x+5y$ при условии $\begin{cases} |2x-3y|\leqslant 6, \\ |3x-2y|\leqslant 4. \end{cases}$

   Ответ: -74.

   Решение. Данная система неравенств эквивалентна следующим:

$$\begin{cases} -6\leqslant 2x-3y\leqslant 6, \\ -4\leqslant 3x-2y\leqslant 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x}{3}-2\leqslant y\leqslant \frac{2x}{3}+2, \\ \frac{3x}{2}-2\leqslant y\leqslant \frac{3x}{2}+2. \end{cases}$$

   Первое неравенство задаёт полосу между параллельными прямыми $y=\frac{2x}{3}-2$ и $y=\frac{2x}{3}+2$, а второе – полосу между прямыми $y=\frac{3x}{2}-2$ и $y=\frac{3x}{2}+2$. Их пересечением является параллелограмм с вершинами в точках $P(0;-2)$, $Q\left(-\frac{24}{5};-\frac{26}{5}\right)$, $R(0;2)$, $S\left(\frac{24}{5};\frac{26}{5}\right)$ (координаты вершин можно найти, решив соответствующие системы линейных уравнений).
   Рассмотрим уравнение $10x+5y=C$, где C – некоторая константа. Оно задаёт прямую на плоскости, причём в любой точке прямой значение выражения $10x+5y$ постоянно и равно C. Если изменить значение C, получится некоторая другая прямая, на которой выражение $10x+5y$ принимает новое значение. Нам необходимо определить минимальное значение C, при котором прямая $10x+5y=C$ пересекает параллелограмм. Несложно видеть, что при увеличении C прямая движется вверх на плоскости, и самое маленькое C получается, когда прямая проходит через точку Q. Это значение равно $10\cdot\left(-\frac{24}{5}\right)+5\cdot\left(-\frac{26}{5}\right)=-74$.

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A=m^2-4mn+{}$ $+4n^2+13m-26n$ и $B=m^2n-2mn^2-2mn$ равно $17p^2$, а другое равно $15q^2$, где p и q – простые числа.

   Ответ: $(10;3)$.

   Решение. Число A представимо в виде $A=(m-2n)(m-2n+13)$. Так как множители имеют разную чётность, A – чётное число. Рассмотрим два случая.
   Если $A=15q^2$, то так как A чётное, q также должно быть чётным. Кроме того, q – простое число, следовательно, $q=2$. Отсюда получаем $(m-2n)^2+13(m-2n)-60=0$. Это уравнение является квадратным относительно $m-2n$ и не имеет натуральных корней. Значит, первый случай невозможен.
   Следовательно, $A=17p^2$, и тогда по условию $B=15q^2$. Рассуждая аналогично, получаем, что

$p = 2$. Тогда $(m-2n)^2 + 13(m-2n) - 68 = 0$, откуда $m - 2n = -17$ или $m - n = 4$. Перейдём ко второму равенству

$$mn(m-2n) - 2mn = 15q^2.$$

Если $m - 2n = -17$, то $-19mn = 15q^2$, что невозможно, так как левая часть отрицательна, а правая – положительна. Если $m - 2n = 4$, то $2mn = 15q^2$. Отсюда $q = 2$ (так как q – простое). Итак, числа m и n удовлетворяют системе

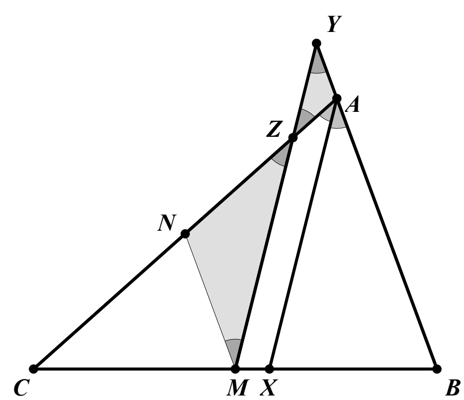
$$\begin{cases} m - n = 4, \\ mn = 30. \end{cases}$$

Её решениями являются пары чисел $(10; 3)$, $(-6; -5)$. Так как m и n натуральные, подходит только первая из этих двух пар.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC = 18$, $AZ = 6$, $YZ = 8$.

Ответ: $BC = 8\sqrt{6}$.

Решение. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда $\angle BAX = \angle CAX = \alpha$; за счёт параллельности AX и MY получаем $\angle AYZ = \angle BAX = \alpha$, $\angle AZY = \angle CAX = \alpha$. Пусть MN – средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AB. Тогда $\angle NMY = \angle BYM = \alpha$. В треугольниках MNZ и AZY есть по два угла, равных α. Значит, они оба равнобедренные и подобны друг другу. Из треугольника AYZ находим, что $\cos\alpha = \frac{YZ}{2\cdot AZ} = \frac{2}{3}$.



Заметим также, что $\angle CNM = 2\alpha$ (внешний угол треугольника MNZ), $CN = \frac{1}{2}AC = 9$; $MN = NZ = AN - AZ = \frac{AC}{2} - AZ = 3$. Кроме того, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{1}{9}$. По теореме косинусов для треугольника MNC получаем

$$MC^2 = MN^2 + CN^2 - 2MN \cdot CN \cdot \cos 2\alpha = 96.$$

Отсюда $BC = 2MC = 8\sqrt{6}$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+4} - \sqrt{3-y} + 5 = 2\sqrt{12 - x - y^2}, \\ 2x^5 + 4x^2 - \sqrt[4]{3y} = 2y^5 - \sqrt[4]{3x} + 4y^2. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}; \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$.

Решение. Запишем второе уравнение системы в виде $2x^5 + 4x^2 + \sqrt[4]{3x} = 2y^5 + 4y^2 + \sqrt[4]{3y}$. Введя функцию $f(t) = 2t^5 + 4t^2 + \sqrt[4]{3t}$, можем переписать это уравнение в виде $f(x) = f(y)$. Функция

f строго возрастает на всей своей области определения (как сумма трёх возрастающих при $t \geqslant 0$ функций). Отсюда следует, что каждое своё значение она принимает один-единственный раз. Значит, $y = x$. Подставляя y в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+4} - \sqrt{3-x} + 5 = 2\sqrt{12 - x - x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+4} - \sqrt{3-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+4-2\sqrt{(x+4)(3-x)}+$ $+3-x$, откуда $2\sqrt{12-x-x^2} = 7-t^2$. Уравнение принимает вид $t+5 = 7-t^2$. Решая его, находим $t = -2$ или $t = 1$. Если $t = 1$, то

$$\sqrt{3-x}+1 = \sqrt{x+4} \Leftrightarrow 3-x+2\sqrt{3-x}+1 = x+4 \Leftrightarrow \sqrt{3-x} = x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = x^2, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}, \\ x \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{13}-1}{2}.$$

Если $t = -2$, то $\sqrt{x+4}+2 = \sqrt{3-x}$. Левая часть этого уравнения – возрастающая функция, а правая – убывающая. Из второго уравнения следует, что $x \geqslant 0$. Значит, минимальное значение левой части равно $\sqrt{4}+2$, а максимальное значение правой есть $\sqrt{3}$ (оба значения принимаются при $x = 0$). Следовательно, в этом случае решений нет. (Разумеется, можно было решить это уравнение аналогично предыдущему, но мы бы получили корень $x < 0$, не удовлетворяющий системе.) Итак, система имеет единственное решение $\left(\frac{\sqrt{13}-1}{2}; \frac{\sqrt{13}-1}{2}\right)$.

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 7×7 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

Ответ: 512.

Решение. Зафиксируем положение квадрата (временно запретим повороты) и перекрасим два его узла. Возможны два случая.

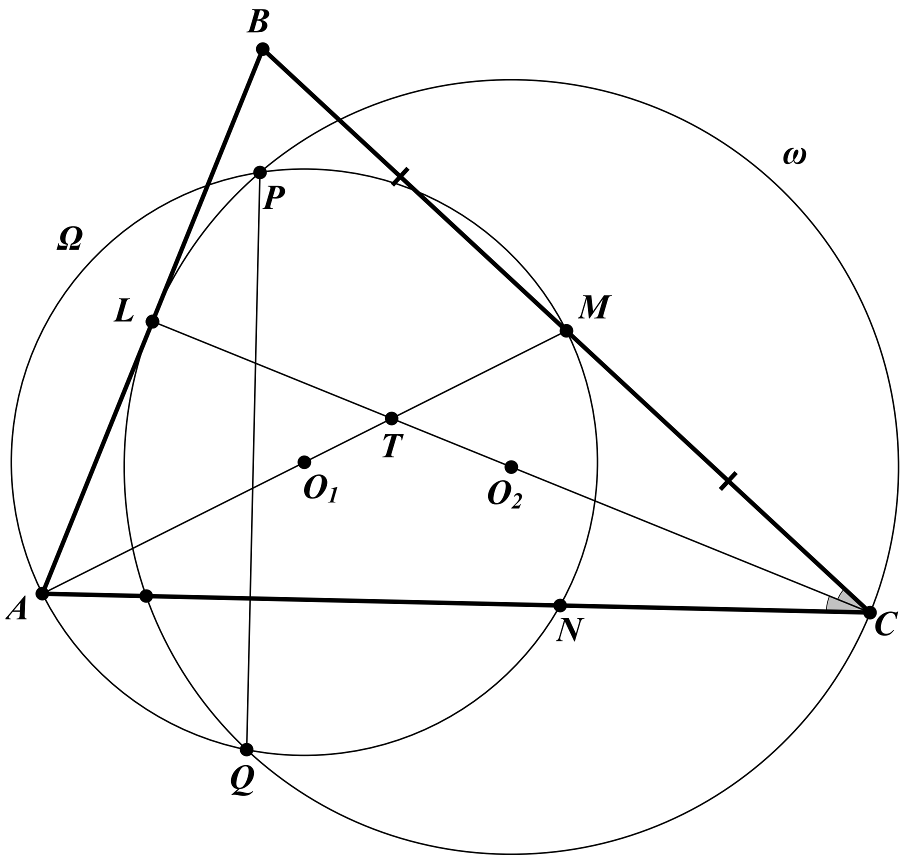
- В белый цвет покрашены два узла, симметричных относительно центра квадрата.
- В белый цвет покрашены два узла, не симметричных относительно центра.

В первом случае раскраска переходит сама в себя при повороте на $180°$, но не на $90°$ т. е. все такие раскраски разбиваются на пары считающихся одинаковыми. Во втором случае совмещение с самой собой при поворотах на $90°$, $180°$ и $270°$ не происходит, поэтому любая такая раскраска совмещается с четырьмя другими раскрасками, а всё множество раскрасок во втором случае разбивается на четвёрки считающихся одинаковыми.

В первом случае количество раскрасок равно $\frac{64}{2}$, поскольку достаточно выбрать лишь один узел, и тогда симметричный ему узел определён однозначно. Во втором случае можно брать любые из C_{64}^2 пар узлов, кроме относящихся к первому случаю, т. е. $C_{64}^2 - \frac{64}{2}$. В итоге получаем, что количество раскрасок равно $\frac{1}{4}\cdot\left(C_{64}^2 - \frac{64}{2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{64}{2} = 512$.

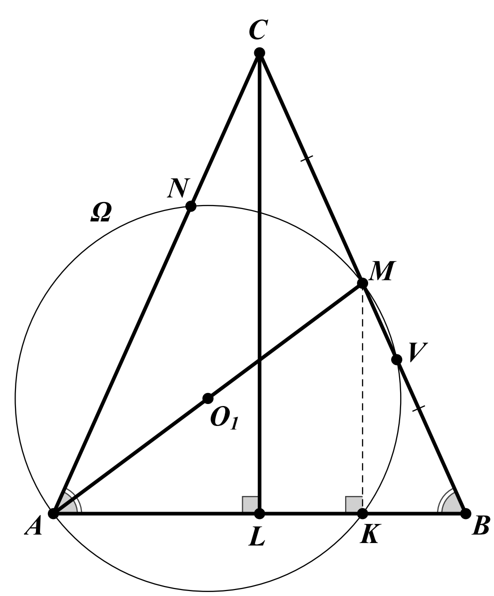
7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB = 6$, $AN = 5$.

Ответ: $AC = BC = 5 + \sqrt{7}$.



Решение. Пусть T – точка пересечения AM и CL, O_1 и O_2 – середины этих отрезков соответственно. Тогда $O_1O_2 \perp PQ$, откуда $AC \parallel O_1O_2$. Треугольники TO_1O_2 и TAC подобны по двум углам. Обозначим $TO_1 = x$, $TO_2 = y$, $k = \frac{AO_1}{TO_1}$. Тогда $TA = (k+1)x$, $TC = (k+1)y$. Поскольку O_1 и O_2 – середины AM и CL, $MT = AO_1 - TO_1 = (k-1)x$, $LT = CO_2 - TO_2 = (k-1)y$, а значит, $LT : TC = MT : TA$, и треугольники LMT и CAT подобны, откуда $LM \parallel AC$. Следовательно, L – середина стороны AB, отрезок CL является в треугольнике ABC медианой и биссектрисой, поэтому треугольник равнобедренный ($AC = BC$).

Пусть окружность Ω пересекает сторону AB в точке K, а сторону BC вторично пересекает в точке V. Угол MKA прямой, поскольку AM – диаметр окружности, поэтому MK – средняя линия треугольника CBL. Отсюда $BK = \frac{AB}{4} = \frac{3}{2}$. Пусть $CM = c$, $VM = t$. Тогда $CA = CB = 2c$, и по теореме о двух секущих получаем



$$CM \cdot CV = CN \cdot CA \Leftrightarrow (c+t) \cdot c = (2c-5) \cdot 2c;$$

$$BM \cdot BV = BK \cdot BA \Leftrightarrow (c-t) \cdot c = \frac{3}{2} \cdot 6.$$

Из первого равенства следует, что $t = 3c - 16$. Подставляя во второе равенство, имеем $(10-2c) \cdot c = 9 \Leftrightarrow c = \frac{5 \pm \sqrt{7}}{2}$. Отсюда $BC = AC = 2c = 5 \pm \sqrt{7}$. Но так как $AC > AN = 5$, подходит только $BC = AC = 5 + \sqrt{7}$.

10 КЛАСС. Вариант 7

1. [3 балла] Четвёртый член арифметической прогрессии равен $6-9x$, шестой член равен $\left(x^2-2x\right)^2$, а десятый равен $9x^2$. Найдите x.

Ответ: $x=1$, $x=1\pm\sqrt{5}$.

Решение. Числа A, B, C являются четвёртым, шестым и десятым членами арифметической прогрессии соответственно тогда и только тогда, когда они удовлетворяют соотношению $3B=2A+C$ ($a_6=a_4+2d$, $a_{10}=a_4+6d$). Таким образом, задача сводится к решению уравнения $3\left(x^2-2x\right)^2=9x^2+2(6-9x)$. Сделав замену $t=x^2-2x$, получаем $3t^2=9t+12 \Leftrightarrow t^2-3t-4=0$. Данное уравнение имеет корни $t=4$ и $t=-1$. Далее находим значения x:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-2x-4=0, \\ x^2-2x+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=1\pm\sqrt{5}. \end{array}\right.$$

2. [4 балла] Найдите наибольшее значение выражения $3y+6x$ при условии $\begin{cases}|x-2y|\leqslant 2 \\ |2x-y|\leqslant 1.\end{cases}$

Ответ: 13.

Решение. Данная система неравенств эквивалентна следующим:

$$\begin{cases} -2\leqslant x-2y\leqslant 2, \\ -1\leqslant x-2y\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2}-1\leqslant y\leqslant \frac{x}{2}+1, \\ 2x-1\leqslant y\leqslant 2x+1. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт полосу между параллельными прямыми $y=\frac{x}{2}-1$ и $y=\frac{x}{2}+1$, а второе – полосу между прямыми $y=2x-1$ и $y=2x+1$. Их пересечением является параллелограмм с вершинами в точках $P(0;-1)$, $Q\left(-\frac{4}{3};-\frac{5}{3}\right)$, $R(0;1)$, $S\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$ (координаты вершин можно найти, решив соответствующие системы линейных уравнений).

Рассмотрим уравнение $3y+6x=C$, где C – некоторая константа. Оно задаёт прямую на плоскости, причём в любой точке прямой значение выражения $3y+6x$ постоянно и равно C. Если изменить значение C, получится некоторая другая прямая, на которой выражение $3y+6x$ принимает новое значение. Нам необходимо определить максимальное значение C, при котором прямая $3y+6x=C$ пересекает параллелограмм. Несложно видеть, что при увеличении C прямая движется вверх на плоскости, и самое большое C получается, когда прямая проходит через точку S. Это значение равно $3\cdot\frac{5}{3}+6\cdot\frac{4}{3}=13$.

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A=m^2+4mn+$ $+4n^2-7m-14n$ и $B=m^2n+2mn^2+9mn$ равно $11p^2$, а другое равно $75q^2$, где p и q – простые числа.

Ответ: $(5;3)$.

Решение. Число A представимо в виде $A=(m+2n)(m+2n-7)$. Так как множители имеют разную чётность, A – чётное число. Рассмотрим два случая.

Если $A=75q^2$, то так как A чётное, q также должно быть чётным. Кроме того, q – простое число, следовательно, $q=2$. Отсюда получаем $(m+2n)^2-7(m+2n)-300=0$. Это уравнение является квадратным относительно $m+2n$ и не имеет натуральных корней. Значит, первый случай невозможен.

Следовательно, $A=11p^2$, и тогда по условию $B=75q^2$. Рассуждая аналогично, получаем, что

$p=2$. Тогда $(m+2n)^2-7(m+2n)-44=0$, откуда $m+2n=-4$ или $m+2n=11$. Подходит только $m+2n=11$, так как числа m и n положительны. Перейдём ко второму равенству

$$mn(m+2n)+9mn=75q^2.$$

Так как $m+2n=11$, оно упрощается и принимает вид $4mn=15q^2$. Отсюда q – чётное число, поэтому $q=2$. Итак, числа m и n удовлетворяют системе

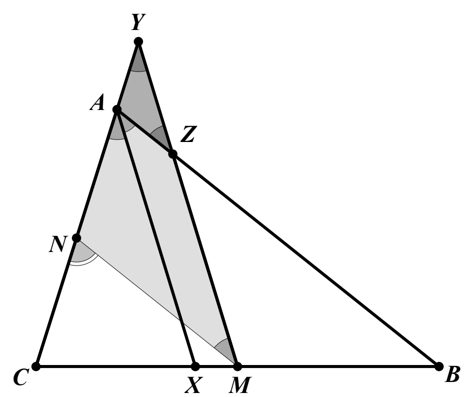
$$\begin{cases} m+2n=11, \\ mn=15. \end{cases}$$

Её решениями являются пары чисел $(5;3)$, $\left(6;\frac{5}{2}\right)$. Так как m и n натуральные, подходит только первая из этих двух пар.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AB и продолжение стороны AC в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC=6$, $AZ=3$, $YZ=4$.

Ответ: $BC=14$.

Решение. Обозначим $\angle BAC=2\alpha$. Тогда $\angle BAX=\angle CAX=\alpha$; за счёт параллельности AX и MY получаем $\angle AYZ=\angle CAX=\alpha$, $\angle AZY=\angle BAX=\alpha$. Пусть MN – средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AB. Тогда $\angle NMY=\angle AZY=\alpha$. В треугольниках MNY и AZY есть по два угла, равных α. Значит, они оба равнобедренные и подобны друг другу. Из треугольника AYZ находим, что $\cos\alpha=\frac{YZ}{2\cdot AZ}=\frac{2}{3}$.



Заметим также, что $\angle CNM=2\alpha$ (внешний угол треугольника MNY), $CN=\frac{1}{2}AC=3$; $MN=NY=AN+AY=\frac{AC}{2}+AZ=6$. Кроме того, $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{1}{9}$. По теореме косинусов для треугольника MNC получаем

$$MC^2=MN^2+CN^2-2MN\cdot CN\cdot\cos 2\alpha=49.$$

Отсюда $BC=2MC=14$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+2}-\sqrt{7-y}+7=2\sqrt{14+5x-y^2}, \\ x^3+3x-\sqrt{2y}=y^3-\sqrt{2x}+3y. \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2};\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$.

Решение. Запишем второе уравнение системы в виде $x^3+3x+\sqrt{2x}=y^3+3y+\sqrt{2y}$. Введя функцию $f(t)=t^3+3t+\sqrt{2t}$, можем переписать это уравнение в виде $f(x)=f(y)$. Функция f строго

возрастает на всей своей области определения (как сумма трёх возрастающих при $t \geqslant 0$ функций). Отсюда следует, что каждое своё значение она принимает один-единственный раз. Значит, $y = x$. Подставляя y в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{7-x} + 7 = 2\sqrt{14+5x-x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+2} - \sqrt{7-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x+2-2\sqrt{(x+2)(7-x)}+ +7-x$, откуда $2\sqrt{14+5x-x^2} = 9-t^2$. Уравнение принимает вид $t+7 = 9-t^2$. Решая его, находим $t = -2$ или $t = 1$. Если $t = 1$, то

$$\sqrt{7-x}+1 = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow 7-x+2\sqrt{7-x}+1 = x+2 \Leftrightarrow \sqrt{7-x} = x-3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7-x = (x-3)^2, \\ x-3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}, \\ x \geqslant 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{17}}{2}.$$

Если $t = -2$, то $\sqrt{x+2}+2 = \sqrt{7-x}$. Левая часть этого уравнения – возрастающая функция, а правая – убывающая. Из второго уравнения следует, что $x \geqslant 0$. Значит, минимальное значение левой части равно $\sqrt{2}+2$, а максимальное значение правой есть $\sqrt{7}$ (оба значения принимаются при $x = 0$). Следовательно, в этом случае решений нет. (Разумеется, можно было решить это уравнение аналогично предыдущему, но мы бы получили корень $x < 0$, не удовлетворяющий системе.) Итак, система имеет единственное решение $\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)$.

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 10×10 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

   Ответ: 1 830.

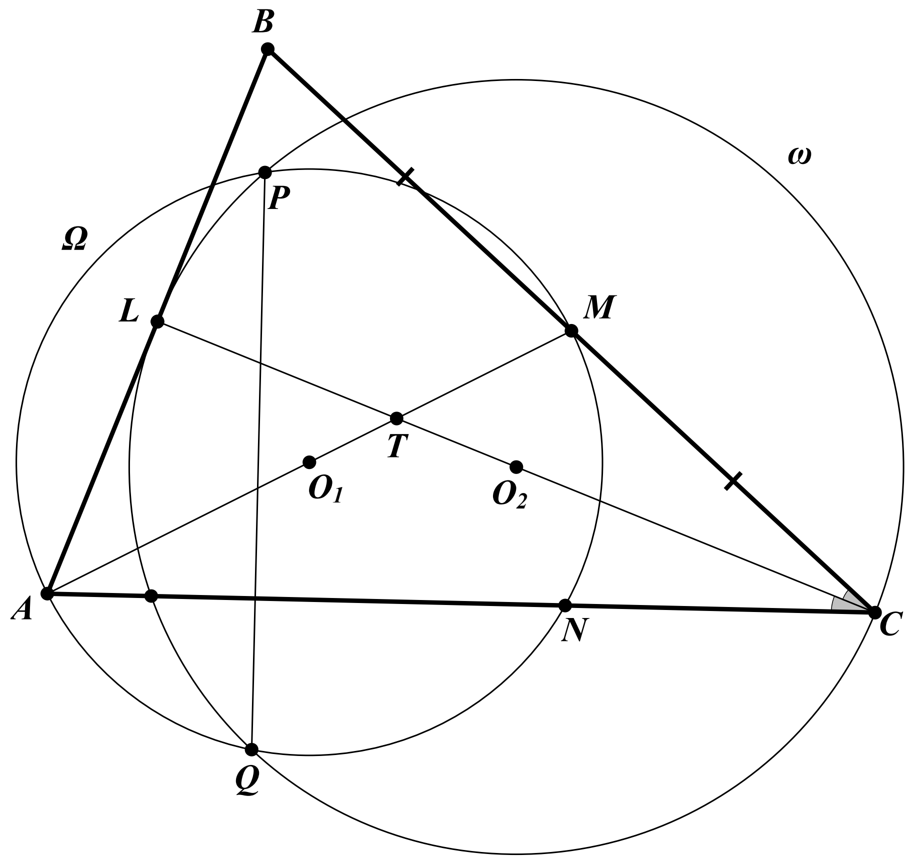
   Решение. Зафиксируем положение квадрата (временно запретим повороты) и перекрасим два его узла. Возможны два случая.

   - В белый цвет покрашены два узла, симметричных относительно центра квадрата.
   - В белый цвет покрашены два узла, не симметричных относительно центра.

   В первом случае раскраска переходит сама в себя при повороте на $180°$, но не на $90°$ т. е. все такие раскраски разбиваются на пары считающихся одинаковыми. Во втором же случае совмещение с самой собой при поворотах на $90°$, $180°$ и $270°$ не происходит, поэтому любая такая раскраска совмещается с четырьмя другими раскрасками, а всё множество раскрасок во втором случае разбивается на четвёрки считающихся одинаковыми.
   В первом случае количество раскрасок равно $\frac{121-1}{2}$, поскольку достаточно выбрать лишь один узел, не являющийся центральным, и тогда симметричный ему узел определён однозначно. Во втором случае можно брать любые из C_{121}^2 пар узлов, кроме относящихся к первому случаю, т. е. $C_{121}^2 - \frac{121-1}{2}$. В итоге получаем, что количество раскрасок равно $\frac{1}{4}\left(C_{121}^2 - \frac{121-1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{121-1}{2}\right) = 1\,830$.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB = 4$, $AN = 5$.

   Ответ: $AC = BC = 5 + \sqrt{17}$.

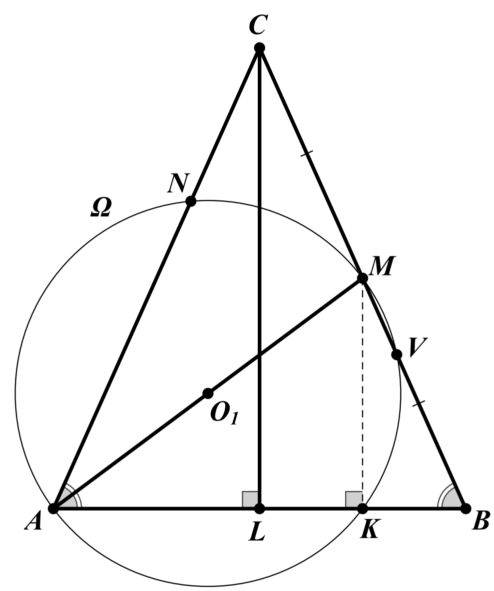


Решение. Пусть T – точка пересечения AM и CL, O_1 и O_2 – середины этих отрезков соответственно. Тогда $O_1O_2 \perp PQ$, откуда $AC \parallel O_1O_2$. Треугольники TO_1O_2 и TAC подобны по двум углам. Обозначим $TO_1 = x$, $TO_2 = y$, $k = \frac{AO_1}{TO_1}$. Тогда $TA = (k+1)x$, $TC = (k+1)y$. Поскольку O_1 и O_2 – середины AM и CL, $MT = AO_1 - TO_1 = (k-1)x$, $LT = CO_2 - TO_2 = (k-1)y$, а значит, $LT : TC = MT : TA$, и треугольники LMT и CAT подобны, откуда $LM \parallel AC$. Следовательно, L – середина стороны AB, отрезок CL является в треугольнике ABC медианой и биссектрисой, поэтому треугольник равнобедренный ($AC = BC$).

Пусть окружность Ω пересекает сторону AB в точке K, а сторону BC вторично пересекает в точке V. Угол MKA прямой, поскольку AM – диаметр окружности, поэтому MK – средняя линия треугольника CBL. Отсюда $BK = \frac{AB}{4} = 1$. Пусть $CM = c$, $VM = t$. Тогда $CA = CB = 2c$, и по теореме о двух секущих получаем

$$CM \cdot CV = CN \cdot CA \ \Leftrightarrow\ (c+t)\cdot c = (2c-5)\cdot 2c;$$
$$BM \cdot BV = BK \cdot BA \ \Leftrightarrow\ (c-t)\cdot c = 1\cdot 4.$$

Из первого равенства следует, что $t = 3c - 10$. Подставляя во второе равенство, имеем $(10-2c)\cdot c = 4 \Leftrightarrow c = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$. Отсюда $BC = AC = 2c = 5\pm\sqrt{17}$. Но так как $AC > AN = 5$, подходит только $BC = AC = 5+\sqrt{17}$.



10 КЛАСС. Вариант 8

1. [3 балла] Пятый член арифметической прогрессии равен $6x+18$, седьмой член равен $(x^2-4x)^2$, а одиннадцатый равен $(-3x^2)$. Найдите x.

Ответ: $x=2$, $x=2\pm\sqrt{7}$.

Решение. Числа A, B, C являются пятым, седьмым и одиннадцатым членами арифметической прогрессии соответственно тогда и только тогда, когда они удовлетворяют соотношению $3B=2A+C$ ($a_7=a_5+2d$, $a_{11}=a_5+6d$). Таким образом, задача сводится к решению уравнения $3\left(x^2-4x\right)^2=-3x^2+2(6x+18)$. Сделав замену $t=x^2-4x$, получаем $3t^2=-3t+36 \Leftrightarrow t^2+t-12=0$. Данное уравнение имеет корни $t=-4$ и $t=3$. Далее находим значения x:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-4x+4=0, \\ x^2-4x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=2\pm\sqrt{7}. \end{array}\right.$$

2. [4 балла] Найдите наименьшее значение выражения $14x+7y$ при условии $\begin{cases} |4x-3y|\leqslant 6, \\ |3x-4y|\leqslant 8. \end{cases}$

Ответ: -146.

Решение. Данная система неравенств эквивалентна следующим:

$$\begin{cases} -6\leqslant 4x-3y\leqslant 6, \\ -8\leqslant 3x-4y\leqslant 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4x}{3}-2\leqslant y\leqslant \frac{4x}{3}+2, \\ \frac{3x}{4}-2\leqslant y\leqslant \frac{3x}{4}+2. \end{cases}$$

Первое неравенство задаёт полосу между параллельными прямыми $y=\frac{4x}{3}-2$ и $y=\frac{4x}{3}+2$, а второе – полосу между прямыми $y=\frac{3x}{4}-2$ и $y=\frac{3x}{4}+2$. Их пересечением является параллелограмм с вершинами в точках $P(0;-2)$, $Q\left(-\frac{48}{7};-\frac{50}{7}\right)$, $R(0;2)$, $S\left(\frac{48}{7};\frac{50}{7}\right)$ (координаты вершин можно найти, решив соответствующие системы линейных уравнений).

Рассмотрим уравнение $14x+7y=C$, где C – некоторая константа. Оно задаёт прямую на плоскости, причём в любой точке прямой значение выражения $14x+7y$ постоянно и равно C. Если изменить значение C, получится некоторая другая прямая, на которой выражение $14x+7y$ принимает новое значение. Нам необходимо определить минимальное значение C, при котором прямая $14x+7y=C$ пересекает параллелограмм. Несложно видеть, что при увеличении C прямая движется вверх на плоскости, и самое маленькое C получается, когда прямая проходит через точку Q. Это значение равно $14\cdot\left(-\frac{48}{7}\right)+7\cdot\left(-\frac{50}{7}\right)=-146$.

3. [5 баллов] Найдите все пары (m,n) натуральных чисел, для которых одно из чисел $A=m^2-2mn+n^2+9m-9n$ и $B=m^2n-mn^2+3mn$ равно $13p^2$, а другое равно $3q^2$, где p и q – простые числа.

Ответ: $(7;3)$.

Решение. Число A представимо в виде $A=(m-n)(m-n+9)$. Так как множители имеют разную чётность, A – чётное число. Рассмотрим два случая.

Если $A=3q^2$, то так как A чётное, q также должно быть чётным. Кроме того, q – простое число, следовательно, $q=2$. Отсюда получаем $(m-n)^2+9(m-n)-12=0$. Это уравнение является квадратным относительно $m-n$ и не имеет натуральных корней. Значит, первый случай невозможен.

Следовательно, $A = 13p^2$, и тогда по условию $B = 3q^2$. Рассуждая аналогично, получаем, что $p = 2$. Тогда $(m-n)^2 + 9(m-n) - 52 = 0$, откуда $m - n = -13$ или $m - n = 4$. Перейдём ко второму равенству

$$mn(m-n) + 3mn = 3q^2.$$

Если $m - n = -13$, то $-10mn = 3q^2$, что невозможно, так как левая часть отрицательна, а правая – положительна. Если $m - n = 4$, то $7mn = 3q^2$. Отсюда $q = 7$ (так как q – простое). Итак, числа m и n удовлетворяют системе

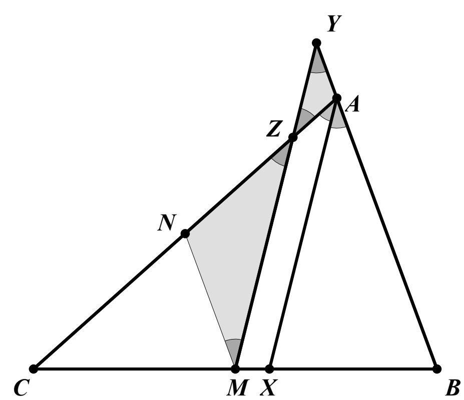
$$\begin{cases} m - n = 4, \\ mn = 21. \end{cases}$$

Её решениями являются пары чисел $(7;3)$, $(-7;-3)$. Так как m и n натуральные, подходит только первая из этих двух пар.

4. [5 баллов] Прямая, параллельная биссектрисе AX треугольника ABC, проходящая через середину M его стороны BC, пересекает сторону AC и продолжение стороны AB в точках Z и Y соответственно. Найдите BC, если $AC = 12$, $AZ = 3$, $YZ = 4$.

Ответ: $BC = 14$.

Решение. Обозначим $\angle BAC = 2\alpha$. Тогда $\angle BAX = \angle CAX = \alpha$; за счёт параллельности AX и MY получаем $\angle AYZ = \angle BAX = \alpha$, $\angle AZY = \angle CAX = \alpha$. Пусть MN – средняя линия треугольника ABC, параллельная стороне AB. Тогда $\angle NMY = \angle BYM = \alpha$. В треугольниках MNZ и AZY есть по два угла, равных α. Значит, они оба равнобедренные и подобны друг другу. Из треугольника AYZ находим, что $\cos\alpha = \frac{YZ}{2\cdot AZ} = \frac{2}{3}$.



Заметим также, что $\angle CNM = 2\alpha$ (внешний угол треугольника MNZ), $CN = \frac{1}{2}AC = 6$; $MN = NZ = AN - AZ = \frac{AC}{2} - AZ = 3$. Кроме того, $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{1}{9}$. По теореме косинусов для треугольника MNC получаем

$$MC^2 = MN^2 + CN^2 - 2MN \cdot CN \cdot \cos 2\alpha = 49.$$

Отсюда $BC = 2MC = 14$.

5. [4 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{x+6} - \sqrt{5-y} + 5 = 2\sqrt{30 - x - y^2}, \\ 4x^4 + x - 5\sqrt[4]{y} = 4y^4 - 5\sqrt[4]{x} + y. \end{cases}$

Ответ: $\left(3\sqrt{2} - \frac{1}{2}; 3\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$.

Решение. Запишем второе уравнение системы в виде $4x^4 + x + 5\sqrt[4]{x} = 4y^4 + y + 5\sqrt[4]{y}$. Введя функцию $f(t) = 4t^4 + t + 5\sqrt[4]{t}$, можем переписать это уравнение в виде $f(x) = f(y)$. Функция f строго

возрастает на всей своей области определения (как сумма трёх возрастающих при $t \geqslant 0$ функций). Отсюда следует, что каждое своё значение она принимает один-единственный раз. Значит, $y = x$. Подставляя y в первое уравнение, получаем

$$\sqrt{x+6} - \sqrt{5-x} + 5 = 2\sqrt{30 - x - x^2}.$$

Обозначим $t = \sqrt{x+6} - \sqrt{5-x}$. Возводя обе части в квадрат, получаем $t^2 = x + 6 - 2\sqrt{(x+6)(5-x)} + 5 - x$, откуда $2\sqrt{30-x-x^2} = 11 - t^2$. Уравнение принимает вид $t + 5 = 11 - t^2$. Решая его, находим $t = -3$ или $t = 2$. Если $t = 2$, то

$$\sqrt{5-x} + 2 = \sqrt{x+6} \Leftrightarrow 5 - x + 4\sqrt{5-x} + 4 = x + 6 \Leftrightarrow 4\sqrt{5-x} = 2x - 3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16(5-x) = (2x-3)^2, \\ 2x - 3 \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1\pm\sqrt{72}}{2}, \\ x \leqslant \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2} - \frac{1}{2}.$$

Если $t = -3$, то $\sqrt{x+6} + 3 = \sqrt{5-x}$. Левая часть этого уравнения – возрастающая функция, а правая – убывающая. Из второго уравнения следует, что $x \geqslant 0$. Значит, минимальное значение левой части равно $\sqrt{6} + 3$, а максимальное значение правой есть $\sqrt{5}$ (оба значения принимаются при $x = 0$). Следовательно, в этом случае решений нет. (Разумеется, можно было решить это уравнение аналогично предыдущему, но мы бы получили корень $x < 0$, не удовлетворяющий системе.) Итак, система имеет единственное решение $\left(3\sqrt{2} - \frac{1}{2}; 3\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)$.

6. [4 балла] На тетрадном листе нарисован квадрат 9×9 клеток (стороны квадрата идут вдоль границ клеток), а все узлы сетки внутри квадрата или на его границе покрашены в чёрный цвет. Найдите количество способов перекрасить два узла в белый цвет, если раскраски, получающиеся друг из друга поворотом, считаются одинаковыми.

Ответ: 1 250.

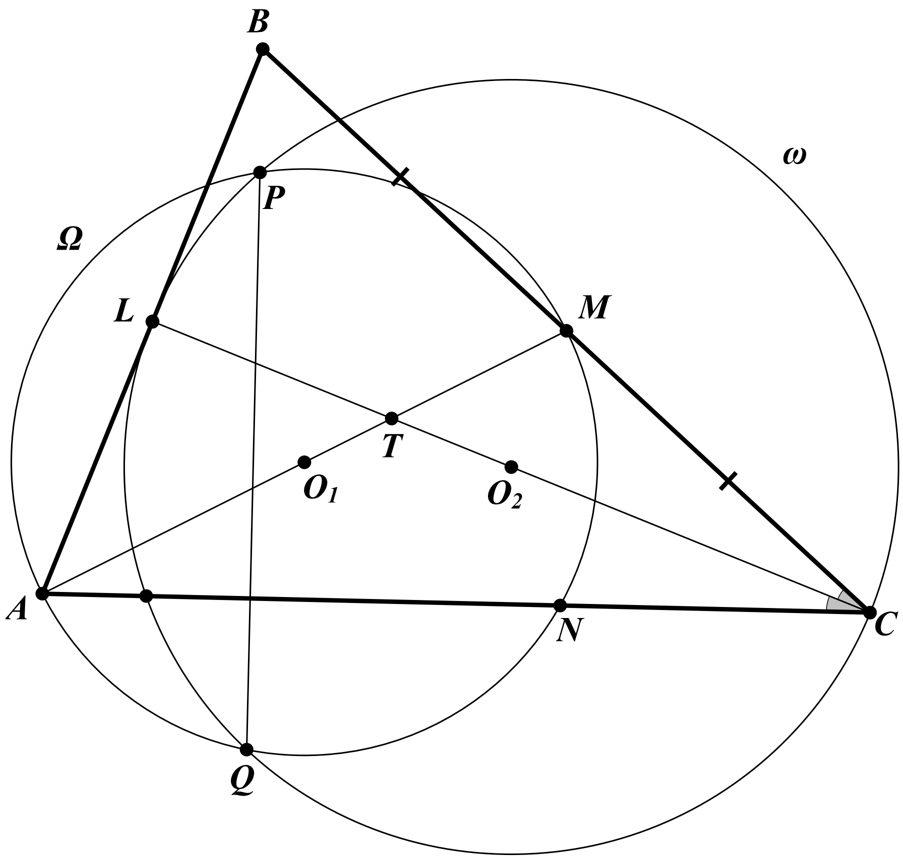
Решение. Зафиксируем положение квадрата (временно запретим повороты) и перекрасим два его узла. Возможны два случая.

- В белый цвет покрашены два узла, симметричных относительно центра квадрата.
- В белый цвет покрашены два узла, не симметричных относительно центра.

В первом случае раскраска переходит сама в себя при повороте на 180°, но не на 90° т. е. все такие раскраски разбиваются на пары считающихся одинаковыми. Во втором случае совмещение с самой собой при поворотах на 90°, 180° и 270° не происходит, поэтому любая такая раскраска совмещается с четырьмя другими раскрасками, а всё множество раскрасок во втором случае разбивается на четвёрки считающихся одинаковыми.
В первом случае количество раскрасок равно $\frac{100}{2}$, поскольку достаточно выбрать лишь один узел, и тогда симметричный ему узел определён однозначно. Во втором случае можно брать любые из C_{100}^2 пар узлов, кроме относящихся к первому случаю, т. е. $C_{100}^2 - \frac{100}{2}$. В итоге получаем, что количество раскрасок равно $\frac{1}{4} \cdot \left(C_{100}^2 - \frac{100}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{2} = 1\,250$.

7. [6 баллов] В треугольнике ABC на медиане AM и биссектрисе CL как на диаметрах построены окружности Ω и ω соответственно, пересекающиеся в точках P и Q. Отрезок PQ параллелен высоте треугольника ABC, проведённой из вершины B. Окружность Ω пересекает сторону AC повторно в точке N. Найдите длины сторон AC и BC, если $AB = 26$, $AN = 20$.

Ответ: $AC = BC = 20 + \sqrt{62}$.

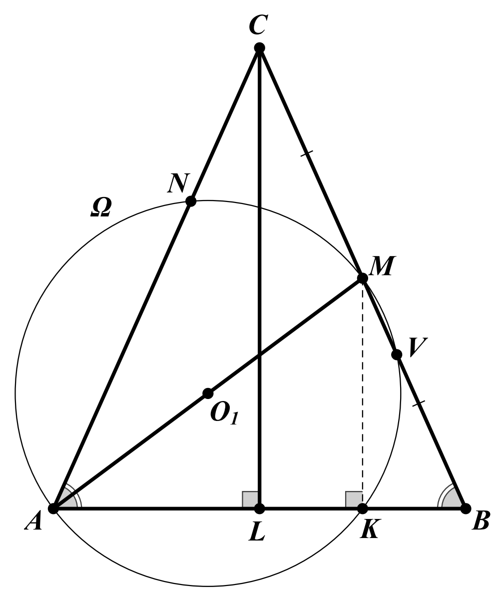


Решение. Пусть T – точка пересечения AM и CL, O_1 и O_2 – середины этих отрезков соответственно. Тогда $O_1O_2 \perp PQ$, откуда $AC \parallel O_1O_2$. Треугольники TO_1O_2 и TAC подобны по двум углам. Обозначим $TO_1 = x$, $TO_2 = y$, $k = \frac{AO_1}{TO_1}$. Тогда $TA = (k+1)x$, $TC = (k+1)y$. Поскольку O_1 и O_2 – середины AM и CL, $MT = AO_1 - TO_1 = (k-1)x$, $LT = CO_2 - TO_2 = (k-1)y$, а значит, $LT : TC = MT : TA$, и треугольники LMT и CAT подобны, откуда $LM \parallel AC$. Следовательно, L – середина стороны AB, отрезок CL является в треугольнике ABC медианой и биссектрисой, поэтому треугольник равнобедренный ($AC = BC$).

Пусть окружность Ω пересекает сторону AB в точке K, а сторону BC вторично пересекает в точке V. Угол MKA прямой, поскольку AM – диаметр окружности, поэтому MK – средняя линия треугольника CBL. Отсюда $BK = \frac{AB}{4} = \frac{13}{2}$. Пусть $CM = c$, $VM = t$. Тогда $CA = CB = 2c$, и по теореме о двух секущих получаем

$$CM \cdot CV = CN \cdot CA \;\Leftrightarrow\; (c+t)\cdot c = (2c-20)\cdot 2c;$$

$$BM \cdot BV = BK \cdot BA \;\Leftrightarrow\; (c-t)\cdot c = \frac{13}{2}\cdot 26.$$



Из первого равенства следует, что $t = 3c - 40$. Подставляя во второе равенство, имеем $(40-2c)\cdot c = 169 \Leftrightarrow c = \frac{20\pm\sqrt{62}}{2}$. Отсюда $BC = AC = 2c = 20\pm\sqrt{62}$. Но так как $AC > AN = 20$, подходит только $BC = AC = 20+\sqrt{62}$.

9 КЛАСС. Вариант 9

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2 + 2\sqrt{3}tx + 4t^2 - 4 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

Ответ: $(-2; -1) \cup (1; 2)$.

Решение. Для того чтобы у уравнения было два корня, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был положителен. Получаем $D = 12t^2 - 16t^2 + 16 = 16 - 4t^2 > 0$, откуда $t^2 < 4$. По теореме Виета произведение корней равно $4t^2 - 4$. По условию требуется, чтобы оно было положительно, поэтому $4t^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow t^2 > 1$. Значит, $1 < t^2 < 4$, то есть $t \in (-2; -1) \cup (1; 2)$.

2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что их сумма равна 40, а значение выражения $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b$ равно $17p^5$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

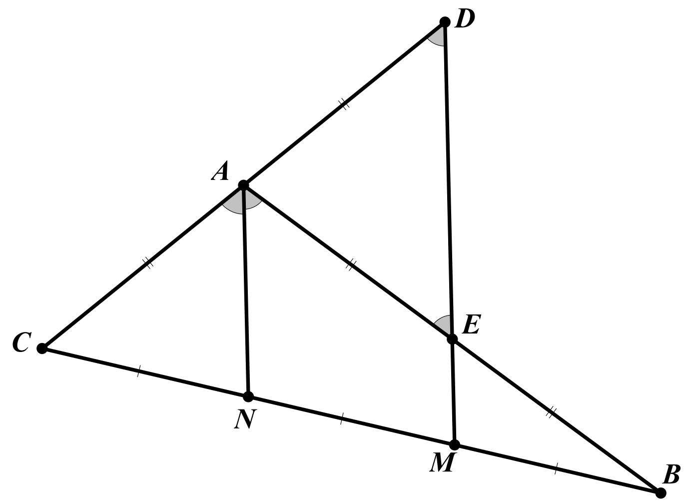
Ответ: $(4; 36)$.

Решение. Данное выражение можно разложить на множители, в результате чего получаем $a^2 - 2ab + b^2 + 15a - 15b = (a - b)(a - b + 15)$ – произведение чисел разной чётности, следовательно, это число чётное. Так как оно равно $17p^5$, число p также чётное. Но по условию p – простое, значит, $p = 2$. Получаем уравнение $(a - b)^2 + 15(a - b) - 17 \cdot 32 = 0$, которое является квадратным относительно $a - b$. Его решения – это $a - b = -32$ и $a - b = 17$.
Так как в условии задано, что сумма $a+b$ равна 40, а числа $a+b$ и $a-b$ имеют одинаковую чётность, подходит только случай $a-b = -32$. Решая получившуюся систему уравнений, находим, что $a = 4$, $b = 36$.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB = CD$. Найдите AB, если $BC = 12$, $\cos(2\angle CAN) = -\frac{1}{4}$.

Ответ: $AB = 4\sqrt{6}$.

Решение. Пусть E – точка пересечения AB и DM. Поскольку $BM = MN = NC$, а $DM \parallel AN$, по теореме Фалеса $AC = AD$ и $AE = EB$. Из равенства $CD = AB$ следует, что $AC = DA = BE = AE$. Обозначим длину любого из этих отрезков через a. Поскольку $AN \parallel EM$ и треугольник AED – равнобедренный, $\angle CAN = \angle EDA = \angle AED = \angle BAN$, поэтому AN – биссектриса треугольника ABC. Значит, $2\angle CAN = \angle CAB$. В треугольнике ABC имеем $BC = 12$, $CA = a$, $AB = 2a$, $\angle CAB = 2\angle CAN$. По теореме косинусов $144 = a^2 + 4a^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow a^2 = 24$. Следовательно, $AB = 2a = 4\sqrt{6}$.



4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят три ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

- он сидит на первой парте в ряду,
- ближайшая парта перед ним пуста,
- за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 8 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

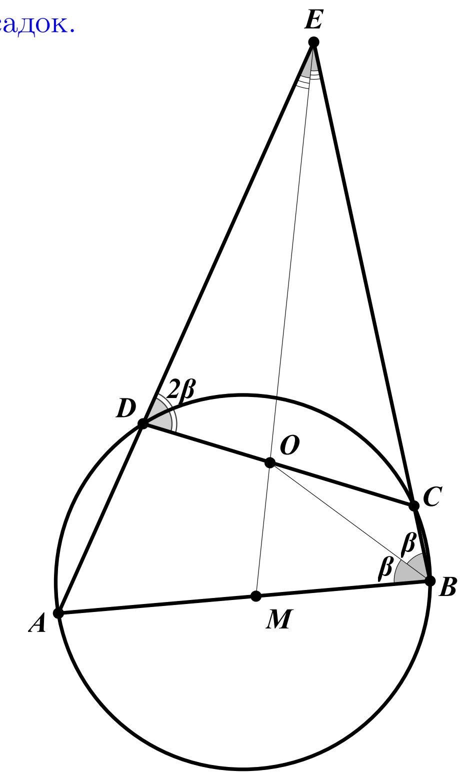
Ответ: $\frac{8!}{(3!)^2} = 6\,720$.

Решение. Первый способ. При любой рассадке учеников в классе одна парта остаётся пустой, а в ряду из подряд стоящих k парт любые k школьников единственным образом могут сесть так, чтобы всем было хорошо видно доску.

Если пустая парта является первой или третьей в каком-либо ряду, то оставшиеся в этом ряду две парты идут подряд, и тогда количество возможных рассадок в классе равно количеству способов разбить 8 человек на три группы: две группы по три человека и одну группу из двух человек. Это количество равно $\frac{8!}{2!\cdot(3!)^2}$. (Например, это количество можно получить так: сначала выбираем трёх человек из восьми, чтобы заполнить первый ряд. После этого выбираем ещё трёх человек из оставшихся пяти для второго ряда. Оставшиеся двое садятся за третий ряд без возможности выбора. Отсюда имеем $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!}$.) Суммарно первых и третьих парт шесть, поэтому полученное число надо умножить на 6.

Если пустая парта стоит в каком-либо ряду второй, то при любом расположении любых двух школьников в этом ряду доска им будет видна хорошо. Тогда количество подходящих рассадок вдвое больше, чем в предыдущем случае, и оно равно $\frac{8!}{(3!)^2}$. Вторых парт три, значит, потребуется умножение на 3.

Всего получаем $6 \cdot \frac{8!}{2!\cdot(3!)^2} + 3 \cdot \frac{8!}{(3!)^2} = 6\frac{8!}{(3!)^2} = 6\,720$ различных рассадок.



Второй способ. При любой рассадке одна парта останется пустой. Ряд, в котором она расположена, выбирается тремя способами. Для каждого из этих трёх случаев между рядами школьники распределяются $C_8^3 \cdot C_5^3$ способами. В ряду с пустой партой любых двух школьников можно четырьмя способами рассадить так, чтобы они оба хорошо видели доску. В остальных рядах рассадка осуществляется единственным способом.

Итого $3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4 = 6\,720$ способов.

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наименьшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 10$.

Ответ: 10.

Решение. Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов составляет $180°$, откуда следует, что $\angle EDO = 180° - \angle ADO = \angle ABC$. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника, поэтому $\angle DEO = \angle BEO$, а точка O лежит на биссектрисе угла B. Пусть биссектриса EO угла AEB пересекает AB в точке M. Треугольники DEO и BEM подобны по двум углам, откуда $\frac{ED}{BE} = \frac{DO}{BM} = \frac{EO}{EM}$. Применяя свойство равных дробей, получаем $\frac{ED+DO}{BE+BM} = \frac{EO}{EM}$, следовательно, $ED + DO = \frac{(BE+BM)\cdot EO}{EM}$.

Известно, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально прилежащим сторонам. Применяя это свойство к треугольнику BEM и биссектрисе BO, получаем

$\frac{BE}{BM} = \frac{EO}{OM}$, откуда $\frac{EO}{EM} = \frac{BE}{BM+BE}$. Окончательно имеем

$$ED + DO = (BE + BM) \cdot \frac{EO}{EM} = (BE + BM) \cdot \frac{BE}{BM + BE} = BE.$$

Таким образом, сумма $ED + DO$ может принимать одно-единственное значение 10.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 3, 4, 5 и 7 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

   Ответ: 17.

   Решение. Сформулируем задачу на языке графов. Имеется дерево, у которого есть четыре вершины со степенями 3, 4, 5 и 7, а остальные вершины – висячие (степени 1). Требуется найти количество вершин в этом дереве.
   Пусть x – количество висячих вершин. Найдем количество рёбер. С одной стороны, оно равно половине от суммы степеней вершин, то есть $\frac{3+4+5+7+x}{2} = \frac{19+x}{2}$. С другой стороны, количество рёбер в дереве на 1 меньше количества вершин. Так как вершин $x+4$, то рёбер $x+3$. Получаем уравнение $\frac{19+x}{2} = x+3$, откуда находим, что $x = 13$. Значит, в дереве $x+4 = 17$ вершин.

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x + 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x + y - 2|} = 1.$$

   Ответ: $(0;1)$, $(0;2)$, $(1;0)$, $(1;2)$, $(2;0)$, $(2;1)$.

   Решение. Поскольку подкоренные выражения должны быть неотрицательными, получаем неравенства

$$\begin{cases} 2x + 2y - x^2 - y^2 \geqslant 0, \\ 1 - |x + y - 2| \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 \leqslant 2, & (1) \\ -1 \leqslant x + y - 2 \leqslant 1. & (2) \end{cases}$$

   На плоскости Oxy неравенство (1) задаёт круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке (1;1), а неравенство (2) – полосу между прямыми $x+y=1$ и $x+y=3$. На пересечении двух этих множеств расположено 7 точек с целочисленными координатами: $(0;1)$, $(0;2)$, $(1;0)$, $(1;1)$, $(1;2)$, $(2;0)$ и $(2;1)$. В этом можно убедиться, например, рассматривая все целочисленные точки в круге (а их всего 9) и подставляя их координаты в неравенство (2). Другой способ – нарисовать чертёж.
   Подставляя эти пары чисел в уравнение, убеждаемся, что только одна из них – $(1;1)$ – ему не удовлетворяет. Остальные 6 пар являются решениями.

9 КЛАСС. Вариант 10

1. [3 балла] Найдите все значения параметра t, при каждом из которых уравнение $x^2 + 4\sqrt{2}tx + 9t^2 - 9 = 0$ имеет два различных действительных корня, а их произведение положительно.

Ответ: $(-3; -1) \cup (1; 3)$.

Решение. Для того, чтобы у уравнения было два корня, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант был положителен. Получаем $D = 32t^2 - 36t^2 + 36 = 36 - 4t^2 > 0$, откуда $t^2 < 9$. По теореме Виета произведение корней равно $9t^2 - 9$. По условию требуется, чтобы оно было положительно, поэтому $9t^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow t^2 > 1$. Значит, $1 < t^2 < 9$, то есть $t \in (-3; -1) \cup (1; 3)$.

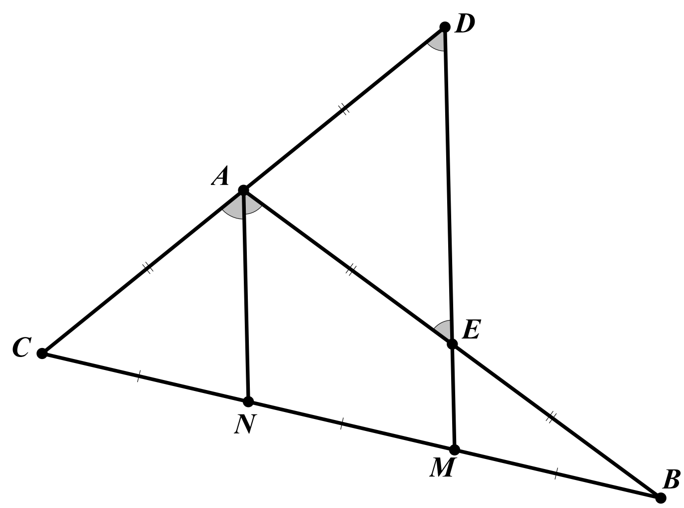
2. [4 балла] Натуральные числа a и b таковы, что $a - b = 12$, а значение выражения $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b$ равно $19p^4$, где p – некоторое простое число. Найдите числа a и b.

Ответ: $(14; 2)$.

Решение. Данное выражение можно разложить на множители, в результате чего получаем $a^2 + 2ab + b^2 + 3a + 3b = (a+b)(a+b+3)$ – произведение чисел разной чётности, следовательно, это число чётное. Так как оно равно $19p^4$, число p также чётное. Но по условию p – простое, значит, $p = 2$. Получаем уравнение $(a+b)^2 + 3(a+b) - 19 \cdot 16 = 0$, которое является квадратным относительно $a + b$. Его решения – это $a + b = -19$ и $a + b = 16$.
Так как в условии задано, что разность $a - b$ равна 12, а числа $a + b$ и $a - b$ имеют одинаковую чётность, подходит только случай $a + b = 16$. Решая получившуюся систему уравнений, находим, что $a = 14$, $b = 2$.

3. [5 баллов] На стороне BC треугольника ABC отмечены точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Прямая, параллельная AN и проходящая через точку M, пересекает продолжение стороны AC за точку A в такой точке D, что $AB = CD$. Найдите AB, если $BC = 6$, $\cos(2\angle CEM) = -\frac{3}{4}$.

Ответ: $AB = 3\sqrt{2}$.



Решение. Пусть E – точка пересечения AB и DM. Поскольку $BM = MN = NC$, а $DM \parallel AN$, по теореме Фалеса $AC = AD$ и $AE = EB$. Из равенства $CD = AB$ следует, что $AC = DA = BE = AE$. Обозначим длину любого из этих отрезков через a. Поскольку $AN \parallel EM$ и треугольник AED – равнобедренный, $\angle CAN = \angle EDA = \angle AED = \angle BAN$, поэтому AN – биссектриса треугольника ABC. Значит, $2\angle CAN = \angle CAB$.
В треугольнике ABC имеем $BC = 6$, $CA = a$, $AB = 2a$, $\angle CAB = 2\angle CAN$. По теореме косинусов $136 = a^2 + 4a^2 - 2 \cdot a \cdot 2a \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow a^2 = 4{,}5$. Следовательно, $AB = 2a = 3\sqrt{2}$.

4. [5 баллов] В классе для занятий иностранным языком стоят четыре ряда парт, в каждом из которых по три парты, расположенных друг за другом. Парта рассчитана на одного человека. Школьник хорошо видит доску в любом из следующих случаев (и только в них):

- он сидит на первой парте в ряду,
- ближайшая парта перед ним пуста,
- за ближайшей партой перед ним сидит ученик меньшего роста.

Сколькими способами можно рассадить в классе 11 учеников группы так, чтобы всем было хорошо видно доску, если известно, что все школьники разного роста? Ответ дайте в виде числа или выражения, содержащего не более двух слагаемых (в слагаемые могут входить факториалы, биномиальные коэффициенты).

Ответ: $8 \cdot \frac{11!}{(3!)^3} = 1\,478\,400$.

Решение. Первый способ. При любой рассадке учеников в классе одна парта остаётся пустой, а в ряду из подряд стоящих k парт любые k школьников единственным образом могут сесть так, чтобы всем было хорошо видно доску.

Если пустая парта является первой или третьей в каком-либо ряду, то оставшиеся в этом ряду две парты идут подряд, и тогда количество возможных рассадок в классе равно количеству способов разбить 8 человек на три группы: две группы по три человека и одну группу из двух человек. Это количество равно $\frac{11!}{2!\cdot(3!)^3}$. (Например, это количество можно получить так: сначала выбираем трёх человек из одиннадцати, чтобы заполнить первый ряд. После этого выбираем ещё трёх человек из оставшихся восьми для второго ряда, далее – трёх из пяти. Оставшиеся двое садятся за третий ряд без возможности выбора. Отсюда имеем $C_{11}^3 C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{11!}{3!8!}\frac{8!}{3!5!} \cdot \frac{5!}{3!2!}$.) Суммарно первых и третьих парт восемь, поэтому полученное число надо умножить на 8.

Если пустая парта стоит в каком-либо ряду второй, то при любом расположении любых двух школьников в этом ряду доска им будет видна хорошо. Тогда количество подходящих рассадок вдвое больше, чем в предыдущем случае, и оно равно $\frac{11!}{(3!)^3}$. Вторых парт четыре, значит, потребуется умножение на 4.

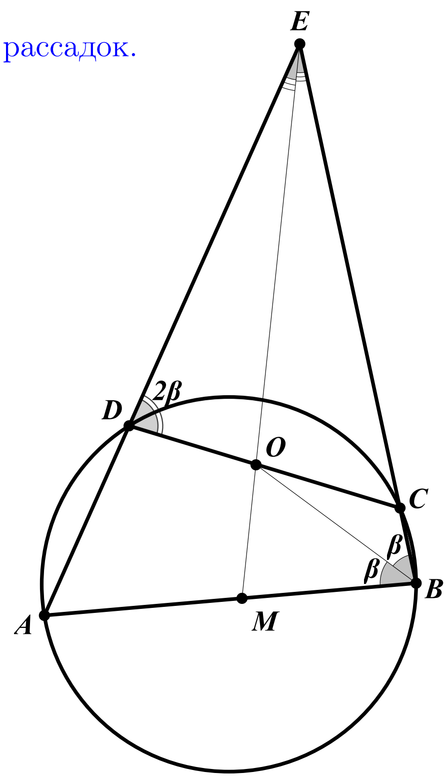
Всего получаем $8 \cdot \frac{11!}{2!\cdot(3!)^3} + 4 \cdot \frac{11!}{(3!)^3} = 8 \cdot \frac{11!}{(3!)^3} = 1\,478\,400$ различных рассадок.

Второй способ. При любой рассадке одна парта останется пустой. Ряд, в котором она расположена, выбирается четырьмя способами. Для каждого из этих четырёх случаев между рядами школьники распределяются $C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3$ способами. В ряду с пустой партой любых двух школьников можно четырьмя способами рассадить так, чтобы они оба хорошо видели доску. В остальных рядах рассадка осуществляется единственным способом.

Итого $4 \cdot C_{11}^3 \cdot C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 4 = 1\,478\,400$ способов.

5. [5 баллов] Продолжение сторон BC (за точку C) и AD (за точку D) вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке E. Центр O окружности, вписанной в треугольник ABE, лежит на отрезке CD. Найдите наибольшее возможное значение суммы $ED + DO$, если известно, что $BE = 12$.

Ответ: 12.



Решение. Так как четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, сумма его противоположных углов составляет $180°$, откуда следует, что $\angle EDO = 180° - \angle ADO = \angle ABC$. Центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника, поэтому $\angle DEO = \angle BEO$, а точка O лежит на биссектрисе угла B. Пусть биссектриса EO угла AEB пересекает AB в точке M. Треугольники DEO и BEM подобны по двум углам, откуда $\frac{ED}{BE} = \frac{DO}{BM} = \frac{EO}{EM}$. Применяя свойство равных дробей, получаем $\frac{ED+DO}{BE+BM} = \frac{EO}{EM}$, следовательно, $ED + DO = \frac{(BE+BM)\cdot EO}{EM}$.

Известно, что биссектриса треугольника делит противоположную сторону пропорционально прилежащим сторонам. Применяя это свойство к треугольнику BEM и биссектрисе BO, получаем

$\frac{BE}{BM} = \frac{EO}{OM}$, откуда $\frac{EO}{EM} = \frac{BE}{BM+BE}$. Окончательно имеем

$$ED + DO = (BE + BM) \cdot \frac{EO}{EM} = (BE + BM) \cdot \frac{BE}{BM + BE} = BE.$$

Таким образом, сумма $ED + DO$ может принимать одно-единственное значение 12.

6. [4 балла] На острове расположено несколько деревень. Между некоторыми деревнями проложены дороги. Известно, что из любой деревни в любую другую можно добраться, причём по единственному маршруту. Также известно, что есть четыре деревни, из которых выходят 5, 6, 7 и 9 дорог соответственно, а из остальных деревень выходит ровно по одной дороге. Сколько деревень может быть на острове?

   Ответ: 25.

   Решение. Сформулируем задачу на языке графов. Имеется дерево, у которого есть четыре вершины со степенями 5, 6, 7 и 9, а остальные вершины – висячие (степени 1). Требуется найти количество вершин в этом дереве.
   Пусть x – количество висячих вершин. Найдем количество рёбер. С одной стороны, оно равно половине от суммы степеней вершин, то есть $\frac{5+6+7+9+x}{2} = \frac{27+x}{2}$. С другой стороны, количество рёбер в дереве на 1 меньше количества вершин. Так как вершин $x + 4$, то рёбер $x + 3$. Получаем уравнение $\frac{27+x}{2} = x + 3$, откуда находим, что $x = 21$. Значит, в дереве $x + 4 = 25$ вершин.

7. [5 баллов] Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2x - 2y - x^2 - y^2} + \sqrt{1 - |x - y - 1|} = 2.$$

   Ответ: $(0; -1)$, $(1; 0)$.

   Решение. Поскольку подкоренные выражения должны быть неотрицательными, получаем неравенства

$$\begin{cases} 2x - 2y - x^2 - y^2 \geqslant 0, \\ 1 - |x - y - 1| \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+1)^2 \leqslant 2, & (1) \\ -1 \leqslant y - x + 1 \leqslant 1. & (2) \end{cases}$$

   На плоскости Oxy неравенство (1) задаёт круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке (1;-1), а неравенство (2) – полосу между прямыми $y = x - 2$ и $y = x$. На пересечении двух этих множеств расположено 7 точек с целочисленными координатами: $(0; -2), (0; -1), (0; 0), (1; -1), (1; 0), (2; 0)$ и $(2; 1)$. В этом можно убедиться, например, рассматривая все целочисленные точки в круге (а их всего 9) и подставляя их координаты в неравенство (2). Другой способ – нарисовать чертёж.
   Подставляя эти пары чисел в уравнение, убеждаемся, что только две из них – $(1; 0)$ и $(0; -1)$ – ему удовлетворяет. Остальные 4 пары не являются решениями.

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 143°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

Ответ: 18.

Решение. Сумма углов n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$. С другой стороны, по формуле суммы арифметической прогрессии она же равна $\frac{n}{2}(2 \cdot 143^\circ + (n-1) \cdot 2^\circ)$. Приравняв эти выражения, получаем $180(n-2) = n(n+142)$, что равносильно уравнению $(n-18)(n-20) = 0$, откуда $n = 18$ либо $n = 20$. Остаётся заметить, что значение $n = 20$ не подходит, поскольку в этом случае наибольший угол был бы равен 181°, что невозможно для выпуклого многоугольника.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 16 + y \ln 8 + z \ln 24 = \ln 6$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

Ответ: 6.

Решение. Данное равенство можно записать в виде

$$\ln 16^x + \ln 8^y + \ln 24^z = \ln 6 \Leftrightarrow \ln\left(16^x \cdot 8^y \cdot 24^z\right) = \ln 6 \Leftrightarrow 2^{4x} \cdot 2^{3y} \cdot 2^{3z} \cdot 3^z = 2 \cdot 3.$$

Так как x, y, z – целые числа, можно приравнять показатели степеней двойки и тройки в левой и правой частях равенства, откуда $4x + 3y + 3z = 1$, $z = 1$. Подставляя z в первое уравнение, получаем $4x + 3y = -2$. Отсюда $y = -x - \frac{x+2}{3}$. Так как x и y – целые числа, это означает, что дробь $\frac{x+2}{3}$ также должна принимать целое значение. Пусть $\frac{x+2}{3} = k$. Тогда $x = 3k - 2$, $y = 2 - 4k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Значит $x^2 + y^2 + z^2 = 25k^2 - 28k + 9$. Это квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями вверх. Вершина параболы имеет абсциссу $k_0 = \frac{14}{25}$. С учётом того, что k может принимать только целочисленные значения, минимум функции достигается в точке, ближайшей к вершине параболы, то есть при $k = 1$. Минимальное значение равно 6.

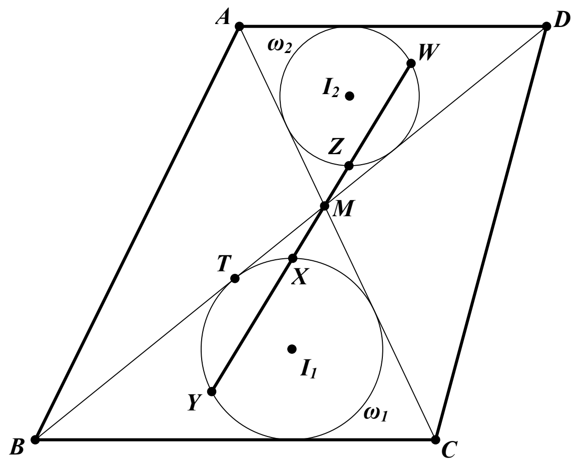
3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 792$.

Ответ: $\{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$.

Решение. Пусть данные 7 чисел – это a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, $a+5$, $a+6$. Их сумма равна $7a+21$. Сумма шести чисел из этого набора может принимать следующие значения: $6a+15$, $6a+16$, $6a+17$, $6a+18$, $6a+19$, $6a+20$, $6a+21$. Из них простыми могут быть только $6a+17$ и $6a+19$ (остальные числа не являются простыми, так как представимы в виде $6a+15 = 3(2a+5)$, $6a+16 = 2(3a+8)$, $6a+18 = 6(a+3)$, $6a+20 = 2(3a+10)$, $6a+21 = 3(2a+7)$).
Таким образом, $(6a+19)^2 - (6a+17)^2 = 792$. Отсюда $a = 30$. Значит, $M = \{30, 31, 32, 33, 34, 35, 36\}$.
Непосредственным подсчётом проверяем, что среди интересующих нас сумм и правда есть два простых числа.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 13/2$, а $MZ \cdot MY = 5$.

Ответ: $\frac{\sqrt{79}}{3}$.



Решение. Треугольники BCM и DAM подобны по двум углам, а коэфициент подобия равен $\frac{BC}{AD} = 2$. Пусть r – радиус окружности ω_1. Тогда из подобия следует, что радиус окружности ω_2 равен $\frac{r}{2}$. Также из подобия следует, что $\frac{1}{2} = \frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY}$. Отсюда $MZ \cdot MY = \frac{1}{2} MX \cdot MY$. По теореме о касательной и секущей $MX \cdot MY = MT^2$. По теореме Пифагора для треугольника I_1MT получаем $MT^2 = MI_1^2 - r^2$. Так как отношение отрезков MI_1 и MI_2 равно коэффициенту подобия треугольников, отсюда следует, что $MI_1 = \frac{2}{3} I_1I_2$. Используя все полученные выше соотношения, имеем $MZ \cdot MY = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9} I_1I_2^2 - r^2\right)$, откуда мгновенно следует, что $r^2 = \frac{4}{9} I_1I_2^2 - 2 \cdot MZ \cdot MY = \frac{79}{9}$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\frac{3\pi}{14}$ или $4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}$?

Ответ: первое число больше.

Чтобы сравнить два числа, рассмотрим их разность $\Delta = \left(5 - 4\sin\frac{3\pi}{14}\right) - \left(4\cos\frac{\pi}{7} - 5\sin\frac{\pi}{14}\right)$. Обозначая $-\frac{\pi}{14} = x$, можем переписать $\Delta = 4\sin 3x + 5 - 4\cos 2x - 5\sin x$. С помощью формулы синуса тройного угла и косинуса двойного угла эту разность можно привести к виду

$$4\sin 3x + 5 - 4\cos 2x - 5\sin x = -16\sin^3 x + 8\sin^2 x + 7\sin x + 1.$$

Сделаем замену $\sin x = t$ и докажем, что функция $f(t) = -16t^3 + 8t^2 + 7t + 1$ неотрицательна на отрезке $[-1, 1]$. В самом деле, $f(-1) > 0$, $f(1) = 0$, а производная $f'(t) = -48t^2 + 16t + 7$ равна нулю в точках $t = \frac{7}{12}$ и $t = -\frac{1}{4}$, причём $t = \frac{7}{12}$ – точка максимума, а $t = -\frac{1}{4}$ – точка минимума, в которой принимается значение $f\left(-\frac{1}{4}\right) = 0$. Так как значение $\sin\frac{-\pi}{14}$ отлично от 1 и от $-\frac{1}{4}$, получаем, что $\Delta > 0$, поэтому первое число больше второго.

6. [4 балла] Даны 12 точек: 7 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 5 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках? (Пирамиды считаются различными, если их множества вершин различны.)

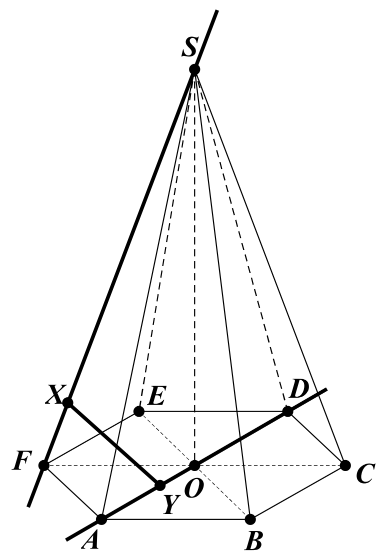
Ответ: 780.

Решение. Если пирамида является тетраэдром, то достаточно выбрать любые 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Это можно сделать $C_{12}^4 - C_7^4 = 495 - 35 = 460$ способами (вычитаются случаи, когда все 4 точки лежат в плоскости α).
Если в основании пирамиды лежит многоугольник, имеющий хотя бы 4 вершины, то это основание лежит в плоскости α. Количество способов выбрать такой многоугольник равно количеству способов выбрать любое подмножество из заданных точек плоскости α, состоящее хотя бы из четырёх

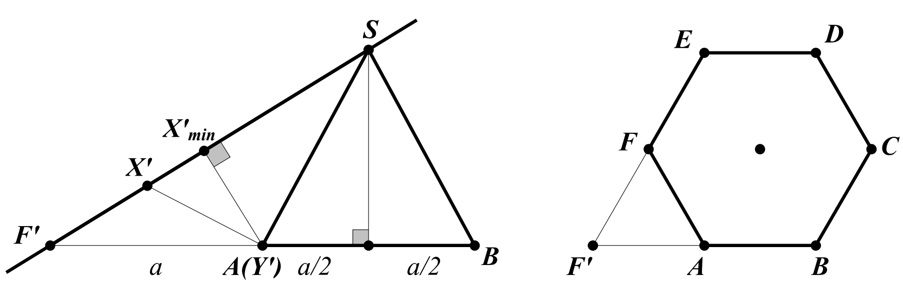
элементов, то есть $C_7^4+C_7^5+C_7^6+C_7^7=35+21+7+1=64$. Вершину можно выбрать 5 способами, поэтому количество таких пирамид есть $5\cdot 64=320$.
В итоге получаем $460+320=780$ способов.

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 2 и боковым ребром 4. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

Ответ: $\sqrt{\frac{5}{2}}$.



Решение. Пусть сторона основания пирамиды равна a, боковое ребро равно b, а $\angle SAB=\alpha$. Проводя высоту равнобедренного треугольника ABS на основание AB, находим, что $\cos\alpha=\frac{AB}{2AS}=$ $=\frac{a}{2b}$. Отсюда $\sin^2\alpha=1-\left(\frac{a}{2b}\right)^2=\frac{4b^2-a^2}{4b^2}$ и $\sin\alpha=\frac{1}{2b}\sqrt{4b^2-a^2}$.
Спроектируем прямые AD и SF на плоскость SAB параллельно прямой AD. Так как отрезок XY параллелен плоскости проекции, длина его проекции $X'Y'$ равна длине отрезка XY. Задача свелась к нахождению расстояния ρ от точки Y' до прямой SF', где F' – проекция точки F. Получаем



$$\rho=\frac{2S_{F'Y'S}}{F'S};$$
$$F'S^2=a^2+b^2-2ab\cos\left(180^\circ-\alpha\right)=a^2+b^2+2ab\cdot\frac{a}{2b}=2a^2+b^2;$$
$$2S_{F'Y'S}=ab\sin\alpha=\frac{a}{2}\sqrt{4b^2-a^2}.$$

Значит, $\rho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4b^2-a^2}{2a^2+b^2}}$. Подставляя сюда $a = 2$, $b = 4$, находим, что $\rho = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

11 КЛАСС. Вариант 12

1. [3 балла] Углы выпуклого многоугольника образуют арифметическую прогрессию, имеющую разность 2° и начинающуюся с угла 132°. Какое наибольшее число вершин может быть у такого многоугольника?

Ответ: 9.

Решение. Сумма углов n-угольника равна $180^\circ \cdot (n-2)$. С другой стороны, по формуле суммы арифметической прогрессии она же равна $\frac{n}{2}(2 \cdot 132^\circ + (n-1) \cdot 2^\circ)$. Приравняв эти выражения, получаем $180(n-2) = n(n+131)$, что равносильно уравнению $(n-18)(n-20) = 0$, откуда $n = 9$ либо $n = 40$. Остаётся заметить, что значение $n = 40$ не подходит, поскольку в этом случае наибольший угол был бы равен 210°, что невозможно для выпуклого многоугольника.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x \ln 25 + y \ln 75 + z \ln 125 = \ln 45$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2 + y^2 + z^2$.

Ответ: 5.

Решение. Данное равенство можно записать в виде

$$\ln 25^x + \ln 75^y + \ln 125^z = \ln 45 \;\Leftrightarrow\; \ln\left(25^x \cdot 75^y \cdot 125^z\right) = \ln 45 \;\Leftrightarrow 5^{2x} \cdot 3^y \cdot 5^{2y} \cdot 5^{3z} = 3^2 \cdot 5.$$

Так как x, y, z – целые числа, можно приравнять показатели степеней двойки и тройки в левой и правой частях равенства, откуда $2x + 2y + 3z = 1$, $y = 2$. Подставляя z в первое уравнение, получаем $2x + 3z = -3$. Отсюда $x = -z - 1 + \frac{-z-1}{2}$. Так как x и z – целые числа, это означает, что дробь $\frac{-z-1}{2}$ также должна принимать целое значение. Пусть $\frac{-z-1}{2} = k$. Тогда $x = 3k$, $z = -1 - 2k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Значит $x^2 + y^2 + z^2 = 13k^2 + 4k + 5$. Это квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями вверх. Вершина параболы имеет абсциссу $k_0 = -\frac{2}{13}$. С учётом того, что k может принимать только целочисленные значения, минимум функции достигается в точке, ближайшей к вершине параболы, то есть при $k = 0$. Минимальное значение равно 5.

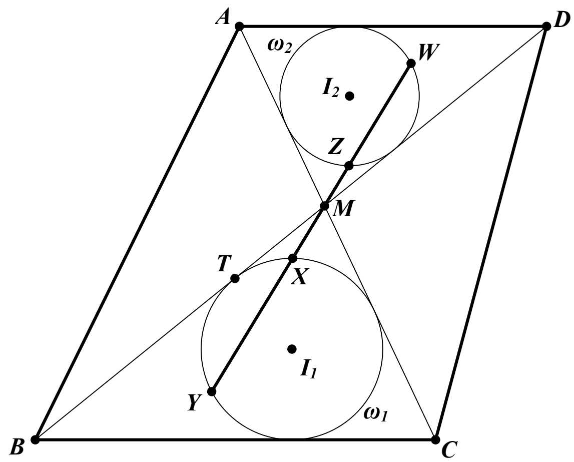
3. [4 балла] Из множества M, состоящего из семи подряд идущих натуральных чисел, выбираются шестёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из шестёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 1080$.

Ответ: $\{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$.

Решение. Пусть данные 7 чисел – это a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$, $a+5$, $a+6$. Их сумма равна $7a+21$. Сумма шести чисел из этого набора может принимать следующие значения: $6a+15$, $6a+16$, $6a+17$, $6a+18$, $6a+19$, $6a+20$, $6a+21$. Из них простыми могут быть только $6a+17$ и $6a+19$ (остальные числа не являются простыми, так как представимы в виде $6a+15 = 3(2a+5)$, $6a+16 = 2(3a+8)$, $6a+18 = 6(a+3)$, $6a+20 = 2(3a+10)$, $6a+21 = 3(2a+7)$).
Таким образом, $(6a+19)^2 - (6a+17)^2 = 1080$. Отсюда $a = 42$. Значит, $M = \{42, 43, 44, 45, 46, 47, 48\}$. Непосредственным подсчётом проверяем, что среди интересующих нас сумм и правда есть два простых числа.

4. [5 баллов] Диагонали BD и AC трапеции $ABCD$ пересекаются в точке M, а отношение оснований $AD : BC = 1 : 2$. Точки I_1 и I_2 – центры окружностей ω_1 и ω_2, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно. Прямая, проходящая через точку M, пересекает ω_1 в точках X и Y, а ω_2 – в точках Z и W (X и Z находятся ближе к M). Найдите радиус окружности ω_1, если $I_1I_2 = 8$, а $MZ \cdot MY = 9$.

Ответ: $\frac{\sqrt{94}}{3}$.



Решение. Треугольники BCM и DAM подобны по двум углам, а коэфициент подобия равен $\frac{BC}{AD} = 2$. Пусть r – радиус окружности ω_1. Тогда из подобия следует, что радиус окружности ω_2 равен $\frac{r}{2}$. Также из подобия следует, что $\frac{1}{2} = \frac{MZ}{MX} = \frac{MW}{MY}$. Отсюда $MZ \cdot MY = \frac{1}{2} MX \cdot MY$. По теореме о касательной и секущей $MX \cdot MY = MT^2$. По теореме Пифагора для треугольника I_1MT получаем $MT^2 = MI_1^2 - r^2$. Так как отношение отрезков MI_1 и MI_2 равно коэффициенту подобия треугольников, отсюда следует, что $MI_1 = \frac{2}{3} I_1I_2$. Используя все полученные выше соотношения, имеем $MZ \cdot MY = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9} I_1I_2^2 - r^2\right)$, откуда мгновенно следует, что $r^2 = \frac{4}{9} I_1I_2^2 - 2 \cdot MZ \cdot MY = \frac{94}{9}$.

5. [5 баллов] Что больше: $5 - 4\sin\frac{9\pi}{14}$ или $3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}$?

Ответ: первое число больше.

Чтобы сравнить два числа, рассмотрим их разность $\Delta = \left(5 - 4\sin\frac{9\pi}{14}\right) - \left(3\sin\frac{3\pi}{14} - 4\cos\frac{3\pi}{7}\right)$. Обозначая $\frac{3\pi}{14} = x$, можем переписать $\Delta = 5 - 4\sin 3x + 4\cos 2x - 3\sin x$. С помощью формулы синуса тройного угла и косинуса двойного угла эту разность можно привести к виду

$$-4\sin 3x + 4\cos 2x - 3\sin x + 5 = 16\sin^3 x - 8\sin^2 x - 15\sin x + 9.$$

Сделаем замену $\sin x = t$ и докажем, что функция $f(t) = 16t^3 - 8t^2 - 15t + 9$ неотрицательна на отрезке $[-1, 1]$. В самом деле, $f(-1) = 0$, $f(1) > 0$, а производная $f'(t) = 48t^2 - 16t - 15$ равна нулю в точках $t = \frac{3}{4}$ и $t = -\frac{5}{12}$, причём $t = -\frac{5}{12}$ – точка максимума, а $t = \frac{3}{4}$ – точка минимума, в которой принимается значение $f\left(\frac{3}{4}\right) = 0$. Так как значение $\sin\frac{3\pi}{14}$ отлично от -1 и от $\frac{3}{4}$, получаем, что $\Delta > 0$, поэтому первое число больше второго.

6. [4 балла] Даны 12 точек: 8 из них лежат на одной окружности в плоскости α, а остальные 4 расположены вне плоскости α. Известно, что если четыре точки из всех 12 лежат в одной плоскости, то эта плоскость – α. Сколько существует выпуклых пирамид с вершинами в данных точках? (Пирамиды считаются различными, если их множества вершин различны.)

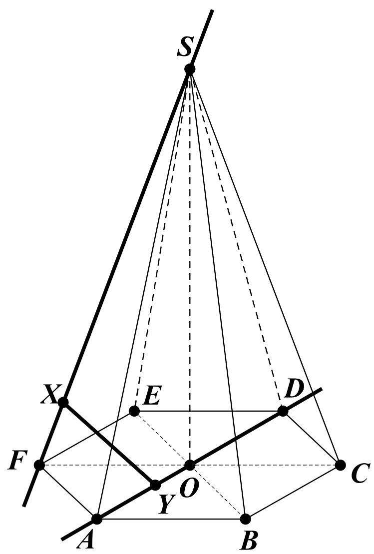
Ответ: 1 077.

Решение. Если пирамида является тетраэдром, то достаточно выбрать любые 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Это можно сделать $C_{12}^4 - C_8^4 = 495 - 70 = 425$ способами (вычитаются случаи, когда все 4 точки лежат в плоскости α).
Если в основании пирамиды лежит многоугольник, имеющий хотя бы 4 вершины, то это основание лежит в плоскости α. Количество способов выбрать такой многоугольник равно количеству способов выбрать любое подмножество из заданных точек плоскости α, состоящее хотя бы из четырёх

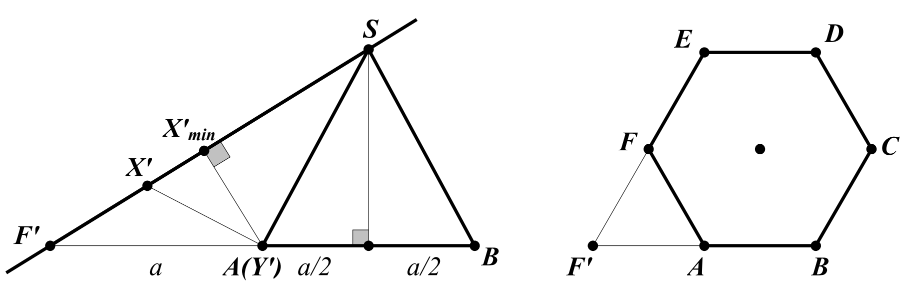
элементов, то есть $C_8^4+C_8^5+C_8^6+C_8^7+C_8^8=70+56+28+8+1=163$. Вершину можно выбрать 4 способами, поэтому количество таких пирамид есть $4\cdot 163=652$.
В итоге получаем $425+652=1\,077$ способов.

7. [6 баллов] Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S – вершина) со стороной основания 1 и боковым ребром $\sqrt{2}$. Точка X лежит на прямой SF, точка Y – на прямой AD, причём отрезок XY параллелен плоскости SAB (или лежит в ней). Найдите наименьшую возможную длину отрезка XY.

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{4}$.



Решение. Пусть сторона основания пирамиды равна a, боковое ребро равно b, а $\angle SAB=\alpha$. Проводя высоту равнобедренного треугольника ABS на основание AB, находим, что $\cos\alpha=\frac{AB}{2AS}=$ $=\frac{a}{2b}$. Отсюда $\sin^2\alpha=1-\left(\frac{a}{2b}\right)^2=\frac{4b^2-a^2}{4b^2}$ и $\sin\alpha=\frac{1}{2b}\sqrt{4b^2-a^2}$.
Спроектируем прямые AD и SF на плоскость SAB параллельно прямой AD. Так как отрезок XY параллелен плоскости проекции, длина его проекции $X'Y'$ равна длине отрезка XY. Задача свелась к нахождению расстояния ρ от точки Y' до прямой SF', где F' – проекция точки F. Получаем



$$\rho=\frac{2S_{F'Y'S}}{F'S};$$
$$F'S^2=a^2+b^2-2ab\cos\left(180^\circ-\alpha\right)=a^2+b^2+2ab\cdot\frac{a}{2b}=2a^2+b^2;$$
$$2S_{F'Y'S}=ab\sin\alpha=\frac{a}{2}\sqrt{4b^2-a^2}.$$

Значит, $\rho = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{4b^2-a^2}{2a^2+b^2}}$. Подставляя сюда $a = 1$, $b = \sqrt{2}$, находим, что $\rho = \sqrt{\frac{7}{16}}$.

10 КЛАСС. Вариант 13

1. [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|2x-2|$ и $|x^2+3x|$, а длина гипотенузы равна $|3x+1|$. Найдите x.

   Ответ: $x=-2\pm\sqrt{5}$.

   Решение. По теореме Пифагора $(2x-2)^2+(x^2+3x)^2=(3x+1)^2$. Группируя члены и применяя формулу разности квадратов, получаем уравнение $-(x+3)(5x-1)+x^2(x+3)^2=0$, откуда $(x+3)(1-5x+x^3+3x^2)=0$. Одним из корней кубического многочлена в скобках является $x=1$. Раскладывая его на множители (например, выполнив деление на $x-1$ уголком), получаем $(x+3)(x-1)(x^2+4x-1)=0$. Это уравнение имеет корни $x=-3$, $x=1$, $x=-2\pm\sqrt{5}$. Корни $x=1$ и $x=-3$ не удовлетворяют условию, т.к. при них длина одного из катетов равна 0.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{8}+y\sqrt{18}+z\sqrt{29}=\sqrt{32}+\sqrt{116}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2-y^2+z^2$.

   Ответ: 1.

   Решение. Так как $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$, $\sqrt{116}=2\sqrt{29}$, данное в условии равенство можно записать в виде
$$(2x+3y-4)\sqrt{2}+(z-2)\sqrt{29}=0.$$

   Если $z\neq 2$, то $\frac{2x+3y-4}{2-z}=\sqrt{\frac{29}{2}}$, что невозможно, так как левая часть рациональна, а правая – иррациональна. Следовательно, $z=2$, и тогда $2x+3y=4$. Последнее уравнение можно записать в виде $x=2-y-\frac{y}{2}$. Поскольку x и y – целые числа, отсюда получаем, что и дробь $\frac{y}{2}$ должна быть целой. Пусть $\frac{y}{2}=k$ – тогда $x=2+3k$, $y=-2k$, $k\in\mathbb{Z}$. Значит $x^2-y^2+z^2=5k^2+12k+8$. Это квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями вверх. Абсцисса вершины параболы $k=-\frac{6}{5}$. Так как переменная может принимать только целочисленные значения, минимум достигается в точке, ближайшей к вершине. Значит, $k=-1$, а соответствующее значение выражения равно 1.

3. [4 балла] Назовём числа *хорошими*, если они представимы в виде $a(a+1)$, где $a\in\mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $81\cdot 10^{2\,024}$.

   Ответ: 10 125.

   Решение. Пусть $a(a+1)$, $b(b+1)$ – хорошие числа. Их разность равна $(a-b)(a+b+1)$. Система
$$\begin{cases} a-b=k, \\ a+b+1=l \end{cases}$$

   имеет единственное решение $a=\frac{k+l-1}{2}$, $b=\frac{l-k-1}{2}$. При этом a и b являются натуральными, если числа k и l – числа разной чётности и $l>k+1$ (так как a и b натуральные числа и $a>b$, то $k\in\mathbb{N}$, $l\in\mathbb{N}$). Числа $(a+b)$ и $(a-b+1)$ разной чётности.
   Заметим, что каждому представлению числа $81\cdot 10^{2024}$ в виде произведения чётного и нечётного числа соответствует ровно одна пара хороших чисел $a(a+1)$ и $b(b+1)$ (больший множитель будет числом k, меньший – числом l) и наоборот. Так как $81\cdot 10^{2024}=2^{2024}\cdot 3^4\cdot 5^{2024}$, в разложение на простые множители чётного числа двойка входит в 2024-ой степени, тройка – в степени от 0 до 4, пятёрка – в степени от 0 до 2024. Поэтому количество представлений числа $81\cdot 10^{2024}$ в виде произведения чётного и нечётного числа, а, значит, и количество пар хороших чисел, разность которых равна $81\cdot 10^{2024}$, равно $5\cdot 2\,025=10\,125$.

4. [5 баллов] Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{4x-x^2-3}-3} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2}}$.

Ответ: $x \in \left[1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \cup \{2\}$.

Решение. Запишем ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{cases} 4x-x^2-3 \geqslant 0, \\ 2x-x^2 \geqslant 0, \\ x^2+x-2 \geqslant 0, \\ 4x-x^2-3 \neq 0, \\ x^2+x-2 \neq 2x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant x \leqslant 2, \\ x \in (-\infty;-2] \cup [1;+\infty), \\ x \neq 3, x \neq 1, \\ x \neq \frac{1\pm\sqrt{17}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2\right]$$

Далее все рассуждения будем проводить для x, принадлежащих ОДЗ.
Так как $\sqrt{4x-x^2-3}-3 = \sqrt{1-(x-2)^2}-3 \leqslant 1-3 < 0$, левая часть исходного неравенства отрицательна. Поэтому те x, для которых правая часть исходного неравенства неотрицательна, являются решениями. Найдём их:

$$\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{x^2+x-2} > 0 \Leftrightarrow 2x-x^2 > x^2+x-2 \Leftrightarrow 2x^2-x-2 < 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{17}}{4} < x < \frac{1+\sqrt{17}}{4}.$$

С учётом ОДЗ $x \in \left[1; \frac{1+\sqrt{17}}{4}\right)$.
Остаётся рассмотреть случай, когда правая часть исходного неравенства отрицательна, т.е. когда $x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2\right]$. Умножим обе части исходного неравенства на -1:

$$\frac{1}{3-\sqrt{4x-x^2-3}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{2x-x^2}}.$$

Так как знаменатели обеих дробей положительны, это неравенство эквивалентно неравенству

$$\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{2x-x^2} \geqslant 3-\sqrt{4x-x^2-3} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{4x-x^2-3} \geqslant \sqrt{2x-x^2}+3.$$

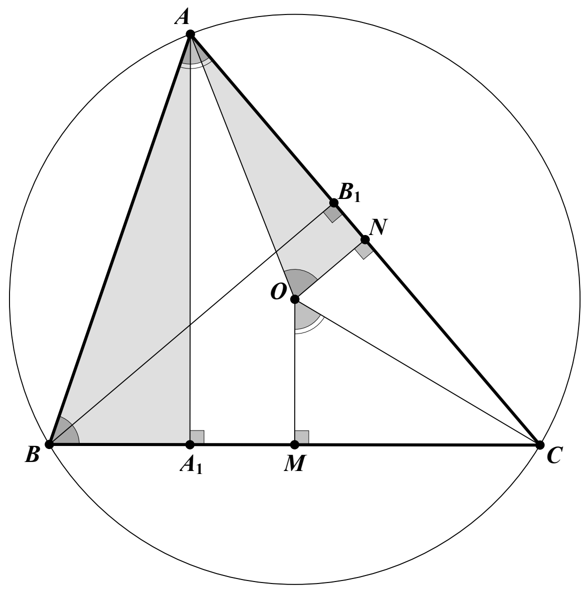
Заметим, что при $x \in \left(\frac{1+\sqrt{17}}{4}; 2\right]$ правая часть не меньше 3, а левая

$$\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{4x-x^2-3} = \sqrt{(x+2)(x-1)}+\sqrt{1-(x-2)^2} \leqslant 2+1 = 3,$$

причём равенство обеих частей достигается только при $x = 2$. Значит, в этом случае есть только одно решение – это $x = 2$.

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а AA_1 и BB_1 – его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC, если $AB_1 = 6$ и площадь треугольника OBA_1 равна 6.

Ответ: 2.



Решение. Пусть M и N – середины BC и AC соответственно. Треугольники BAA_1, ONA подобны как прямоугольные с равными острыми углами $\angle OAN = \angle BAA_1$. (Пусть продолжения AA_1 и AO пересекают окружность в точках D и T соответственно. Так как AT диаметр, $\angle ADT = 90°$. Значит, $DT \parallel BC$. Дуги, заключённый между параллельными хордами, равны. Значит, равны меньшие дуги BD и CT. Углы BAA_1 и OAN опираются на эти дуги.)
Прямоугольные треугольники AB_1B и OMC также подобны ($\angle BAB_1 = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle COM$). Значит,

$$\frac{BA_1}{ON} = \frac{AB}{AO}, \quad \frac{AB_1}{OM} = \frac{AB}{CO}.$$

Поделив первое равенство на второе, получаем $BA_1 \cdot OM = AB_1 \cdot ON$. Но $BA_1 \cdot OM$ есть удвоенная площадь треугольника OBA_1, а $AB_1 \cdot ON$ есть удвоенная площадь треугольника OAB_1, поэтому $S_{OBA_1} = S_{OAB_1}\frac{1}{2}AB_1 \cdot ON$, откуда $ON = \frac{2S_{OBA_1}}{AB_1} = 2$.

6. [4 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 2xy + y^3 - 3y^2 - 1 = 0, \\ 2x - xy - y^3 + 5y^2 - 3y + 2 = 0. \end{cases}$

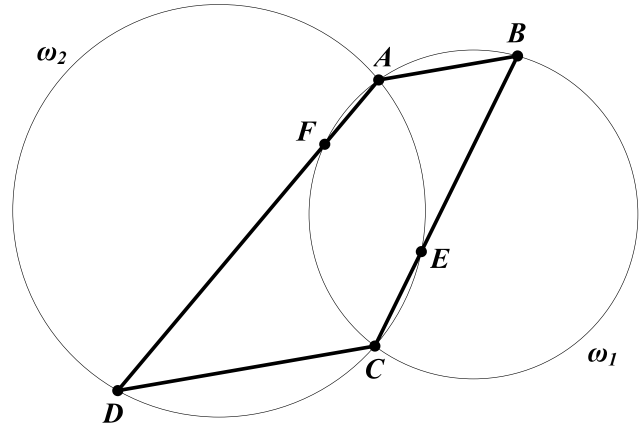
Ответ: $(-1;0)$, $(3;4)$, $\left(2+\sqrt{17}; \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(2-\sqrt{17}; \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$.

Решение. Складывая уравнения, получаем

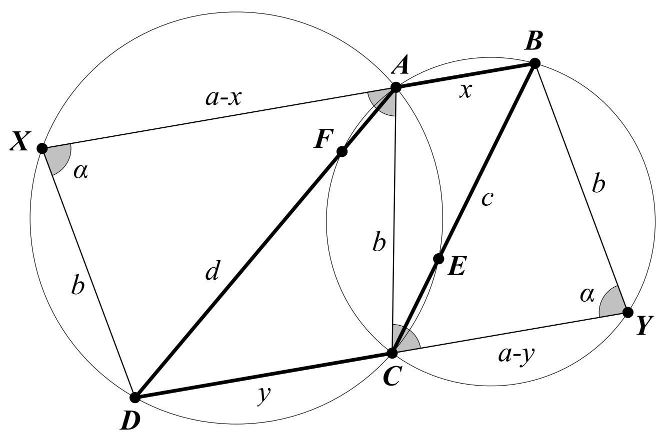
$$x^2 + 2x + 1 - 3xy - 3y + 2y^2 = 0,$$
$$(x+1)^2 - 3(x+1)y + 2y^2 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $x+1$, находим $x+1 = y$ или $x+1 = 2y$.
Если $x = y - 1$, то второе уравнение исходной системы принимает вид $y^3 - 4y^2 = 0$. Отсюда получаем $y = 0$ (и тогда $x = -1$) или $y = 4$ (и тогда $x = 3$).
Если $x = 2y - 1$, то $y^3 - 3y^2 + 2y = 0$. Тогда или $y = 0$ (и выйдет пара чисел, уже полученная ранее), или $y = \frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$ (при этом $x = 2 \pm \sqrt{17}$).

7. [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD ($AB < CD$). Окружность ω_1, описанная около треугольника ABC, повторно пересекает сторону AD в точке F, а окружность ω_2, описанная около треугольника ACD, повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение длин отрезков AF и CE, если отношение радиуса окружности ω_1 к радиусу окружности ω_2 равно $1 : 2$.



Ответ: $1 : 2$.



Решение. Продолжим AB за точку A до пересечения с окружностью ω_2 в точке X и DC за точку C до пересечения с ω_1 в точке Y. Тогда $BXDY$ – параллелограмм, а $ABYC$ и $ACDX$ – равнобедренные трапеции. Обозначим $DX = AC = BY = b$, $BC = c$, $AD = d$, $AB = x$, $CD = y$, $\angle AXD = \angle XAC = \angle BYC = \alpha$. По теореме о двух секущих получаем

$$BE \cdot BC = BA \cdot BX \Leftrightarrow (c - CE) \cdot c = a \cdot x \Leftrightarrow CE = \frac{c^2 - ax}{c}.$$

Аналогично доказывается, что $AF = \frac{d^2 - ay}{d}$. Из равнобедренных трапеций $ABYC$ и $BXDY$ получаем соотношения $b^2 = c^2 - x(a-y) = d^2 - y(a-x)$ (для этого достаточно опустить высоту из вершины меньшего основания на большее, а затем записать теорему Пифагора для двух треугольников). Значит, $c^2 - ax = d^2 - ay$. Но тогда используя полученные выше соотношения, находим

$$\frac{AF}{CE} = \frac{c}{d} = \frac{2R_1 \sin\alpha}{2R_2 \sin\alpha} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{2}.$$

(Здесь R_1, R_2 – радиусы ω_1 и ω_2 соответственно.)

10 КЛАСС. Вариант 14

1. [3 балла] В прямоугольном треугольнике длины катетов равны $|x-1|$ и $|x^2+4x|$, а длина гипотенузы равна $|2x+3|$. Найдите x.

   Ответ: $x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

   Решение. По теореме Пифагора $(x-1)^2+\left(x^2+4x\right)^2=(2x+3)^2$. Группируя члены и применяя формулу разности квадратов, получаем уравнение $-(x+4)(3x+2)+x^2(x+4)^2=0$, откуда $(x+4)(-2-3x+x^3+4x^2)=0$. Одним из корней кубического многочлена в скобках является $x=1$. Раскладывая его на множители (например, выполнив деление на $x-1$ уголком), получаем $(x+4)(x-1)(x^2+5x+2)=0$. Это уравнение имеет корни $x=-4$, $x=1$, $x=\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$. Корни $x=1$ и $x=-4$ не удовлетворяют условию, т.к. при них длина одного из катетов равна 0.

2. [4 балла] Целые числа x, y, z удовлетворяют равенству $x\sqrt{2}+y\sqrt{12}+z\sqrt{75}=\sqrt{32}+\sqrt{108}$. Найдите наименьшее возможное значение выражения $x^2+y^2-z^2$.

   Ответ: 16.

   Решение. Так как $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$, $\sqrt{32}=4\sqrt{2}$, $\sqrt{108}=6\sqrt{3}$, данное в условии равенство можно записать в виде
$$(x-4)\sqrt{2}+(2y+5z-6)\sqrt{3}=0.$$

   Если $x\neq 4$, то $\frac{2y+5z-6}{4-x}=\sqrt{\frac{2}{3}}$, что невозможно, так как левая часть рациональна, а правая – иррациональна. Следовательно, $x=4$, и тогда $2y+5z=6$. Последнее уравнение можно записать в виде $y=3-\frac{5z}{2}$. Поскольку y и z – целые числа, отсюда получаем, что и дробь $\frac{5z}{2}$ должна быть целой. Пусть $\frac{z}{2}=k$ – тогда $y=3-5k$, $z=2k$, $k\in\mathbb{Z}$. Значит $x^2+y^2-z^2=21k^2-30k+25$. Это квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями вверх. Абсцисса вершины параболы $k=\frac{5}{7}$. Так как переменная может принимать только целочисленные значения, минимум достигается в точке, ближайшей к вершине. Значит, $k=1$, а соответствующее значение выражения равно 16.

3. [4 балла] Назовём числа хорошими, если они представимы в виде $a(a+1)$, где $a\in\mathbb{N}$. Найдите количество пар хороших чисел, разность которых равна $343\cdot 10^{1\,000}$.

   Ответ: 4 004.

   Решение. Пусть $a(a+1)$, $b(b+1)$ – хорошие числа. Их разность равна $(a-b)(a+b+1)$. Система
$$\begin{cases} a-b=k,\\ a+b+1=l\end{cases}$$

   имеет единственное решение $a=\frac{k+l-1}{2}$, $b=\frac{l-k-1}{2}$. При этом a и b являются натуральными, если числа k и l – числа разной чётности и $l>k+1$ (так как a и b натуральные числа и $a>b$, то $k\in\mathbb{N}$, $l\in\mathbb{N}$). Числа $(a+b)$ и $(a-b+1)$ разной чётности.
   Заметим, что каждому представлению числа $343\cdot 10^{1\,000}$ в виде произведения чётного и нечётного числа соответствует ровно одна пара хороших чисел $a(a+1)$ и $b(b+1)$ (больший множитель будет числом k, меньший – числом l) и наоборот. Так как $343\cdot 10^{1\,000}=2^{1\,000}\cdot 7^3\cdot 5^{1\,000}$, в разложение на простые множители чётного числа двойка входит в 1000-ой степени, семёрка – в степени от 0 до 3, пятёрка – в степени от 0 до 1 000. Поэтому количество представлений числа $343\cdot 10^{1\,000}$ в виде произведения чётного и нечётного числа, а, значит, и количество пар хороших чисел, разность которых равна $343\cdot 10^{1\,000}$, равно $4\cdot 1\,001=4\,004$.

4. [5 баллов] Решите неравенство $\dfrac{1}{\sqrt{6x-x^2}-5} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3x-x^2}-\sqrt{x^2-x-2}}$.

Ответ: $x \in \left[2; 1+\sqrt{2}\right) \cup \{3\}$.

Решение. Запишем ОДЗ данного неравенства:

$$\begin{cases} 6x-x^2 \geqslant 0, \\ 3x-x^2 \geqslant 0, \\ x^2-x-2 \geqslant 0, \\ 6x-x^2 \neq 5, \\ x^2-x-2 \neq 3x-x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 6, \\ 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ x \in (-\infty;-1] \cup [2;+\infty), \\ x \neq 5, x \neq 1, \\ x \neq 1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left[2; \sqrt{2}+1\right) \cup \left(\sqrt{2}+1; 3\right].$$

Далее все рассуждения будем проводить для x, принадлежащих ОДЗ.
Так как $\sqrt{6x-x^2}-5 = \sqrt{9-(x-3)^2}-5 \leqslant 3-5 < 0$, левая часть исходного неравенства отрицательна. Поэтому те x, для которых правая часть исходного неравенства неотрицательна, являются решениями. Найдём их:

$$\sqrt{3x-x^2}-\sqrt{x^2-x-2} > 0 \Leftrightarrow 3x-x^2 > x^2-x-2 \Leftrightarrow x^2-2x-1 < 0 \Leftrightarrow 1-\sqrt{2} < x < 1+\sqrt{2}.$$

С учётом ОДЗ $x \in \left[2; \sqrt{2}+1\right)$.
Остаётся рассмотреть случай, когда правая часть исходного неравенства отрицательна, т.е. когда $x \in \left(\sqrt{2}+1; 3\right]$. Умножим обе части исходного неравенства на -1:

$$\frac{1}{5-\sqrt{6x-x^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{3x-x^2}}.$$

Так как знаменатели обеих дробей положительны, это неравенство эквивалентно неравенству

$$\sqrt{x^2-x-2}-\sqrt{3x-x^2} \geqslant 5-\sqrt{6x-x^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{6x-x^2} \geqslant \sqrt{3x-x^2}+5.$$

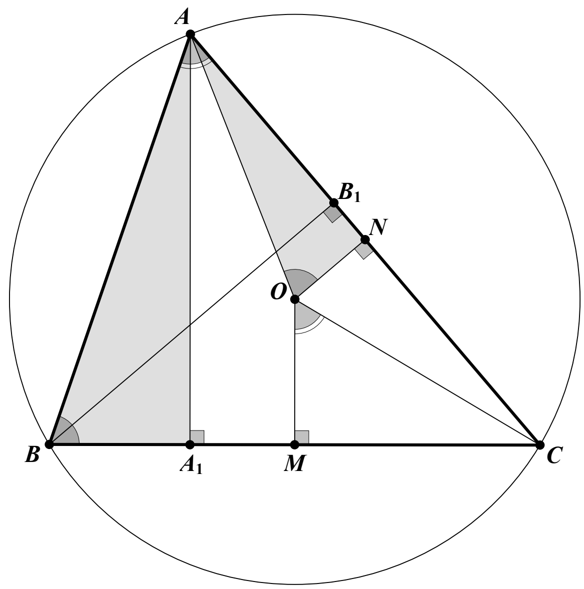
Заметим, что при $x \in \left(\sqrt{2}+1; 3\right]$ правая часть не меньше 5, а левая

$$\sqrt{x^2-x-2}+\sqrt{6x-x^2} = \sqrt{(x-2)(x+1)}+\sqrt{9-(x-3)^2} \leqslant 2+3 = 5,$$

причём равенство обеих частей достигается только при $x=3$. Значит, в этом случае есть только одно решение – это $x=3$.

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а AA_1 и BB_1 – его высоты. Найдите расстояние от точки O до стороны AC, если $AB_1=5$, а площадь треугольника OBA_1 равна 3.

Ответ: 1,2.



Решение. Пусть M и N – середины BC и AC соответственно. Треугольники BAA_1, ONA подобны как прямоугольные с равными острыми углами $\angle OAN = \angle BAA_1$. (Пусть продолжения AA_1 и AO пересекают окружность в точках D и T соответственно. Так как AT диаметр, $\angle ADT = 90^\circ$. Значит, $DT \parallel BC$. Дуги, заключённый между параллельными хордами, равны. Значит, равны меньшие дуги BD и CT. Углы BAA_1 и OAN опираются на эти дуги.)
Прямоугольные треугольники AB_1B и OMC также подобны ($\angle BAB_1 = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle COM$). Значит,

$$\frac{BA_1}{ON} = \frac{AB}{AO}, \quad \frac{AB_1}{OM} = \frac{AB}{CO}.$$

Поделив первое равенство на второе, получаем $BA_1 \cdot OM = AB_1 \cdot ON$. Но $BA_1 \cdot OM$ есть удвоенная площадь треугольника OBA_1, а $AB_1 \cdot ON$ есть удвоенная площадь треугольника OAB_1, поэтому $S_{OBA_1} = S_{OAB_1}\frac{1}{2}AB_1 \cdot ON$, откуда $ON = \frac{2S_{OBA_1}}{AB_1} = 1{,}2$.

6. [4 балла] Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - xy + y + y^3 = 0, \\ 2x + 1 - y^3 - 2y^2 + 2xy = 0. \end{cases}$

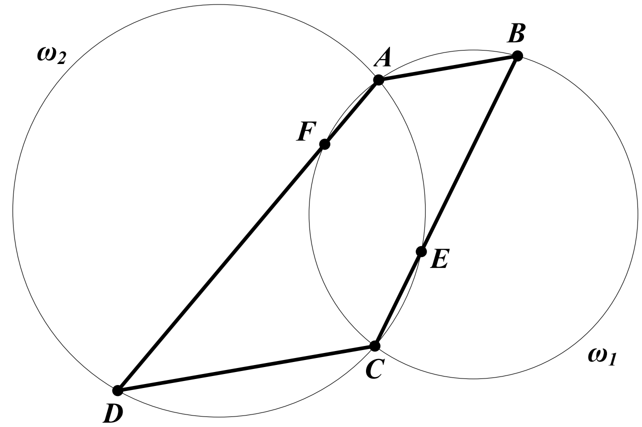
Ответ: $(1; -1)$, $(-2; -1)$, $\left(4 + \sqrt{21}; \frac{-5-\sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(4 - \sqrt{21}; \frac{-5+\sqrt{21}}{2}\right)$.

Решение. Складывая уравнения, получаем

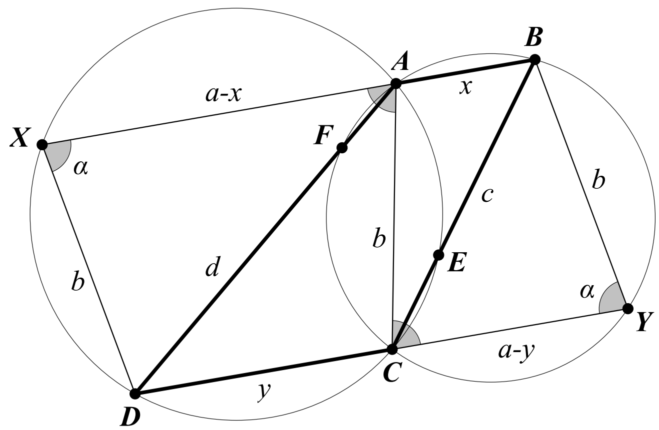
$$x^2 + 2x + 1 + xy + y - 2y^2 = 0,$$
$$(x+1)^2 + (x+1)y - 2y^2 = 0.$$

Решая это уравнение как квадратное относительно $x+1$, находим $x + 1 = y$ или $x + 1 = -2y$.
Если $x = y - 1$, то второе уравнение исходной системы принимает вид $y^3 + 1 = 0$. Отсюда получаем $y = -1$ (и тогда $x = -2$).
Если $x = -2y - 1$, то $y^3 + 6y^2 + 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y^2 + 5y + 1) = 0$. Тогда или $y = -1$ (и тогда $x = 1$), или $y = \frac{-5\pm\sqrt{21}}{2}$ (при этом $x = 4 \mp \sqrt{21}$).

7. [6 баллов] Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AB и CD $(AB < CD)$. Окружность ω_1, описанная около треугольника ABC, повторно пересекает сторону AD в точке F, а окружность ω_2, описанная около треугольника ACD, повторно пересекает сторону BC в точке E (точки E и F расположены так, как показано на рисунке). Найдите отношение радиусов окружностей ω_1 и ω_2, если $AF : CE = 3 : 5$.



Ответ: $3 : 5$.



Решение. Продолжим AB за точку A до пересечения с окружностью ω_2 в точке X и DC за точку C до пересечения с ω_1 в точке Y. Тогда $BXDY$ – параллелограмм, а $ABYC$ и $ACDX$ – равнобедренные трапеции. Обозначим $DX = AC = BY = b$, $BC = c$, $AD = d$, $AB = x$, $CD = y$, $\angle AXD = \angle XAC = \angle BYC = \alpha$. По теореме о двух секущих получаем

$$BE \cdot BC = BA \cdot BX \Leftrightarrow (c - CE) \cdot c = a \cdot x \Leftrightarrow CE = \frac{c^2 - ax}{c}.$$

Аналогично доказывается, что $AF = \frac{d^2 - ay}{d}$. Из равнобедренных трапеций $ABYC$ и $BXDY$ получаем соотношения $b^2 = c^2 - x(a-y) = d^2 - y(a-x)$ (для этого достаточно опустить высоту из вершины меньшего основания на большее, а затем записать теорему Пифагора для двух треугольников). Значит, $c^2 - ax = d^2 - ay$. Но тогда используя полученные выше соотношения, находим

$$\frac{AF}{CE} = \frac{c}{d} = \frac{2R_1 \sin\alpha}{2R_2 \sin\alpha} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{5}.$$

(Здесь R_1, R_2 – радиусы ω_1 и ω_2 соответственно.)

9 КЛАСС. Вариант 15

1. [3 балла] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4x^2-(4a+8)x+a^2+4a=0$ имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 5 раз?

Ответ: $a=1$, $a=-5$.

Решение. Корнями уравнения являются числа $x_1=\frac{a}{2}$ и $x_2=\frac{a+4}{2}$ (можно вычислить по формуле для корней или найти по теореме Виета). Если $5x_1=x_2$, то $5\cdot\frac{a}{2}=\frac{a+4}{2}$, откуда $a=1$.
Если $x_1=5x_2$, то $\frac{a}{2}=5\cdot\frac{a+4}{2}$, откуда $a=-5$.

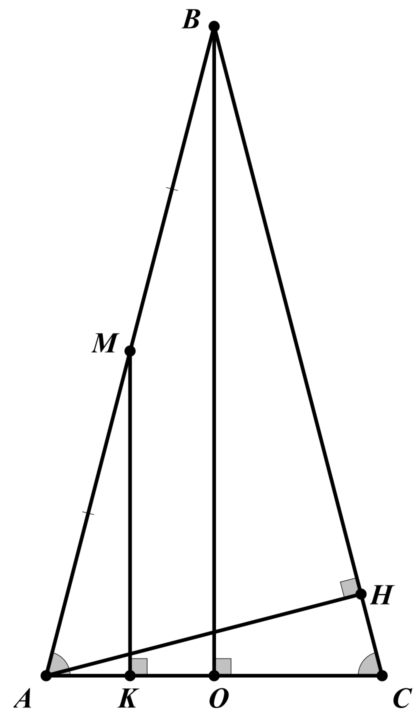
2. [5 баллов] Дан треугольник ABC такой, что $AB=30$, $BC=24$, $AC=18$. На стороне BC отмечено последовательно 23 точки: $B_1, B_2, \ldots, B_{23}$ так, что эти точки разбивают BC на 24 единичных отрезка. Аналогично, на стороне AC отмечено последовательно 17 точек: $A_1, A_2, \ldots, A_{17}$ так, что эти точки разбивают AC на 18 единичных отрезков. Сколько существует треугольников с площадью 11 и вершинами, которые выбираются из точек A, $A_1, A_2, \ldots, A_{17}$, B, $B_1, B_2, \ldots, B_{23}$, C?

Ответ: 80.

Решение. Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом при вершине C, так как $18^2+24^2=30^2$. Будем считать, что на одном из катетов выбираются две точки, расстояние между которыми равно d, а на другом – одна. Тогда $S=\frac{dh}{2}$, где h – высота треугольника, проведенная к основанию – отрезку длины d, т.е. h – это расстояние от вершины C до соответствующей точки на катете треугольника ABC. Таким образом, d и h – натуральные числа такие, что $dh=2S=22$. Существует ровно 4 способа записать 22 в виде произведения двух натуральных чисел (с учётом порядка сомножителей): $22=1\cdot22=2\cdot11=11\cdot2=22\cdot1$. Отметим также, что как только мы выбрали d, h определяется однозначно. Возможны два случая.
1) Отрезок длины d выбирается на стороне BC. Если он имеет длину 1, то высота $h=22>AC$, поэтому искомых треугольников нет. Если он имеет длину 2, то его можно выбрать $25-2=23$ способами. Если он имеет длину 11, то $25-11=14$ способами. Если он имеет длину 22, то $25-22=3$ способами. Всего получаем $23+14+3=40$ способов.
2) Отрезок длины d выбирается на стороне AC. Если он имеет длину 1, то это можно сделать $19-1=18$ способами. Если он имеет длину 2, то $19-2=17$ способами. Если он имеет длину 11, то $19-11=8$ способами. Отрезок длины 22 на стороне AC выбрать нельзя. Всего получаем $18+17+8=43$ способа.
Заметим, что при таком подсчете мы дважды посчитали треугольники, одной из вершин которых является вершина C. Таких треугольников ровно 3.
Итого получаем $40+43-3=80$ способов.

3. [4 балла] AH – высота равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$). Точка M – середина стороны AB. Из точки M опущен перпендикуляр MK на сторону AC. Найдите периметр треугольника ABC, если $AH=MK$, и $AK=5$.

Ответ: 100.



Решение. Пусть $AK = t$. Треугольник ABC – равнобедренный, значит, $\angle MAK = \angle ACH$. Тогда треугольники MAK и ACH равны (прямоугольные с равными катетами $MK = AH$ и равными противолежащими острыми углами). Значит, $AC = AM = \frac{1}{2}AB$. Проведем высоту BO треугольника ABC. По теореме Фалеса $AK : KO = AM : MB$, значит $AO = 2AK = 2t$. Тогда $AC = 2AO = 4t$, $AB = 2AC = 8t$. Значит, периметр равен $8t + 8t + 4t = 20t = 100$.

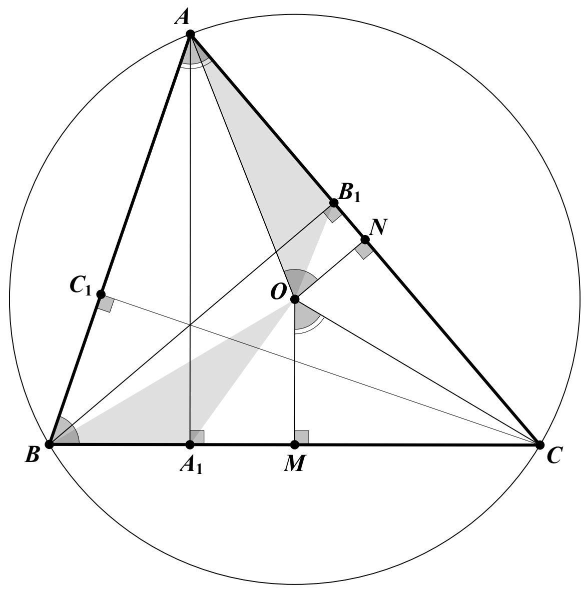
4. [4 балла] Из множества M, состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 240$.

Ответ: $\{13, 14, 15, 16, 17\}$.

Решение. Пусть данные 5 чисел – это a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$. Их сумма равна $5a+10$. Сумма четырёх чисел из этого набора может принимать следующие значения: $4a+6$, $4a+7$, $4a+8$, $4a+9$, $4a+10$. Из них простыми могут быть только $4a+7$ и $4a+9$ (остальные числа чётные и отличны от 2).
Таким образом, $(4a+9)^2 - (4a+7)^2 = 240$. Отсюда $a = 13$. Значит, $M = \{13, 14, 15, 16, 17\}$. Непосредственным подсчётом проверяем, что среди интересующих нас сумм и правда есть два простых числа.

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC площади 80 вписан в окружность с центром O, а AA_1, BB_1 и CC_1 – его высоты. Найдите площадь треугольника BOA_1, если площади треугольников COB_1 и AOC_1 равны 12 и 20 соответственно.

Ответ: 8.



Решение. Пусть M и N — середины BC и AC соответственно. Заметим, что треугольники BAA_1, OAN подобны как прямоугольные с равными острыми углами ($\angle ABA_1 = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle AON$). Прямоугольные треугольники AB_1B и OMC также подобны ($\angle BAB_1 = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle COM$). Значит,

$$\frac{BA_1}{ON} = \frac{AB}{AO}, \quad \frac{AB_1}{OM} = \frac{AB}{CO}.$$

Поделив первое равенство на второе, получаем $BA_1 \cdot OM = AB_1 \cdot ON$. Но $BA_1 \cdot OM$ есть удвоенная площадь треугольника OBA_1, а $AB_1 \cdot ON$ есть $2S_{OAB_1}$, поэтому $S_{OBA_1} = S_{OAB_1}$. Аналогично получаем равенства $S_{OAC_1} = S_{OCA_1}$ и $S_{OCB_1} = S_{OBC_1}$. Итак, треугольник ABC разбивается на три пары треугольников равной площади, откуда

$$\frac{1}{2}S_{ABC} = S_{COB_1} + S_{BOA_1} + S_{AOC_1} \ \Rightarrow\ S_{BOA_1} = \frac{1}{2}S_{ABC} - S_{COB_1} - S_{BOC_1} = 8.$$

6. [5 баллов] Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{a^3}{b} - 2ab = 4, \\ \frac{b^3}{a} - 3ab = 8. \end{cases}$

Ответ: $(2; -2)$, $(-2; 2)$.

Решение. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} = 2ab + 4, \\ \frac{b^3}{a} = 3ab + 8. \end{cases}$$

Перемножив уравнения, получим $5(ab)^2 + 28ab + 32 = 0$. Откуда либо $ab = -4$, либо $ab = -\frac{8}{5}$. Если $ab = -4$, то из первого уравнения получаем, что $a^4 = 16$, $a = \pm 2$, $b = \mp 2$ – решения системы. Если $ab = -\frac{8}{5}$, то из первого уравнения получаем, что $a^4 = -\frac{32}{25} < 0$. В этом случае решений нет.

7. [5 баллов] Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск q ($q \in \mathbb{N}$) приборов в месяц потребует на первом заводе $2q^2$ тыс.руб., на втором заводе $2q^2 + 2q$ тыс.руб., и на третьем $2q^2 - q$ тыс.руб. Каждый завод

может выпускать до 100 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 250 приборов?

Ответ: Первый и второй заводы должны выпустить по 83 прибора, третий завод – 84.

Решение. Выпуск k-ого по счёту прибора на первом заводе стоит $2k^2-2(k-1)^2=4k-2$ тыс.руб., на втором – $2k^2+2k-2(k-1)^2-2(k-1)=4k$, и на третьем – $2k^2-k-2(k-1)^2+(k-1)=4k-3$. Это значит, что выпуск первого прибора будет дешевле всего на третьем заводе, второго (в общей последовательности выпускаемой продукции) – на первом заводе (для него этот прибор станет первым), и третий «общий» прибор – на втором заводе (для него этот прибор тоже станет первым). Четвёртый «общий» прибор станет вторым для каждого завода по отдельности, и соответственно, дешевле всего его будет произвести на третьем заводе. Продолжая рассуждать подобным образом, видим, что если рассмотреть тройку выпущенных приборов с «общими» номерами $3l-2, 3l-1$ и $3l$ $(l \in N)$, то прибор с номером $3l-2$ приходится на третий завод, прибор с номером $3l-1$ – на первый, и прибор с номером $3l$ – на второй.
Поскольку $\left[\frac{250}{3}\right]=83$, а остаток от деления 250 на 3 равен 1, то выгоднее всего поручить первому и второму заводам выпустить по 83 прибора, а третьему – 84.

9 КЛАСС. Вариант 16

1. [3 балла] Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $4x^2-(4a-12)x+$ $+a^2-6a=0$ имеет два действительных корня, которые отличаются ровно в 3 раза?

Ответ: $a=9$, $a=-3$.

Решение. Корнями уравнения являются числа $x_1=\frac{a}{2}$ и $x_2=\frac{a-6}{2}$ (можно вычислить по формуле для корней или найти по теореме Виета). Если $3x_1=x_2$, то $3\cdot\frac{a}{2}=\frac{a-6}{2}$, откуда $a=-3$.
Если $x_1=3x_2$, то $\frac{a}{2}=3\cdot\frac{a-6}{2}$, откуда $a=9$.

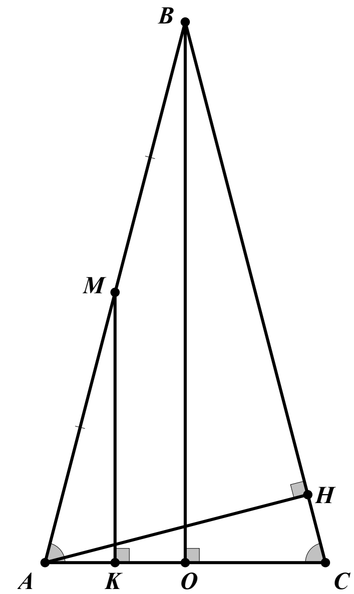
2. [5 баллов] Дан треугольник ABC такой, что $AB=35$, $BC=28$, $AC=21$. На стороне BC отмечено последовательно 27 точек: $B_1,B_2,\ldots,B_{27}$ так, что эти точки разбивают BC на 28 единичных отрезка. Аналогично, на стороне AC отмечено последовательно 20 точек: $A_1,A_2,\ldots,A_{20}$ так, что эти точки разбивают AC на 21 единичный отрезок. Сколько существует треугольников с площадью 13 и вершинами, которые выбираются из точек A, $A_1,A_2,\ldots,A_{20}$, B, $B_1,B_2,\ldots,B_{27}$, C?

Ответ: 93.

Решение. Треугольник ABC прямоугольный с прямым углом при вершине C, так как $21^2+28^2=35^2$. Будем считать, что на одном из катетов выбираются две точки, расстояние между которыми равно d, а на другом – одна. Тогда $S=\frac{dh}{2}$, где h – высота треугольника, проведенная к основанию – отрезку длины d, т.е. h – это расстояние от вершины C до соответствующей точки на катете треугольника ABC. Таким образом, d и h – натуральные числа такие, что $dh=2S=26$. Существует ровно 4 способа записать 26 в виде произведения двух натуральных чисел (с учётом порядка сомножителей): $26=1\cdot26=2\cdot13=13\cdot2=26\cdot1$. Отметим также, что как только мы выбрали d, h определяется однозначно. Возможны два случая.
1) Отрезок длины d выбирается на стороне BC. Если он имеет длину 1, то высота $h=26>AC$, поэтому искомых треугольников нет. Если он имеет длину 2, то его можно выбрать $29-2=27$ способами. Если он имеет длину 13, то $29-13=16$ способами. Если он имеет длину 26, то $29-26=3$ способами. Всего получаем $27+16+3=46$ способов.
2) Отрезок длины d выбирается на стороне AC. Если он имеет длину 1, то это можно сделать $22-1=21$ способом. Если он имеет длину 2, то $22-2=20$ способами. Если он имеет длину 13, то $22-13=9$ способами. Отрезок длины 26 на стороне AC выбрать нельзя. Всего получаем $21+20+9=50$ способов.
Заметим, что при таком подсчете мы дважды посчитали треугольники, одной из вершин которых является вершина C. Таких треугольников ровно 3.
Итого получаем $46+50-3=93$ способа.

3. [4 балла] AH – высота равнобедренного треугольника ABC ($AB=BC$). Точка M – середина стороны AB. Из точки M опущен перпендикуляр MK на сторону AC. Найдите периметр треугольника ABC, если $AH=MK$, и $AK=7$.

Ответ: 140.



Решение. Пусть $AK = t$. Треугольник ABC – равнобедренный, значит, $\angle MAK = \angle ACH$. Тогда треугольники MAK и ACH равны (прямоугольные с равными катетами $MK = AH$ и равными противолежащими острыми углами). Значит, $AC = AM = \frac{1}{2}AB$. Проведем высоту BO треугольника ABC. По теореме Фалеса $AK : KO = AM : MB$, значит $AO = 2AK = 2t$. Тогда $AC = 2AO = 4t$, $AB = 2AC = 8t$. Значит, периметр равен $8t + 8t + 4t = 20t = 140$.

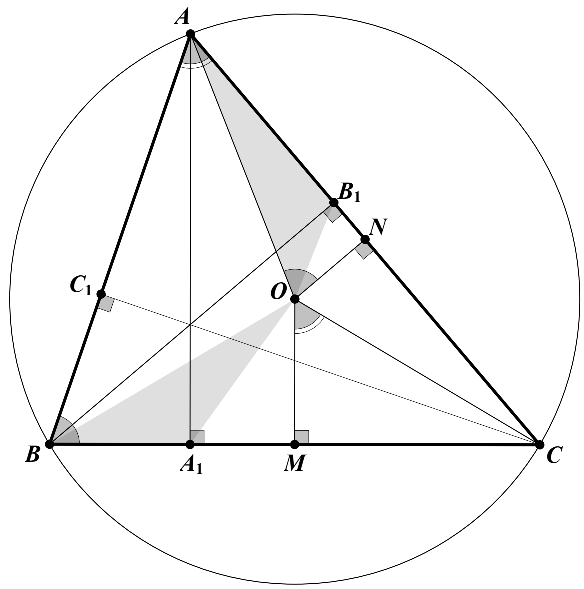
4. [4 балла] Из множества M, состоящего из пяти подряд идущих натуральных чисел, выбираются выбираются четвёрки попарно различных чисел такие, что сумма чисел в каждой из четвёрок – простое число. Пусть p и q – две из таких сумм. Найдите множество M, если $p^2 - q^2 = 288$.

   Ответ: $\{16, 17, 18, 19, 20\}$.

   Решение. Пусть данные 5 чисел – это a, $a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$. Их сумма равна $5a+10$. Сумма четырёх чисел из этого набора может принимать следующие значения: $4a+6$, $4a+7$, $4a+8$, $4a+9$, $4a+10$. Из них простыми могут быть только $4a+7$ и $4a+9$ (остальные числа чётные и отличны от 2).
   Таким образом, $(4a+9)^2 - (4a+7)^2 = 288$. Отсюда $a = 16$. Значит, $M = \{16, 17, 18, 19, 20\}$. Непосредственным подсчётом проверяем, что среди интересующих нас сумм и правда есть два простых числа.

5. [5 баллов] Остроугольный треугольник ABC площади 120 вписан в окружность с центром O, а AA_1, BB_1 и CC_1 – его высоты. Найдите площадь треугольника BOA_1, если площади треугольников COB_1 и AOC_1 равны 12 и 36 соответственно.

   Ответ: 12.



Решение. Пусть M и N — середины BC и AC соответственно. Заметим, что треугольники BAA_1, OAN подобны как прямоугольные с равными острыми углами ($\angle ABA_1 = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle AON$). Прямоугольные треугольники AB_1B и OMC также подобны ($\angle BAB_1 = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle COM$). Значит,

$$\frac{BA_1}{ON} = \frac{AB}{AO}, \quad \frac{AB_1}{OM} = \frac{AB}{CO}.$$

Поделив первое равенство на второе, получаем $BA_1 \cdot OM = AB_1 \cdot ON$. Но $BA_1 \cdot OM$ есть удвоенная площадь треугольника OBA_1, а $AB_1 \cdot ON$ есть $2S_{OAB_1}$, поэтому $S_{OBA_1} = S_{OAB_1}$. Аналогично получаем равенства $S_{OAC_1} = S_{OCA_1}$ и $S_{OCB_1} = S_{OBC_1}$. Итак, треугольник ABC разбивается на три пары треугольников равной площади, откуда

$$\frac{1}{2}S_{ABC} = S_{COB_1} + S_{BOA_1} + S_{AOC_1} \;\Rightarrow\; S_{BOA_1} = \frac{1}{2}S_{ABC} - S_{COB_1} - S_{BOC_1} = 12.$$

6. [5 баллов] Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{a^3}{b} + ab = 8, \\ \frac{b^3}{a} + 3ab = 16. \end{cases}$

Ответ: $(2;2)$, $(-2;-2)$.

Решение. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \frac{a^3}{b} = -ab + 8, \\ \frac{b^3}{a} = -3ab + 16. \end{cases}$$

Перемножив уравнения, получим $2(ab)^2 - 40ab + 128 = 0$. Откуда либо $ab = 4$, либо $ab = 16$. Если $ab = 4$, то из первого уравнения получаем, что $a^4 = 16$, $a = \pm 2$, $b = \pm 2$ – решения системы. Если $ab = 16$, то из первого уравнения получаем, что $a^4 = -128 < 0$. В этом случае решений нет.

7. [5 баллов] Компания владеет тремя заводами, производящими некоторые приборы. Затраты на поддержание заводов в рабочем состоянии везде одинаковы, а вот затраты непосредственно на производство продукции разные. Выпуск q ($q \in \mathbb{N}$) приборов в месяц потребует на первом заводе

$3q^2 + 2q$ тыс.руб., на втором заводе $3q^2 - q$ тыс.руб., и на третьем $3q^2$ тыс.руб. Каждый завод может выпускать до 80 приборов в месяц. Как нужно распределить производство продукции между заводами, чтобы за месяц выполнить с наименьшими затратами заказ на 200 приборов?

Ответ: Первый завод должен выпустить 66 приборов, второй и третий заводы – по 67.

Решение. Выпуск k-ого по счёту прибора на первом заводе стоит $3k^2+2k-3(k-1)^2-2(k-1) = 6k-1$ тыс.руб., на втором – $3k^2-k-3(k-1)^2+(k-1) = 6k-4$, и на третьем – $3k^2-3(k-1)^2 = 6k-3$. Это значит, что выпуск первого прибора будет дешевле всего на втором заводе, второго (в общей последовательности выпускаемой продукции) – на третьем заводе (для него этот прибор станет первым), и третий «общий» прибор – на первом заводе (для него этот прибор тоже станет первым). Четвёртый «общий» прибор станет вторым для каждого завода по отдельности, и соответственно, дешевле всего его будет произвести на втором заводе. Продолжая рассуждать подобным образом, видим, что если рассмотреть тройку выпущенных приборов с «общими» номерами $3l-2, 3l-1$ и $3l$ ($l \in \mathbb{N}$), то прибор с номером $3l-2$ приходится на второй завод, прибор с номером $3l-1$ – на третий, и прибор с номером $3l$ – на первый.
Поскольку $\left[\frac{200}{3}\right] = 66$, а остаток от деления 200 на 3 равен 2, то выгоднее всего поручить первому заводу выпустить 66 приборов, а второму и третьему – по 67.