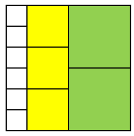
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 5 класса

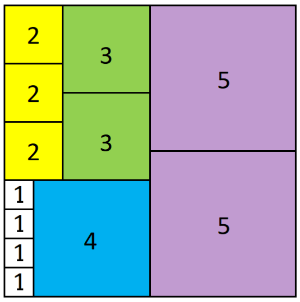
Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — что задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Можно ли разрезать какой-нибудь квадрат на 12 квадратов пяти различных размеров? (Каждый из пяти размеров должен встречаться хотя бы один раз.) **Примечание.** Справа приведён пример разрезания квадрата на 11 квадратов трёх различных размеров. (*А. А. Теслер*)



Ответ: да. Например, так (числа в квадратах обозначают длины их сторон):



Критерии. Только ответ «да» — 0 баллов. Написаны возможные размеры квадратов, но не приведен пример самого разбиения — 0 баллов.

2. Катя написала на доске пример на умножение и зашифровала его по правилам буквенных ребусов так: $TRIO \times 111 = JARMILO$ (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). Найдите хотя бы одно решение этого ребуса. (*П. Д. Муленко*)

Примечание. В переводе с языка эсперанто «trio» — тройка, «jarmilo» — тысячелетие.

Ответ: $9267 \cdot 111 = 1028637$.

Решение. Очевидно, что $T = 9$, $J = 1$, $A = 0$ ($8999 \cdot 111 < 1000000$, $9876 \cdot 111 < 1100000$). Минимальное значение $R = 2$, тогда $92IO \cdot 111 = 102MILO$. Далее подбором получается $9267 \cdot 111 = 1028637$.

Примечание. На самом деле это единственное решение.

Критерии. Просто ответ без обоснования — 7 баллов.

3. Пятиклассник Паша хочет во время летних каникул регулярно ходить в бассейн. Он планирует каждую неделю тренироваться 2 дня утром и вечером и 4 дня — только вечером. При этом он не сможет тренироваться и утром, и вечером два дня подряд. Он хочет спланировать свои тренировки на неделю и придерживаться этого расписания всё лето. Сколькими способами он может это сделать? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 70 способов.

Решение. У Паши есть $C_7^2 = 7 \cdot 6/2 = 21$ способ выбрать пару дней, когда он будет тренироваться и утром, и вечером, но 7 способов из них (соответствующих подряд идущим дням: понедельник и вторник, вторник и среда, ..., суббота и воскресенье, воскресенье и понедельник) не подходят. Для каждого оставшегося способа он ещё должен выбрать один выходной среди оставшихся 5 дней. Итого $(21 - 7) \cdot 5 = 70$ способов.

Критерии. Просто верный ответ без обоснований — 1 балл.

Если участник не заметил, что воскресенье и понедельник — соседние дни, и это привело к ответу 75 — 5 баллов.

Если в решении нет корректного комбинаторного обоснования, но все вычисления верные — отнимаем 2 балла.

4. Турист Олег посетил деревню Хитрецово, в которой три касты: *рыцари*, которые отвечают «Да», если то, о чём их спрашивают, верно, и «Нет», если неверно; *лжецы*, действующие наоборот; и *подражатели*, которые повторяют последнюю услышанную фразу. Олег подошёл к шести жителям и спросил (один раз), являются ли они подражателями, на что услышал в ответ 3 разных фразы, каждую по два раза. Сколько среди этих шести жителей могло быть подражателей? Укажите все возможные варианты. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: от 2 до 4 подражателей.

Решение. Так как в ответ Олег услышал три разных ответа, то помимо «Да» и «Нет» двое из жителей должны были повторить сам вопрос туриста: «Вы подражатель?» Помимо этого, первый из ответивших «Да» обязан быть лжецом (второй ответ «Да» мог сказать ещё один подражатель сразу после), а первый ответивший «Нет» — рыцарем. Итого, подражателей не более четырёх.

Критерии. Верный ответ с примерами (но без доказательства, что других вариантов не бывает) — 3 балла. Верный ответ без примеров — 1 баллов.

5. Маленький мальчик Андрюша очень боится грозы, поэтому, чтобы заснуть, считает овец. При этом, когда до него доносится гром, он (от испуга) считает очередную овцу за две. Овцы пробегают раз в k секунд (где k — целое число больше двух). Гром раздаётся через равные промежутки времени, причём каждый раскат грома совпадает с появлением какой-то овцы. Первая овца пробежала во время грома, за первые 60 секунд включительно (и с учётом первой овцы и первого раската) гром ударил трижды, а за первые 90 секунд включительно он насчитал 23 овцы. Как часто бегают овцы? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: раз в 5 секунд.

Решение. Раз за первые 60 секунд гром ударил всего три раза, то между раскатами проходит более 20 секунд. Значит, за последующие 30 секунд гром ударил ещё не более двух раз, то есть за 90 секунд Андрюша 4 или 5 раз посчитал овцу дважды, и в реальности пробежало $23 - 4 = 19$ или $23 - 5 = 18$ овец. Между ними было 18 или 17 равных временных промежутков соответственно (и, возможно, в несколько последних секунд никто не пробегал), тогда длина одного не более $90 : 18 = 5$ и $90 : 17 = 5\,\frac{5}{17} < 6$ секунд. Тогда время между двумя овцами составляет 5 секунд (поскольку оно должно быть целым числом), и овец всё-таки было 19. А если бы между овцами проходило 4 секунды или меньше, Андрюша бы насчитал не менее $90 : 4 + 4 > 26$ овец.

6. После инцидента с Гарри Поттером в Хогвартсе отменили ограничение на число участников в Турнире Нескольких Волшебников, зато ввели предварительное испытание: свободный чемпионат по волшебным дуэлям, в котором участники в свободном порядке выбирали себе соперников и устраивали дуэль (ничьих не бывает). Проигравший два раза из Турнира выбывает. Когда все приняли участие в трёх дуэлях, оказалось, что в Турнире

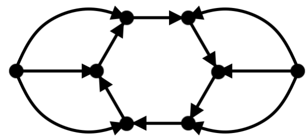
остались всего 2 участника, причём оба ни разу не проиграли. Сколько же участников соревновались за участие в Турнире Нескольких Волшебников? Для каждого возможного количества приведите пример. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 8 участников.

Решение. Обозначим за x число *выбывших* из Турнира участников. Тогда, с одной стороны, каждый из $x+2$ участников выступил в трёх дуэлях, поэтому их число равно $3 \cdot (x+2)/2$ (пополам, так как каждую дуэль мы посчитали два раза); а с другой стороны, в каждый дуэли есть один програвший, поэтому число дуэлей равно числу поражений участников, то есть $2x$:

$$\frac{3}{2} \cdot (x+2) = 2x \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 6 = 4x \quad \Leftrightarrow \quad x = 6.$$

Пример дуэлей на $6 + 2 = 8$ участников можно построить так: шестеро выбывших сыграли друг с другом по кругу, и двое непобеждённых выигрывали по одному разу у троих из них (см. рис.; точками обозначены участники, стрелками — победители).



Критерии. Верный ответ и пример — 2 балла.

7. Какое наибольшее количество попарно различных натуральных чисел, не больших 10, можно выбрать так, чтобы для любого числа N из выбранных было верно, что произведение всех остальных чисел нацело делится на N? (*С. П. Павлов*)

Ответ: 9 (все, кроме числа 7).

Решение. Все первые 10 натуральных чисел взять нельзя, так как есть число 7, и произведение всех остальных чисел на 7 делиться не будет. Далее легко проверяется, что набор из 9 чисел без числа 7 подходит: произведение всех чисел $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 518400$ нацело делится на квадраты всех множителей, поэтому взяв любое число x, произведение остальных чисел, равное $518400 : x$, будет делиться на x.

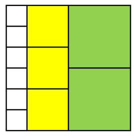
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 6 класса

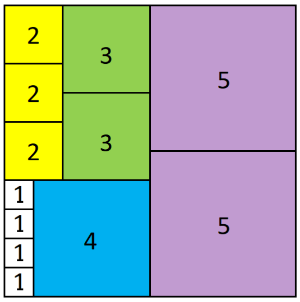
Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — что задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Можно ли разрезать какой-нибудь квадрат на 12 квадратов пяти различных размеров? (Каждый из пяти размеров должен встречаться хотя бы один раз.) **Примечание.** Справа приведён пример разрезания квадрата на 11 квадратов трёх различных размеров. (*А. А. Теслер*)



Ответ: да. Например, так (числа в квадратах обозначают длины их сторон):



Критерии. Только ответ «да» — 0 баллов. Написаны возможные размеры квадратов, но не приведен пример самого разбиения — 0 баллов.

2. Катя написала на доске пример на умножение и зашифровала его по правилам буквенных ребусов так: $TRIO \times 111 = JARMILO$ (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). Найдите наименьшее возможное значение числа $TRIO$ (и докажите, что оно наименьшее возможное). (*П. Д. Муленко*)

Примечание. В переводе с языка эсперанто «trio» — тройка, «jarmilo» — тысячелетие.

Ответ: 9267.

Решение. Очевидно, что $T = 9$, $J = 1$, $A = 0$ ($8999 \cdot 111 < 1000000$, $9876 \cdot 111 < 1100000$). Минимальное значение $R = 2$, тогда $92IO \cdot 111 = 102MILO$. Распишем на разрядные слагаемые и преобразуем:

$$1021200 + 1110 \cdot I + 111 \cdot O = 1020000 + 1000 \cdot M + 100 \cdot I + 10 \cdot L + O,$$
$$120 + 101 \cdot I + 11 \cdot O = 100 \cdot M + L,$$
$$120 + 10 \cdot O + (I + O - L) = 100(M - I).$$

Правая часть этого выражения кратна 100, поэтому и левая обязана, отсюда или $(I + O - L) = 0$ (и тогда $O = 8$), или $(I + O - L) = 10$ (и тогда $O = 7$). В первом случае получается, что $I + 8 = L$, но это невозможно, ведь цифры 1 и 9 уже заняты. Во втором случае $I = 6$, $L = 3$, что даёт решение $9267 \cdot 111 = 1028637$. Иные решения данного ребуса, если и имеются, имеют цифру $R \geqslant 3$, что заведомо больше найденного.

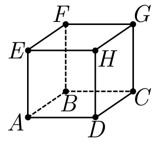
Примечание. На самом деле это единственное решение данного ребуса.

Критерии. Просто ответ без обоснования – 2 балл

3. Сколькими способами можно расставить в вершинах куба числа 1, 2, 3 или 4 при условии, что сумма чисел, лежащих в вершинах любой грани, должна быть кратна 4? Варианты, отличающиеся поворотом или отражением куба, считаются различными; каждое из четырёх чисел можно использовать любое число раз (в том числе и не использовать вовсе). (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 256 способов.

Решение. Обозначим вершины куба $ABCDEFGH$ (см. рис.). Тогда, если расставить четыре числа в вершинах A, B, D и E, то остальные четыре числа ставятся однозначно. Действительно, числа в вершинах C, F и H вычисляются из соответствующих граней, а на вершину G составляются сразу три условия:



$$\begin{cases} (H+E+F+G) \,\vdots\, 4, \\ (C+D+H+G) \,\vdots\, 4, \\ (F+B+C+G) \,\vdots\, 4, \end{cases}$$

но они сводятся к одному условию, ведь $H+E$ и $B+C$ имеют одинаковые остатки при делении на 4 (из условий на переднюю и нижнюю грани), как и $E+F$ и $C+D$ (из условий на верхнюю и правую грани), так что G тоже вычисляется однозначно.

Поскольку повороты и отражения куба учитывать не надо, количество способов равно всем способам для первых четырёх вершин: $4^4 = 256$.

Критерии. Угаданный ответ — 1 балл.

Упущена проверка, что для числа G всегда будет решение — штраф в 3 балла.

4. В деревне Хитрецово живут 10 человек: *рыцари*, которые отвечают «Да», если то, о чём их спрашивают, верно, и «Нет», если неверно; *лжецы*, действующие наоборот; и *подражатели*, которые повторяют последнюю услышанную фразу. Новый глава деревни решил узнать, кто есть кто, для чего выстроил их в колонну и спросил (один раз): «Сосед перед вами — рыцарь?», а дальше каждый ответил по очереди от первого до последнего. Среди ответов прозвучало ровно 6 раз «Да» и ровно 1 раз «Нет». Какое наибольшее число подражателей могло быть среди жителей? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 8 подражателей.

Решение. Пример: ПППЛППППППР (первые три подражателя просто повторяют вопрос, потом лжец и вслед за ним пять подражателей говорят «Да», и наконец, рыцарь отвечает «Нет»).

Оценка. Заметим, что в любом случае ответ «Нет» и первый из ответов «Да» не могли быть произнесены подражателями, то есть по крайней мере двое — не подражатели.

Критерии. Только оценка — 2 балла. Только верный пример — 3 балла

5. Маленький мальчик Андрюша очень боится грозы, поэтому, чтобы заснуть, считает овец. При этом, когда до него доносится гром, он (от испуга) считает очередную овцу за две. Овцы пробегают раз в k секунд (где k — целое число больше двух). Гром раздаётся через равные промежутки времени, причём каждый раскат грома совпадает с появлением какой-то овцы. Первая овца пробежала во время грома, и, начиная отсчёт времени с этого момента (то есть с учётом первой овцы), на 60-й секунде Андрюша посчитал 16-ю овцу, а на 100-й секунде — 26-ю овцу. Как часто бьют молнии? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: раз в 25 секунд.

Решение. Обозначим за a число ударов молнии за первые 60 секунд и за b — число ударов за 100 секунд. Тогда реальные числа пробежавших овец равны $16-a$ за 60 секунд и $26-b$ за 100 секунд, между которыми прошло $15-a$ и $25-b$ промежутков соответственно. Промежутки равны по длине, поэтому

$$\frac{60}{15-a}=\frac{100}{25-b} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{15-a}{3}=\frac{25-b}{5} \quad\Leftrightarrow\quad 3b=5a,$$

то есть число ударов грома в первые 60 секунд кратно 3. Также мы знаем, что ударов грома было не больше, чем самих овец: $16-a\geqslant a$ или $a\leqslant 8$, откуда a равно 3 или 6. Целая длина промежутка (5 секунд) получается только при $a=3$ (и, следовательно, $b=5$).

Так как каждый раскат грома совпадает с появлением овцы, а овцы пробегают раз в 5 секунд, то время между ударами молнии кратно 5. За 60 секунд (включая начальный момент) гром гремел трижды, то есть между раскатами проходило 25 или 30 секунд, но с 30-секундными интервалами за 100 секунд не успело бы произойти 5 ударов.

Примечание. Теоретически фразу «на 60-й секунде Андрюша посчитал 16-ю овцу» можно интерпретировать как «на 60-й секунде Андрюша посчитал 16-ю и 17-ю овец» (вместо 15-й и 16-й, как подразумевается в решении). В таком случае получается, что овцы пробегают каждые 5 секунд, а молнии бьют каждые 20 секунд. Такое решение также засчитывалось как верное.

Критерии. За хотя бы один верный ответ — 2 балла.
Если доказывается, что 25 — единственный верный ответ — 7 баллов.
Если присутствует альтернативный ответ с подтверждающим примером и не доказывается, что других ответов нет — 3 балла.

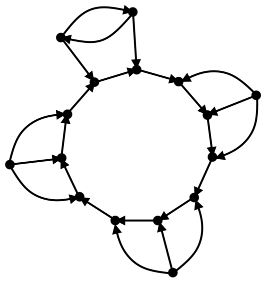
6. После инцидента с Гарри Поттером в Хогвартсе отменили ограничение на число участников в Турнире Нескольких Волшебников, зато ввели предварительное испытание: свободный чемпионат по волшебным дуэлям, в котором участники в свободном порядке выбирали себе соперников и устраивали дуэль (ничьих не бывает). Проигравший два раза из Турнира выбывает. Когда все приняли участие в трёх дуэлях, оказалось, что в Турнире остались всего 5 участников, причём только трое из них ни разу не проиграли. Сколько же участников соревновались за участие в Турнире Нескольких Волшебников? Для каждого возможного количества приведите пример. (*П. Д. Муленко*)

Ответ: 16 участников.

Решение. Обозначим за x число *выбывших* из Турнира участников. Тогда, с одной стороны, каждый из $x+5$ участников выступил в трёх дуэлях, поэтому их число равно $3\cdot(x+5)/2$ (пополам, так как каждую дуэль мы посчитали два раза); а с другой стороны, в каждой дуэли есть один програвший, поэтому число дуэлей равно числу поражений участников, то есть $2x+2$ (ещё по одному поражению от двух финалистов турнира):

$$\frac{3}{2}\cdot(x+5)=2x+2 \quad\Leftrightarrow\quad 3x+15=4x+4 \quad\Leftrightarrow\quad x=11.$$

Пример дуэлей на $11+5=16$ участников можно построить так: одиннадцать выбывших сыграли друг с другом по кругу, трое непобеждённых выигрывали по одному разу у троих из них, двое оставшихся финалистов сыграли два раза между собой и по одному с разу с оставшимися из выбывших (см. рис.; точками обозначены участники, стрелками — победители).



Критерии. Верный ответ и пример – 3 балла.

7. Найдите как можно большее натуральное число с попарно различными цифрами, обладающее следующим свойством: любое двузначное число, образованное двумя соседними цифрами в порядке их следования в числе, является простым. (Например, таким свойством обладает число 473, поскольку 47 и 73 — простые числа.) (*С. П. Павлов*)

Ответ: 89731.

Решение. Заметим, что при отсутствии в искомом числе чётных цифр оно будет не более чем пятизначным. Чтобы оно было пятизначным, необходимо использовать все нечётные цифры, причём цифру 5 необходимо поставить первой. Такое наибольшее возможное число строится однозначно: 59731.

Чётных цифр в искомом числе, очевидно, не более одной, и, если чётная цифра есть, стоит она на первом месте. В таком случае все остальные цифры — нечётные, причём пятёрку использовать уже нельзя. Максимально возможное число строится однозначно: 89731. Из двух найденных чисел выбираем наибольшее — 89731.

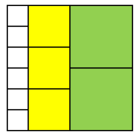
Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 7 класса

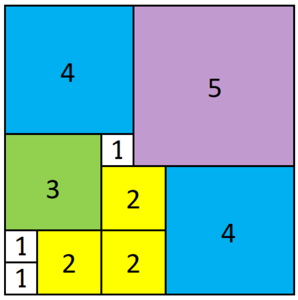
Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — что задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Можно ли разрезать какой-нибудь квадрат на 10 квадратов пяти различных размеров? (Каждый из пяти размеров должен встречаться хотя бы один раз.) **Примечание.** Справа приведён пример разрезания квадрата на 11 квадратов трёх различных размеров. (*А. А. Теслер*)



Ответ: да. Например, так (числа в квадратах обозначают длины их сторон):



Критерии. Только ответ — 0 баллов. Написаны возможные размеры квадратов, но не приведен пример самого разбиения — 0 баллов.

2. На доске написано пятизначное число. Рядом написали четырёхзначное число, полученное из исходного вычеркиванием средней цифры (например, если было написано 20723, то рядом написано 2023). Когда результат деления исходного пятизначного числа на это четырёхзначное будет целым? Найдите все такие пятизначные числа. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: Это все числа, кратные 1000, то есть $10\,000, 11\,000, \ldots, 99\,000$.

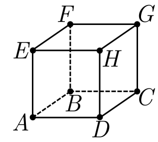
Решение. Обозначим через x число, образованное первыми двумя цифрами, через y — число, образованное последними двумя цифрами исходного числа, а через c — среднюю цифру. Тогда $1000x + 100c + y$ (исходное число) делится на $100x + y$ (новое число), то есть $100c - 9y$ делится на $100x + y \geqslant 1000$. С другой стороны, $-9 \cdot 99 \leqslant 100c - 9y \leqslant 900$, то есть $100c - 9y$ по модулю меньше 1000. Это значит, что $100c = 9y$. При ограничениях $0 \leqslant c \leqslant 9$ и $0 \leqslant y \leqslant 99$ из этого следует, что $c = y = 0$. Поэтому исходное число — это любое число вида $1000 \cdot x$, где $10 \leqslant x \leqslant 99$ — целое.

Критерии. Доказано, что все пятизначные числа кратные 1000 подходят – 2 балла. Доказано, что все остальные не подходят – 5 баллов.

3. Сколькими способами можно расставить в вершинах куба числа 1, 2, 3 или 4 при условии, что сумма чисел, лежащих в вершинах любой грани, должна быть кратна 4? Варианты, отличающиеся поворотом или отражением куба, считаются различными; каждое из четырёх чисел можно использовать любое число раз (в том числе и не использовать вовсе). (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 256 способов.

Решение. Обозначим вершины куба $ABCDEFGH$ (см. рис.). Тогда, если расставить четыре числа в вершинах A, B, D и E, то остальные четыре числа ставятся однозначно. Действительно, числа в вершинах C, F и H вычисляются из соответствующих граней, а на вершину G составляются сразу три условия:



$$\begin{cases} (H+E+F+G) \vdots 4, \\ (C+D+H+G) \vdots 4, \\ (F+B+C+G) \vdots 4, \end{cases}$$

но они сводятся к одному условию, ведь $H+E$ и $B+C$ имеют одинаковые остатки при делении на 4 (из условий на переднюю и нижнюю грани), как и $E+F$ и $C+D$ (из условий на верхнюю и правую грани), так что G тоже вычисляется однозначно.

Поскольку повороты и отражения куба учитывать не надо, количество способов равно всем способам для первых четырёх вершин: $4^4 = 256$.

Критерии. Угаданный ответ — 1 балл.

Упущена проверка, что для числа G всегда будет решение — штраф в 3 балла.

4. В деревне Хитрецово живут 10 человек: *рыцари*, которые отвечают «Да», если то, о чём их спрашивают, верно, и «Нет», если неверно; *лжецы*, действующие наоборот; и *подражатели*, которые повторяют последнюю услышанную фразу. Новый глава деревни решил узнать, кто есть кто, для чего выстроил их в колонну и спросил (один раз): «Сосед перед вами — рыцарь?», а дальше каждый ответил по очереди от первого до последнего. Среди ответов прозвучало ровно 6 раз «Да» и ровно 1 раз «Нет». Затем он так же спросил всех, кроме последнего: «Сосед за вами — лжец?» На этот раз среди ответов снова прозвучало ровно 6 раз «Да». Какое наибольшее число лжецов могло быть среди жителей?

(*П. Д. Муленко*)

Ответ: 3 лжеца.

Решение. Рассмотрим первый вопрос. Раз только 7 ответов были «Да» или «Нет», остальные три были повторениями заданного вопроса, то есть первые трое человек точно подражатели. Четвёртый ответ был уже дан точно не подражателем.

Если это был рыцарь, то он бы ответил «Нет», а все следующие ответы были «Да». Тогда следующий за ним человек (пятый по счёту) точно рыцарь (лжец не мог сказать правду, а подражатель повторил бы ответ «Нет»). Назовём эту расстановку «ПППРР∗».

Если же четвёртый человек был лжец, то он ответил «Да». Единственный ответ «Нет» тогда мог сказать или лжец после рыцаря, или рыцарь после не рыцаря. Но первый вариант невозможен, так как такой рыцарь (стоящий перед лжецом) должен сказать «Да», то есть перед ним тоже будет стоять рыцарь, который тоже скажет «Да», и так далее. Поэтому «Нет» говорит первый рыцарь в шеренге. Назовём эту расстановку «ПППЛ∗Р∗».

На второй вопрос прозвучали только ответы «Да» от людей с четвёртого по девятого включительно. В расстановке «ПППРР∗» это означает, что первый рыцарь назвал второго лжецом, что приводит к противоречию. Остаётся расстановка «ПППЛ∗Р∗», в которой первый рыцарь оказывается и последним человеком в ряду, так как иначе следом за ним должен был стоять лжец, который не мог бы ответить «Да» на первый вопрос. Таким образом, единственная возможная расстановка выглядит как «ПППЛ$*$Р», причём на свободных местах стоят только лжецы и подражатели.

Всякий лжец, сказав «Да», однозначно определяет следующего человека как не лжеца, то есть лжецы рядом не стоят. Отсюда получается, что лжецы могут стоять не более, чем на трёх местах (например, на 4, 6 и 8).

Критерии. Приведён пример расстановки для 3 лжецов — 2 балла.

Доказано, что более трёх лжецов не может быть, но пример не приведён — 5 баллов.

5. Маленький мальчик Андрюша очень боится грозы, поэтому, чтобы заснуть, считает овец. При этом, когда до него доносится гром, он (от испуга) вычитает очередную овцу, а не прибавляет. Овцы пробегают раз в k секунд (где k — целое число больше двух). Гром раздаётся через равные промежутки времени, причём каждый раскат грома совпадает с появлением какой-то овцы. Начиная отсчёт времени с первой овцы, на 60-й секунде Андрюша посчитал 8-ю овцу, а на 100-й секунде — 12-ю овцу. Как часто бьют молнии? (*П. Д. Муленко*)

Ответ: раз в 16 секунд.

Решение. Обозначим за a число ударов молнии за первые 60 секунд и за b — число ударов за 100 секунд. Тогда реальные числа пробежавших овец равны $8+2a$ за 60 секунд и $12+2b$ за 100 секунд, между которыми прошло $7+2a$ и $11+2b$ промежутков соответственно. Промежутки равны по длине, поэтому

$$\frac{60}{7+2a} = \frac{100}{11+2b} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7+2a}{3} = \frac{11+2b}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 3b = 5a+1,$$

то есть число ударов грома в первые 60 секунд даёт остаток 1 при делении 3. Также мы знаем, что длина промежутка более двух секунд, то есть за первые 60 секунд прошло не более 30 овец (включая самую первую): $7+2a \leqslant 30$ или $a \leqslant 11$, откуда a равно 1, 4, 7 или 10. Целая длина промежутка (4 секунды) получается только при $a = 4$ (и, следовательно, $b = 7$).

Так как каждый раскат грома совпадает с появлением овцы, а овцы пробегают раз в 4 секунды, то время между ударами молнии кратно 4. За 100 секунд гром гремел 7 раз, то есть между раскатами проходило больше 12 секунд ($100/8 > 12$) и меньше 17 секунд ($100/6 < 17$). Таким образом, молния била раз в 16 секунд, что возможно, если она ударила в первый раз на первой или второй овце.

6. После инцидента с Гарри Поттером в Хогвартсе отменили ограничение на число участников в Турнире Нескольких Волшебников, зато ввели предварительное испытание: свободный чемпионат по волшебным дуэлям, в котором участники в свободном порядке выбирали себе соперников и устраивали дуэль (ничьих не бывает). Проигравший три раза из Турнира выбывает. Когда все приняли участие в четырёх дуэлях, оказалось, что в Турнире остались аккурат трое участников. При каком наибольшем числе участников такое могло произойти? Не забудьте привести пример. (*П. Д. Муленко*)

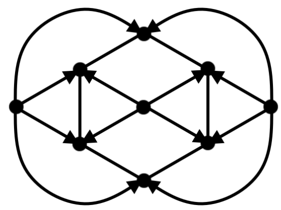
Ответ: 9 участников.

Решение. Обозначим за x число *выбывших* из Турнира участников. Тогда, с одной стороны, каждый из $x+3$ участников выступил в четырёх дуэлях, поэтому их число равно $4 \cdot (x+3)/2 = 2x+6$ (пополам, так как каждую дуэль мы посчитали два раза); а с другой стороны, в каждый дуэли есть один програвший, поэтому число дуэлей равно числу поражений участников, то есть $3x + y$, где y — целое число от 0 до 6 — число поражений финалистов Турнира:

$$2x + 6 = 3x + y \quad \Leftrightarrow \quad x = 6 - y.$$

Таким образом, наибольшее число участников $(6 + 3 = 9)$ будет достигнуто при $y = 0$ (то есть если финалисты не проиграют ни разу).

Пример дуэлей можно построить так: шестеро выбывших сыграли друг с другом по кругу, а трое непобеждённых выигрывали по одному разу у четверых из них так, что у каждый из выбывших проиграл двум финалистам (см. рис.; точками обозначены участники, стрелками — победители).



Критерии. Пример — 2 балла, оценка — 5 баллов.

7. В выражении $\dfrac{a+b}{c+d-e} + \dfrac{f+g}{h+i-k}$ буквами обозначены попарно различные цифры. Чему равно наибольшее возможное значение этого выражения? (*С. П. Павлов*)

Ответ: $\dfrac{5+7}{0+2-1} + \dfrac{8+9}{3+4-6} = 29.$

Решение. Каждая дробь максимальна, если её числитель максимально возможный, а знаменатель — минимально возможный положительный. Выпишем возможные значения числителей в порядке уменьшения: $17 = 9 + 8$, $16 = 9 + 7$, $15 = 8 + 7$ или $9 + 6$, $14 = 9 + 5$ или $8 + 6$, $13 = 9 + 4$ или $8 + 5$ или $7 + 6$, и так далее. Нетрудно видеть, что наибольшая возможная сумма двух из этих значений, составленная из четырёх различных цифр, равна $30 = 17 + 13 = (9 + 8) + (7 + 6)$ или $15 + 15 = (9 + 6) + (8 + 7)$. Именно этому будет равна сумма дробей при условии равенства 1 их знаменателей.

Заметим, что в каждом случае в числителях использованы цифры 9, 8, 7, 6. Поэтому для получения общего значения в 30 необходимо из оставшихся цифр $(0, 1, 2, 3, 4, 5)$ образовать две группы по 3 числа, в каждой из которых сумма двух цифр за вычетом оставшейся равна 1. Но это невозможно: если бы такое удалось, то сумма двух знаменателей $(c + d - e) + (h + i - k)$ должна была бы равняться 2. Так как $0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, то при замене любого плюса на минус результат уменьшается на чётное число, а потому если заменить два плюса на минусы, то результат останется нечётным.

Значит, сумма знаменателей не может быть равна 2, тем самым, общая сумма в 30 недостижима. Если один из знаменателей сделать равным хотя бы 2, то максимальная сумма даже теоретически не превысит $17/1 + 17/2 = 25{,}5$. А со знаменателями, равными 1, и общей суммой в 29 пример строится.

Критерии. Пример — 2 балла, оценка — 5 баллов.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 8 класса

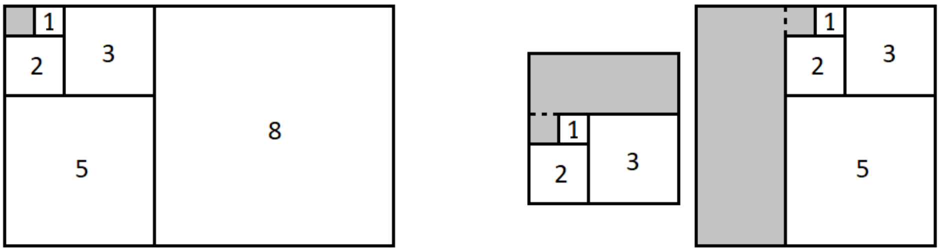
Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — что задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Для каких натуральных N верно, что квадрат можно разрезать на N квадратов, среди которых нет одинаковых, и один шестиугольник? (*А. А. Теслер*)

Ответ: для всех.

Решение.



Заметим, что при всех N существует способ составить прямоугольник из $N+1$ квадратов, среди которых повторяются только два, причём один из повторяющихся квадратов находится в углу. Процесс порождения таких прямоугольников показан на рисунке слева (каждый новый квадрат добавляется либо справа, либо снизу; в каждом квадрате написана длина его стороны). Теперь возьмём прямоугольник, содержащий $N+1$ квадрат, и дополним его до квадрата сверху или слева (примеры для $N=3$ и $N=4$ показаны на двух правых рисунках). Остаток большого квадрата примыкает к лишнему квадрату 1×1, образуя шестиугольник.

Критерии. Разобраны отдельные примеры — 0 баллов.
Задача решена с верным ответом с каким-то верным недоказанным предположением — максимум 3 балла.
Доказано, что все $N > const$ подходят — максимум 5 баллов.

2. Катя написала на доске два числа, после чего зашифровала их по правилам буквенных ребусов (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). Получились слова $FORMULO$ и $JARMILO$. Какое минимальное и максимальное значения может принимать разность между исходными числами? (*А. А. Теслер*)

Примечание. В переводе с языка эсперанто «formulo» — формула, «jarmilo» — тысячелетие.

Ответ: 99300 и 8800500.

Решение. Заметим, что эта разность равна $|10^6(F-J)+10^5(O-A)+10^2(U-I)|$.

Чтобы максимизировать разность, надо сначала максимизировать $F-J$, потом $O-A$ и наконец $U-I$. Максимальное значение $F-J$ равно $9-1=8$, максимальное при этом условии значение $O-A$ равно $8-0=8$, наконец, максимальное значение $U-I$ при этих условиях равно $7-2=5$. Тогда разность равна 8800500. Пример: $9854738-1054238=8800500$.

Чтобы минимизировать разность (при условии, что она положительна), нужно, чтобы $F - J$ по модулю было минимально. Не умаляя общности, пусть $F > J$, тогда минимальное значение $F - J$ равно 1. Две другие разности надо сделать отрицательными и как можно большими по модулю. Минимальное значение $O - A$ равно $0 - 9 = -9$, а минимальное значение $U - I$ при этом условии $1 - 8 = -7$. Тогда разность будет равна $10^6 - 9 \cdot 10^5 - 7 \cdot 10^2 = 99300$. Пример: $3045160 - 2945860 = 99300$.

Замечание. Если считать, что разность может быть и отрицательной, то минимальная разность противоположна максимальной и равна -8800500.

Критерии. Оба решения — и с ответом -8800500, и с ответом 99300 — считаем верными.

За каждый ответ с примером — 1 балл.

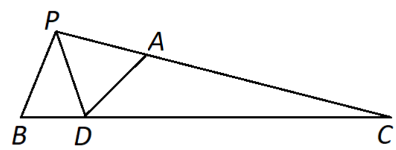
Арифметические ошибки — штраф в 2 балла.

Если верно посчитана положительная разница и неверно отрицательная — баллы не снимаются.

3. В треугольнике ABC на стороне BC взята такая точка D, что $AD + AC = BC$. Известно, что $\angle ACD = 20^\circ$, $\angle CAD = 120^\circ$. Найдите величину угла B. (*С. П. Павлов*)

Решение.

Продолжим сторону CA за точку A на отрезок $AP = AD$. Рассмотрим треугольник PAD. Угол PAD как смежный с углом CAD, величина которого дана, равен 60°. К тому же этот треугольник равнобедренный (по построению, $AP = AD$). Значит, $\triangle PAD$ равносторонний.



Далее рассмотрим треугольник PBD. Поскольку $\angle ADC = 180^\circ - (120^\circ + 20^\circ) = 40^\circ$, то, рассматривая углы при вершине B, получаем, что $\angle PDB = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$. Но такую же величину имеет и ещё один угол рассматриваемого треугольника: $\angle PBD = 80^\circ$ (треугольник PCB равнобедренный по построению). Тем самым, равнобедренным является и треугольник PBD. Таким образом, $PB = PA$, т. е. треугольник PBA также равнобедренный, и величина его угла P нам известна (80°). Поэтому $\angle PBA = 50^\circ$. Теперь мы можем определить величину искомого угла: $\angle ABC = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$.

Критерии. Найден угол $\angle BPC = 80^\circ$ — 4 балла.

4. Составителям олимпиады в качестве зарплаты достались 99 бубликов. Первый взял 1, 2 или 3 бублика. Второй забрал на один больше или на один меньше, чем первый. Третий — на один больше или на один меньше, чем второй. И так далее: каждый человек берёт себе на один бублик больше или на один меньше, чем предыдущий. В результате последний составитель как раз забрал все оставшиеся бублики. Определите минимальное возможное количество составителей. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 13.

Решение. Если составителей 11, то максимальное количество бубликов $3 + 4 + \ldots + 13 = 88 < 99$. Если их 12, то количество бубликов чётно (поскольку чётность при переходе к следующему составителю всегда меняется, то получается 6 чётных и 6 нечётных чисел). Значит, составителей хотя бы 13. Пример: $3+4+5+6+5+6+7+8+9+10+11+12+13 = 99$.

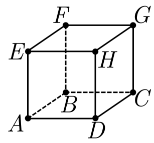
Критерии. Пример оценивается в 3 балла, случаи 11 и 12 составителей — по 2 балла.

5. Сколькими способами можно расставить в вершинах куба числа 1, 2, 3 или 4 при условии, что сумма чисел, лежащих в вершинах любой грани, должна быть кратна 4? Варианты,

отличающиеся поворотом или отражением куба, считаются различными; каждое из четырёх чисел можно использовать любое число раз (в том числе и не использовать вовсе). (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 256 способов.

Решение. Обозначим вершины куба $ABCDEFGH$ (см. рис.). Тогда, если расставить четыре числа в вершинах A, B, D и E, то остальные четыре числа ставятся однозначно. Действительно, числа в вершинах C, F и H вычисляются из соответствующих граней, а на вершину G составляются сразу три условия:



$$\begin{cases} (H+E+F+G) \vdots 4, \\ (C+D+H+G) \vdots 4, \\ (F+B+C+G) \vdots 4, \end{cases}$$

но они сводятся к одному условию, ведь $H+E$ и $B+C$ имеют одинаковые остатки при делении на 4 (из условий на переднюю и нижнюю грани), как и $E+F$ и $C+D$ (из условий на верхнюю и правую грани), так что G тоже вычисляется однозначно.

Поскольку повороты и отражения куба учитывать не надо, количество способов равно всем способам для первых четырёх вершин: $4^4 = 256$.

Критерии. Угаданный ответ — 1 балл.

Упущена проверка, что для числа G всегда будет решение — штраф в 3 балла.

6. На острове живут 2023 человека. Некоторые из них дружат между собой (если А дружит с Б, то и Б дружит с А), причём у каждого не более 10 друзей. На остров едет бригада врачей, которые собираются привить часть жителей. Требуется, чтобы у каждого, кто останется не привит, все друзья были привиты. Какое минимальное количество доз вакцины врачи должны взять с собой, чтобы их гарантированно хватило? (*О. А. Пяйве*)

Ответ: 1839.

Решение. *Оценка.* Раскрасим вершины графа правильным образом — для этого хватит 11 цветов. Вакцинируем всех, кроме тех, чей цвет оказался самым популярным. Тогда количество доз не превышает $[2023 \cdot \frac{10}{11}] = 1839$.

Пример. Если разбить всех на полные 11-вершинные графы (те, кто останется, образуют полный подграф поменьше), то в каждом подграфе можно оставить только одного, итого не вакцинированы будут лишь 184 человека.

Критерии. Отдельно пример — 2 балла. Отдельно оценка — 4 балла.

Решение с ответом 1840 — 5 баллов. Только оценка или только пример на 1840 — 1 балл.

7. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1$. (*С. П. Павлов*)

Решение. Умножим обе части уравнения на 4 и прибавим к ним по 16. Получившееся уравнение запишем в виде $(xy+4)^2 - (2x+2y-xy)^2 = 20$. Разложим левую часть на множители и поделим уравнение на 4. Приходим к равенству $(2+x+y)(xy+2-x-y) = 5$. Рассматривая 4 варианта для значений выражений в скобках (-5 и -1, -1 и -5, 1 и 5, 5 и 1), находим пары (x, y): $(-5, 2), (2, -5), (1, 2), (2, 1)$.

Критерии. Только найдены 4 ответа (без обоснования, что других нет) — 2 балла. Только какие-то два ответа — 1 балл.

Решение, приводящее только к одной паре ответов — 4 балла.

Решения задач для 9 класса

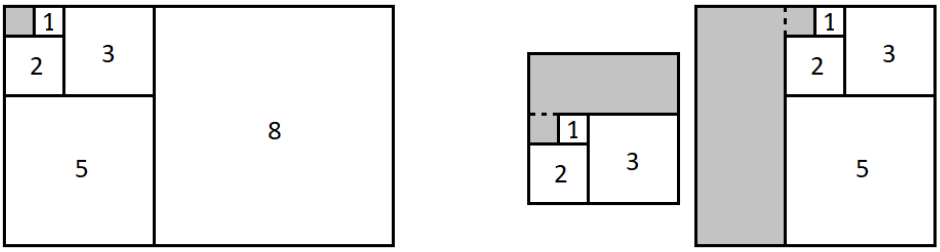
Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — что задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Для каких натуральных N верно, что квадрат можно разрезать на N квадратов, среди которых нет одинаковых, и один шестиугольник? (*А. А. Теслер*)

Ответ: для всех.

Решение.



Заметим, что при всех N существует способ составить прямоугольник из $N+1$ квадратов, среди которых повторяются только два, причём один из повторяющихся квадратов находится в углу. Процесс порождения таких прямоугольников показан на рисунке слева (каждый новый квадрат добавляется либо справа, либо снизу; в каждом квадрате написана длина его стороны). Теперь возьмём прямоугольник, содержащий $N+1$ квадрат, и дополним его до квадрата сверху или слева (примеры для $N=3$ и $N=4$ показаны на двух правых рисунках). Остаток большого квадрата примыкает к лишнему квадрату 1×1, образуя шестиугольник.

Критерии. Разобраны отдельные примеры — 0 баллов.

Задача решена с верным ответом с каким-то верным недоказанным предположением — максимум 3 балла.

Доказано, что все $N > const$ подходят — максимум 5 баллов.

2. В выпуклом четырёхугольнике точки M и N — середины сторон BC и AD соответственно. Докажите, что середины отрезков AM, DM, BN, CN лежат на одной прямой или образуют параллелограмм. (*Л. С. Корешкова*)

Решение. Обозначим середины четырёх указанных отрезков через E, F, G, H соответственно. Докажем, что векторы $\overrightarrow{EG}$ и $\overrightarrow{HF}$ противоположны — из этого как раз будет следовать, что отрезки EG и HF равны и параллельны (признак параллелограмма) или лежат на одной прямой. Иначе говоря, нужно доказать, что $\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{0}$.

Пусть O — произвольная точка, которую мы будем использовать как начало координат. Тогда

$$\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{HF}=(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OE})-(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OH})=$$
$$=\left(\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{ON}}{2}-\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}}{2}\right)-\left(\frac{\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OM}}{2}-\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{ON}}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{ON}\right)=$$
$$=\left(\overrightarrow{ON}-\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}}{2}\right)-\left(\overrightarrow{OM}-\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}\right)=\overrightarrow{0},$$

поскольку M и N — середины BC и AD.

Критерии. Каждый нетривиальный факт, который не был доказан — штраф в 2 балла.

Задача решена в случае $BC \parallel AD$ — 2 балла.

Факт, что медиана делит среднюю линию пополам, не требует доказательства.

3. График квадратичной функции, старший коэффициент которой равен 1, пересекает прямую $y=x$ в двух точках, расстояние между которыми равно 3, а прямую $y=-x$ — в двух точках, расстояние между которыми равно 2. А каково расстояние между точками, в которых он пересекает прямую $y=2x$? (*А. А. Теслер*)

Ответ: $\dfrac{5\sqrt{7}}{2}$.

Решение. Запишем нашу функцию в виде $f(x)=x^2+px+q$. Поскольку прямые $y=\pm x$ проходят под углом 45° к оси абсцисс, то расстояние между точками пересечения в $\dfrac{1}{\cos 45^\circ}=\sqrt{2}$ раз больше, чем разность между корнями уравнения $f(x)=\pm x$. Таким образом, разность между корнями трёхчлена $x^2+(p-1)x+q$ равна $\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\sqrt{4{,}5}$, а разность между корнями трёхчлена $x^2+(p+1)x+q$ равна $\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Из формулы $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ легко понять (учитывая, что $a=1$), что эта разность равна $\sqrt{D}$. Значит, дискриминант первого уравнения $D_1=(p-1)^2-4q=4{,}5$, а второго — $D_2=(p+1)^2-4q=2$. Вычитая из второго равенства первое, имеем $4p=-2{,}5$, то есть $p=-\frac{5}{8}$. (Для справки: $q=-\frac{119}{256}$.)

Теперь поймём, что требуется найти. Абсциссы точек пересечения с прямой $y=2x$ равны корням уравнения $f(x)-2x=0$, а разность между этими абсциссами равна корню дискриминанта. Дискриминант же равен
$D_3=(p-2)^2-4q=p^2-4p+4-4q=(p^2-2p+1-4q)-2p+3=D_1-3b+3=4{,}5+2\cdot\frac{5}{8}+3=\frac{35}{4}$.

Расстояние между точками пересечения является гипотенузой треугольника, меньший катет которого равен $\sqrt{\frac{35}{4}}$, а больший вдвое больше, то есть оно равно $\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{35}{4}}=\frac{5\sqrt{7}}{2}$.

Критерии. Посчитан коэффициент p — 3 балла. Посчитан D_3 — ещё 2 балла.

То есть решение, где нашли p и обсчитались в D_3, а дальнейшая логика решения неверная или отсутствует, даёт 4 балла.

А решение, где нашли p и обсчитались в D_3, а дальнейшая логика верна, стоит 5 баллов.

Если ответ $\sqrt{\frac{35}{4}}$ — 6 баллов.

За факт про то, что расстояние в $\sqrt{2}$ раз больше, чем проекция, — 1 балл.

4. Дан куб $3\times3\times3$, из которого убирают по одному маленькому кубику так, чтобы тело «не разваливалось» (должна сохраняться возможность попасть из любого кубика в любой другой, переходя каждый раз в соседний по грани). В конце получается тело, площадь поверхности которого такая же, как у исходного куба. Какое максимальное количество кубиков могли убрать? (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 14 кубиков.

Решение. *Пример.* Уберём из одной грани куба всё, кроме центра, из противоположной грани уберём середины рёбер, а также уберём центры каких-то двух оставшихся противоположных граней.

Оценка. Пусть нам удалось оставить k кубиков так, что они примыкают по n внутренним граням друг к другу, а площадь поверхности та же, что у исходного куба. Тогда $6k-2n=54$, то есть $3k=n+27$. С другой стороны, если получившееся тело связно по граням, то граф, в котором вершины — оставшиеся маленькие кубики, а рёбра — внутренние грани, является связным. Следовательно, $n\geqslant k-1$ и $2k\geqslant 26$, то есть останется $k\geqslant 13$ кубиков, или будет убрано не более чем $27-13=14$ кубиков.

Критерии. Если доказана только оценка или приведён только пример, то даётся 3 балла.

5. Сумма пяти натуральных чисел a, b, c, d, e равна 2023. Какое наименьшее значение может принять наибольшая из сумм $a+b$, $b+c$, $c+d$, $d+e$? (*С. П. Павлов*)

Ответ: 675.

Решение. *Пример.* Рассмотрим такую пятёрку чисел: 673, 2, 673, 2, 673. Их сумма 2023, а каждая из указанных в условии сумм равна 675.

Оценка. Покажем, что наибольшая из сумм не меньше 675. Пусть это не так, и для каких-то пяти натуральных чисел наибольшая из этих сумм не превосходит 674. Значит, не превосходит 674 и сумма $a+b$, и сумма $c+d$. Но поскольку $a+b+c+d+e=2023$, то число e не менее 675. Но тогда сумма $d+e$ не меньше 676. Полученное противоречие завершает доказательство.

6. На сейфе есть 20 рубильников, расположенных в ряд. Каждый из них может находиться в положении 0 или 1. Сами переключатели скрыты, можно лишь давать сейфу следующие команды:
а) переключить одновременно два соседних рубильника;
б) переключить одновременно два рубильника, между которыми есть ровно один рубильник.
Если все рубильники окажутся в положении 1, сейф откроется автоматически. Начальное положение рубильников неизвестно, но известно, что количество «нулей» и «единиц» одинаково. Можно ли открыть сейф? (*О. А. Пяйве*)

Решение. Решим задачу следующим образом: перечислим все возможные исходные положения рубильников. Пусть $s_1, s_2, \ldots, s_N$ — их список. Будем по очереди (для k от 1 до N) предполагать, что рубильники исходно находятся в положении s_k, и проделывать действия, которые — если это действительно так — переведут рубильники в положение «все единицы». Если же в результате этих действий сейф не открылся — значит, наше предположение было неверным; тогда мы проделываем все действия в обратном порядке (возвращаясь к исходному положению), после чего переходим к следующему k.

Итак, осталось научиться из данного положения s_k, в котором 10 нулей и 10 единиц, получать положение со всеми единицами. Что ж, пусть $i_1, i_2, \ldots, i_{10}$ — номера позиций, на которых в строке s_k стоят нули. Тогда переключение пар рубильников $(i_1,\, i_1 + 1)$, $(i_1 + 1, i_1 + 2)$, …, $(i_2 - 1, i_2)$ приведёт к тому, что первые два нуля заменятся единицами (а между ними так и останутся единицы). Аналогичным образом следующие нули тоже заменяются на единицы.

Замечание. Мы ни разу не воспользовались второй из операций — переключением рубильников, расположенных через один (к тому же она в любом случае получается комбинацией двух операций первого типа).

Критерии. Решение, в котором предполагается, что известно исходное положение рубильников, заведомо неверно (даёт 0 баллов).

7. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1$. (*С. П. Павлов*)

Решение. Умножим обе части уравнения на 4 и прибавим к ним по 16. Получившееся уравнение запишем в виде $(xy + 4)^2 - (2x + 2y - xy)^2 = 20$. Разложим левую часть на множители и поделим уравнение на 4. Приходим к равенству $(2+x+y)(xy+2-x-y) = 5$. Рассматривая 4 варианта для значений выражений в скобках (-5 и -1, -1 и -5, 1 и 5, 5 и 1), находим пары (x, y): $(-5, 2), (2, -5), (1, 2), (2, 1)$.

Критерии. Только найдены 4 ответа (без обоснования, что других нет) — 2 балла. Только какие-то два ответа — 1 балл.

Решение, приводящее только к одной паре ответов — 4 балла.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 10 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — что задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Найдите все такие положительные x, что последовательность $\{x\}$, $[x]$, x является геометрической прогрессией. (*Л. С. Корешкова*)

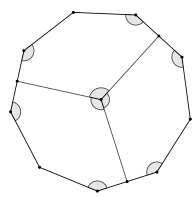
   Примечание. $[x]$ — это целая часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x; $\{x\}$ — дробная часть числа x, то есть разность между x и его целой частью.

   Решение. Пусть $n = [x]$ и $\{x\} = \alpha$. В геометрической прогрессии из неотрицательных чисел, у которой последний член ненулевой, все члены положительны, то есть $n > 0$ и $0 < \alpha < 1$. Данная последовательность будет геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда $\alpha(n + \alpha) = n^2$, то есть $\alpha^2 + \alpha n = n^2$. Левая часть меньше $n + 1$, так что $n^2 \leqslant n$ и $n = 1$. У получившегося квадратного уравнения единственный положительный корень — это $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, он меньше 1. Тогда $x = \alpha + n = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

   Критерии. За найденное решение даётся 2 балла. За найденное в явном виде соотношение между целой и дробной частью также даётся 2 балла.

2. На трёх сторонах выпуклого девятиугольника отмечено по одной точке (не совпадающей с вершинами). Внутри девятиугольника выбрали точку O и соединили с точками, отмеченными на сторонах. В результате девятиугольник разбился на три шестиугольника. Могут ли все три шестиугольника оказаться вписанными? (*А. А. Теслер*)

   Решение.
   У вписанного шестиугольника сумма углов, взятых через один, должна равняться $360°$. Поэтому сумма девяти углов, отмеченных на рисунке, равна $180° \cdot 6$. В то же время сумма всех углов девятиугольника равна $180° \cdot 7$, а с добавлением углов при вершине O — $180° \cdot 9$. Но это значит, что сумма трёх неотмеченых углов девятиугольника равна $180° \cdot 3$, что невозможно.

3. Дан куб $3 \times 3 \times 3$, из которого убирают по одному маленькому кубику так, чтобы тело «не разваливалось» (должна сохраняться возможность попасть из любого кубика в любой другой, переходя каждый раз в соседний по грани). В конце получается тело, площадь поверхности которого такая же, как у исходного куба. Какое максимальное количество кубиков могли убрать? (*Л. С. Корешкова*)

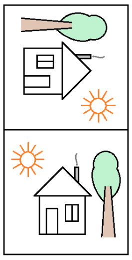
   Ответ: 14 кубиков.

   Решение. *Пример.* Уберём из одной грани куба всё, кроме центра, из противоположной грани уберём середины рёбер, а также уберём центры каких-то двух оставшихся противоположных граней.

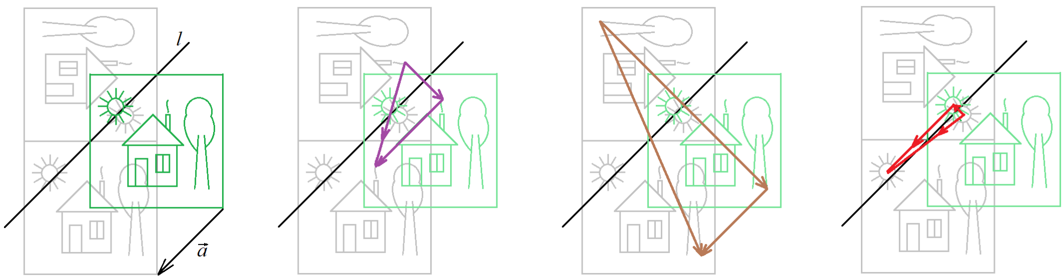
   Оценка. Пусть нам удалось оставить k кубиков так, что они примыкают по n внутренним граням друг к другу, а площадь поверхности та же, что у исходного куба. Тогда $6k - 2n = 54$, то есть $3k = n + 27$. С другой стороны, если получившееся тело связно по граням, то граф, в котором вершины — оставшиеся маленькие кубики, а рёбра — внутренние грани, является связным. Следовательно, $n \geqslant k-1$ и $2k \geqslant 26$, то есть останется $k \geqslant 13$ кубиков, или будет убрано не более чем $27-13=14$ кубиков.

Критерии. Если доказана только оценка или приведён только пример, то даётся 3 балла.

4. Петя разместил две одинаковых квадратных стеклянных пластины с рисунками, как показано справа. Для всякой точки, лежащей в нижнем квадрате, можно найти расстояние между ней и точкой верхнего квадрата, которая ей соответствует (то есть с которой она совпадёт, если совместить рисунки на пластинах). Для каких точек квадрата это расстояние минимально и чему оно равно, если сторона квадрата — 1 дециметр? (*А. А. Теслер*)



Решение. Рассмотрим движение плоскости, переводящее верхний квадрат в нижний. Оно является скользящей симметрией, то есть композицией симметрии относительно прямой l и переноса на вектор $\overrightarrow{a}$ (см. левую картинку). Для каждой точки расстояние — гипотенуза треугольника, катеты которого — перемещение при симметрии и перемещение при переносе (примеры приведены на картинках). Второй из катетов постоянен (и равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$ дм), а первый катет надо минимизировать. В случае, когда точки лежат на оси симметрии (прямая, проходящая через середины двух смежных сторон квадрата), он равен нулю, поэтому для этих точек расстояние минимально и равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$ дм.



Критерии. За найденный ответ с доказательством, что такое расстояние достигается, даётся 2 балла.

5. Числа a, b, c таковы, что $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{a}=6$, $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c}=2$. Чему может быть равно значение выражения $\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{b^3}{c^3}+\dfrac{c^3}{a^3}$? (*С. П. Павлов*)

Решение. Пусть $x=\frac{a}{b}, y=\frac{b}{c}, z=\frac{c}{a}$. Тогда $xyz=1$, $x+y+z=6$, $xy+yz+xz=2xyz=2$, а найти следует значение выражения $x^3+y^3+z^3$. Заметим, что

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).$$

Значит, $x^3+y^3+z^3=3+6\left((x+y+z)^2-3(xy+xz+yz)\right)=3+6\cdot(36-6)=183$.

Замечание. На самом деле таких вещественных чисел a, b, c не существует, так как x^2y^2+ $+y^2z^2+z^2x^2=(xy+yz+zx)^2-2(x+y+z)xyz=-8<0$. Они существуют как комплексные числа: можно найти $\{x, y, z\}$ как множество корней кубического многочлена t^3-6t^2+2t-1, а потом взять, например, $a=xy$, $b=y$, $c=1$.

Ответ: 183.

Критерии. И найденный ответ с доказательством (когда предполагается существование a, b, c), и доказательство отсутствия таких вещественных чисел оцениваются в 7 баллов.

6. У калькулятора есть кнопка включения и ещё две кнопки — красная и синяя. При включении калькулятор показывает число 10, при нажатии на красную кнопку к числу на экране прибавляется 10, а при нажатии на синюю кнопку число умножается на 10. Мария включает калькулятор, а потом в случайном порядке нажимает красную и синюю кнопки — каждую по 10 раз (все последовательности нажатий равновероятны). Какова вероятность, что получилось число, меньшее 111 111 111 111? (*А. А. Теслер*)

Решение. Будем записывать последовательность нажатий на кнопки как строку из букв С и К. Всего имеется C_{20}^{10} возможных последовательностей. Отсортируем все такие строки в таком порядке, что получающиеся числа будут идти по возрастанию. Этот порядок является лексикографическим (то есть сортировка по алфавиту, в котором первая буква С, а вторая К) в силу неравенства $10x + 10 < 10x + 100$, то есть при замене подстроки СК на КС значение увеличивается.

Нам нужно количество строк, не больших СКСКСКСКСКСКСКСКСКСК (у неё значение 111 111 111 110, а у следующей за ней СКСКСКСКСКСКСКСКСККС уже 111 111 111 200). Это в точности строки вида $(\text{СК})^N\text{СС}s$ (где $N \geqslant 0$; s — произвольный остаток, содержащий $10 - N$ букв К), а также сама строка $(\text{СК})^{10}$ целиком.

Итого ответ — это
$$\frac{\sum_{N=0}^{9} \mathrm{C}_{20-2N-2}^{10-N} + 1}{\mathrm{C}_{20}^{10}} = \frac{60}{187}.$$

Ответ: $\frac{60}{187}$.

Критерии. Если доказан некий способ, позволяющий найти ответ руками (например, формула с биномиальными коэффициентами), то даётся 5 баллов.

7. Назовём натуральное число *красивым*, если у него сумма натуральных делителей, кратных 5, равна сумме чётных натуральных делителей и отлична от нуля. Сколько из чисел от 1 до 10^{12} красивые? (*А. А. Теслер*)

Ответ: 10^9.

Решение. Пусть число n имеет вид $n = 2^a \cdot 5^b \cdot t$, где t не делится ни на 2, ни на 5. Тогда делители можно разбить на группы так, что в каждой группе есть: один делитель x (не кратный ни 2, ни 5); делители вида $2^i \cdot x$, где $i \geqslant 1$; делители вида $5^j \cdot x$, где $j \geqslant 1$; делители вида $2^i \cdot 5^j \cdot x$, где $i,j \geqslant 1$. Последние делители можно не учитывать, поскольку они учитываются в обоих случаях. Сумма делителей второго типа равна $x\cdot(2+2^2+\ldots+2^a)$, а третьего — $x \cdot (5 + 5^2 + \ldots + 5^b)$. Суммируя по всем $x|t$, получаем, что для исполнения условия должно быть $2 + 2^2 + \ldots + 2^a = 5 + 5^2 + \ldots + 5^b$.

Легко находимое решение — $a = 4, b = 2$, поскольку $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 5 + 5^2 = 30$. Это означает, что число делится на $2^4 \cdot 5^2 = 400$, но его частное от деления на 400 не кратно ни 2, ни 5. Иначе говоря, это число вида $400m$, где m даёт остаток 1, 3, 7 или 9 при делении на 10. Таких чисел 4 среди каждых 4000 последовательных чисел, то есть среди первых 10^{12} чисел их 10^9.

Поищем другие решения. Левая часть равна $2^{a+1} - 2$, а правая — $(5^{b+1} - 5)/4$. Получаем $2^{a+3} - 8 = 5^{b+1} - 5$, отсюда $2^{a+3} - 3 = 5^{b+1}$. При $b > 1$ это означает, что 2^{a+3} даёт остаток 28 при делении на 100. Последняя цифра 8 наблюдается при a, кратном 4, а две последние 28 — при $a = 20k + 4$. Случай $k = 0$ отмечен выше, а при $k \geqslant 1$ число уже превышает 10^{12}. Случай $b = 1$, очевидно, невозможен.

Критерии. За нахождение всех красивых чисел (без доказательства, что других нет) даётся 3 балла.

Международная математическая олимпиада
«Формула Единства» / «Третье тысячелетие»
2023-2024 учебный год. Отборочный этап

Решения задач для 11 класса

Каждая задача оценивается в 7 баллов. Оценка в 1–3 балла означает, что задача в целом не решена, но есть существенные продвижения; оценка в 4–6 баллов — что задача в целом решена, но есть существенные недостатки.

---

1. Составителям олимпиады в качестве зарплаты достались 99 бубликов. Первый взял 1, 2 или 3 бублика. Второй забрал на один больше или на один меньше, чем первый. Третий — на один больше или на один меньше, чем второй. И так далее: каждый человек берёт себе на один бублик больше или на один меньше, чем предыдущий. В результате последний составитель как раз забрал все оставшиеся бублики. Определите минимальное возможное количество составителей. (*Л. С. Корешкова*)

Ответ: 13.

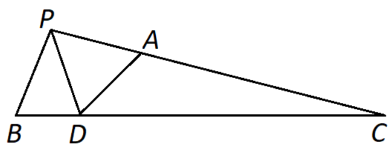
Решение. Если составителей 11, то максимальное количество бубликов $3+4+\ldots+13 = 88 < 99$. Если их 12, то количество бубликов чётно (поскольку чётность при переходе к следующему составителю всегда меняется, то получается 6 чётных и 6 нечётных чисел). Значит, составителей хотя бы 13. Пример: $3+4+5+6+5+6+7+8+9+10+11+12+13 = 99$.

Критерии. Пример оценивается в 3 балла, случаи 11 и 12 составителей — по 2 балла.

2. В треугольнике ABC на стороне BC взята такая точка D, что $AD + AC = BC$. Известно, что $\angle ACD = 20^\circ$, $\angle CAD = 120^\circ$. Найдите величину угла B. (*С. П. Павлов*)

Решение.

Продолжим сторону CA за точку A на отрезок $AP = AD$. Рассмотрим треугольник PAD. Угол PAD как смежный с углом CAD, величина которого дана, равен 60°. К тому же этот треугольник равнобедренный (по построению, $AP = AD$). Значит, $\triangle PAD$ равносторонний.



Далее рассмотрим треугольник PBD. Поскольку $\angle ADC = 180^\circ - (120^\circ + 20^\circ) = 40^\circ$, то, рассматривая углы при вершине B, получаем, что $\angle PDB = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$. Но такую же величину имеет и ещё один угол рассматриваемого треугольника: $\angle PBD = 80^\circ$ (треугольник PCB равнобедренный по построению). Тем самым, равнобедренным является и треугольник PBD. Таким образом, $PB = PA$, т. е. треугольник PBA также равнобедренный, и величина его угла P нам известна (80°). Поэтому $\angle PBA = 50^\circ$. Теперь мы можем определить величину искомого угла: $\angle ABC = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$.

Критерии. Найден угол $\angle BPC = 80^\circ$ — 4 балла.

3. Числа a, b, c таковы, что $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} = 6$, $\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{a}{c} = 2$. Чему может быть равно значение выражения $\dfrac{a^3}{b^3} + \dfrac{b^3}{c^3} + \dfrac{c^3}{a^3}$? (*С. П. Павлов*)

Решение. Пусть $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}, z = \frac{c}{a}$. Тогда $xyz = 1$, $x+y+z = 6$, $xy+yz+xz = 2xyz = 2$, а найти следует значение выражения $x^3+y^3+z^3$. Заметим, что

$$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz).$$

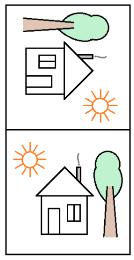
Значит, $x^3+y^3+z^3=3+6\left((x+y+z)^2-3(xy+xz+yz)\right)=3+6\cdot(36-6)=183.$

Замечание. На самом деле таких вещественных чисел a,b,c не существует, так как x^2y^2+ $+y^2z^2+z^2x^2=(xy+yz+zx)^2-2(x+y+z)xyz=-8<0$. Они существуют как комплексные числа: можно найти $\{x,y,z\}$ как множество корней кубического многочлена t^3-6t^2+2t-1, а потом взять, например, $a=xy$, $b=y$, $c=1$.

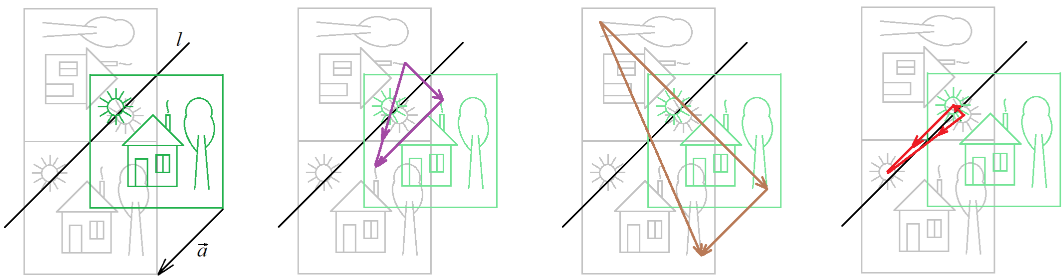
Ответ: 183.

Критерии. И найденный ответ с доказательством (когда предполагается существование a,b,c), и доказательство отсутствия таких вещественных чисел оцениваются в 7 баллов.

4. Петя разместил две одинаковых квадратных стеклянных пластины с рисунками, как показано справа. Для всякой точки, лежащей в нижнем квадрате, можно найти расстояние между ней и точкой верхнего квадрата, которая ей соответствует (то есть с которой она совпадёт, если совместить рисунки на пластинах). Для каких точек квадрата это расстояние минимально и чему оно равно, если сторона квадрата — 1 дециметр? (*А. А. Теслер*)



Решение. Рассмотрим движение плоскости, переводящее верхний квадрат в нижний. Оно является скользящей симметрией, то есть композицией симметрии относительно прямой l и переноса на вектор $\vec{a}$ (см. левую картинку). Для каждой точки расстояние — гипотенуза треугольника, катеты которого — перемещение при симметрии и перемещение при переносе (примеры приведены на картинках). Второй из катетов постоянен (и равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$ дм), а первый катет надо минимизировать. В случае, когда точки лежат на оси симметрии (прямая, проходящая через середины двух смежных сторон квадрата), он равен нулю, поэтому для этих точек расстояние минимально и равно $\frac{\sqrt{2}}{2}$ дм.



Критерии. За найденный ответ с доказательством, что такое расстояние достигается, даётся 2 балла.

5. Функция f такова, что при любом x выполняется равенство $f(f(x))=x^2-x+1$. Чему может равняться $f(0)$? (*С. П. Павлов*)

Ответ: $f(0)=1$.

Решение. Полагая $x=0$ и $x=1$, получим: $f(f(0))=f(f(1))=1$. Также имеем: $f(f(f(0)))=f^2(0)-f(0)+1$. Значит, $f(1)=f^2(0)-f(0)+1$. Аналогично $f(1)=f^2(1)-$ $-f(1)+1$, откуда $f(1)=1$. Следовательно, получаем: $1=f^2(0)-f(0)+1$, т. е. либо $f(0)=0$ (что противоречит условию), либо $f(0)=1$.

Можно показать, что такая функция f действительно существует.

Критерии. Если доказано, что $f(0) \in \{0, 1\}$, но не исключён случай $f(0) = 0$, то ставится не больше 5 баллов. За нахождение $f(1)$ даётся 2 балла.

6. У калькулятора есть кнопка включения и ещё две кнопки — красная и синяя. При включении калькулятор показывает число 10, при нажатии на красную кнопку к числу на экране прибавляется 5, а при нажатии на синюю кнопку число умножается на 5. Мария включает калькулятор, а потом в случайном порядке нажимает красную и синюю кнопки — каждую по 10 раз (все последовательности нажатий равновероятны). Какова вероятность, что получилось число, которое можно получить на этом калькуляторе и менее чем за 20 нажатий? (*А. А. Теслер*)

Решение. Знаменатель искомой вероятности равен C_{20}^{10}, а числитель — количеству последовательностей, которые можно укоротить.

Есть две ситуации, когда последовательность можно укоротить. Во-первых, $\times 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$ эквивалентно $+5 \times 5$. Во-вторых, если в начале стоят восемь $+5$, то их можно заменить на $\times 5$ (поскольку $10 + 8 \cdot 5 = 10 \cdot 5 = 50$).

Докажем, что никакие другие последовательности укоротить невозможно. Действительно, рассмотрим число в пятеричной системе счисления. Изначально оно записывалось как 2, операция $+5$ добавляет единицу в первый разряд (с возможными переносами), а операция $\times 5$ сдвигает всю запись на один разряд влево с добавлением 0 в конце. При этом перенос может случиться только один раз для последовательности вида $+5+5+5\ldots$. Ясно, что при отсутствии переносов вся последовательность восстанавливается однозначно по полученному числу (в частности, её не укоротить). Если же в начале был перенос, то в старшем разряде числа будет стоять 1 вместо 2, и тогда последовательность тоже восстанавливается однозначно. Значит, надо посчитать последовательности с двумя указанными особенностями.

Последовательностей, где было бы и то и другое одновременно, не бывает, поскольку для этого надо хотя бы 13 «+5». Последовательностей второго типа C_{12}^2. В последовательностях первого типа подстрока «$\times 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5$» может встречаться либо дважды (тогда надо расставить две таких подстроки и восемь «$\times 5$», это C_{10}^2), либо единожды (надо расставить такую подстроку, пять $+5$ и девять $\times 5$, то есть $\frac{15!}{5! \cdot 9!}$ способов, и из них в $2 \cdot C_{10}^2$ случаях подстрока встречается дважды).

Ответ: $\left(C_{12}^2 + \frac{15!}{5! \cdot 9!} - C_{10}^2\right) : C_{20}^{10} = \dfrac{30051}{184756}$.

Критерии. Каждый из двух способов укоротить последовательность оценивается в 1 балл, идея использовать пятеричную систему счисления — в 2 балла. За правильно найденный ответ без доказательства того, что непосчитанные последовательности нельзя укоротить, ставится не больше 4 баллов.

7. Назовём натуральное число *красивым*, если у него сумма натуральных делителей, кратных 5, равна сумме чётных натуральных делителей и отлична от нуля. Сколько из чисел от 1 до 10^{12} красивые? (*А. А. Теслер*)

Ответ: 10^9.

Решение. Пусть число n имеет вид $n = 2^a \cdot 5^b \cdot t$, где t не делится ни на 2, ни на 5. Тогда делители можно разбить на группы так, что в каждой группе есть: один делитель

x (не кратный ни 2, ни 5); делители вида $2^i \cdot x$, где $i \geqslant 1$; делители вида $5^j \cdot x$, где $j \geqslant 1$; делители вида $2^i \cdot 5^j \cdot x$, где $i,j \geqslant 1$. Последние делители можно не учитывать, поскольку они учитываются в обоих случаях. Сумма делителей второго типа равна $x \cdot (2+2^2+\ldots+2^a)$, а третьего — $x \cdot (5+5^2+\ldots+5^b)$. Суммируя по всем $x|t$, получаем, что для исполнения условия должно быть $2+2^2+\ldots+2^a = 5+5^2+\ldots+5^b$.

Легко находимое решение — $a=4, b=2$, поскольку $2+2^2+2^3+2^4 = 5+5^2 = 30$. Это означает, что число делится на $2^4 \cdot 5^2 = 400$, но его частное от деления на 400 не кратно ни 2, ни 5. Иначе говоря, это число вида $400m$, где m даёт остаток 1, 3, 7 или 9 при делении на 10. Таких чисел 4 среди каждых 4000 последовательных чисел, то есть среди первых 10^{12} чисел их 10^9.

Поищем другие решения. Левая часть равна $2^{a+1}-2$, а правая — $(5^{b+1}-5)/4$. Получаем $2^{a+3}-8 = 5^{b+1}-5$, отсюда $2^{a+3}-3 = 5^{b+1}$. При $b>1$ это означает, что 2^{a+3} даёт остаток 28 при делении на 100. Последняя цифра 8 наблюдается при a, кратном 4, а две последние 28 — при $a = 20k+4$. Случай $k=0$ отмечен выше, а при $k \geqslant 1$ число уже превышает 10^{12}. Случай $b=1$, очевидно, невозможен.

Критерии. За нахождение всех красивых чисел (без доказательства, что других нет) даётся 3 балла.