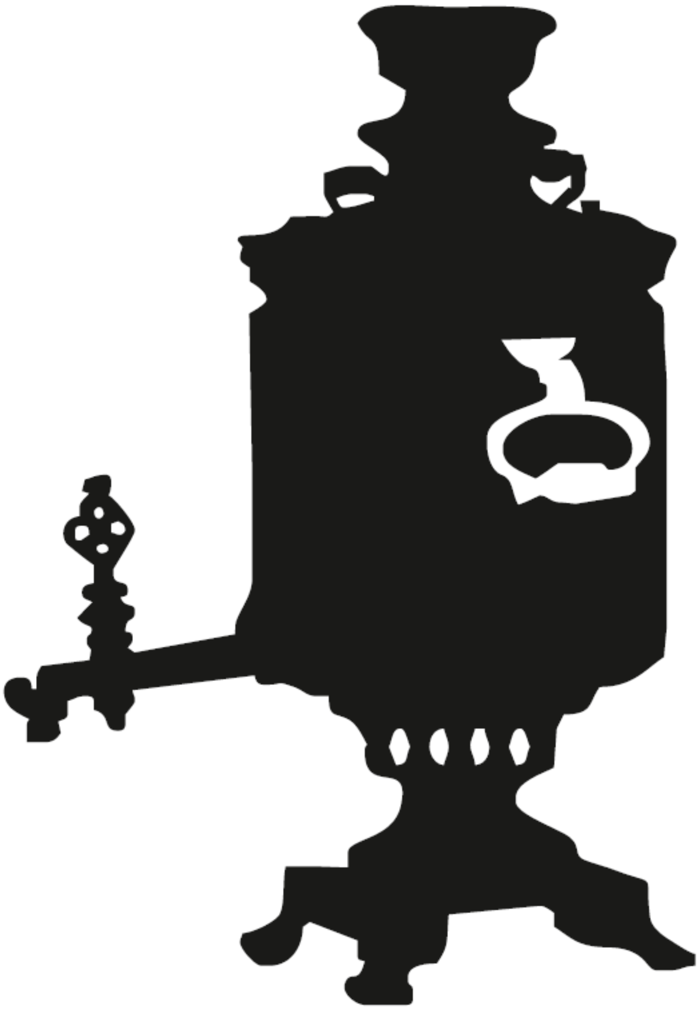
СОРОК ПЯТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

ОСЕННИЙ ТУР



ЗАДАЧИ, РЕШЕНИЯ, КРИТЕРИИ

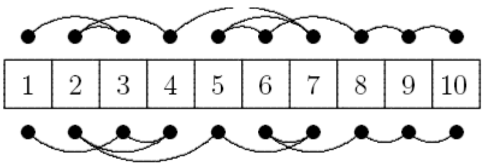
БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ

8–9 классы

1. [4] На асфальте нарисована полоса 1×10 для игры в «классики». Из центра первого квадрата надо сделать 9 прыжков по центрам квадратов (иногда вперёд, иногда назад) так, чтобы побывать в каждом квадрате по одному разу и закончить маршрут в последнем квадрате. Аня и Варя обе прошли полосу, и каждый очередной прыжок Ани был на то же расстояние, что и очередной прыжок Вари. Обязательно ли они пропрыгали квадраты в одном и том же порядке?

Алексей Толпыго

Ответ: не обязательно. **Решение**. На рисунке проход Ани указан над полосой, а проход Вари – под полосой.

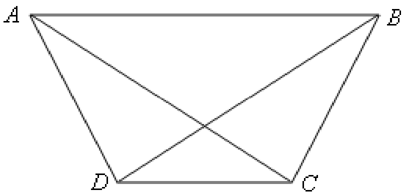


Замечание. Разумеется, есть и другие примеры: скажем, Аня могла прыгать в порядке 1-6-3-7-5-9-8-4-2-10, а Варя – в порядке 1-6-9-5-3-7-8-4-2-10.

2. [4] Четырёхугольник *ABCD* выпуклый, его стороны *AB* и *CD* параллельны. Известно, что углы *DAC* и *ABD* равны, а также углы *CAB* и *DBC* равны. Обязательно ли *ABCD* – квадрат?

Александр Тертерян

Ответ: не обязательно. **Решение**. Пусть *A*, *D*, *C*, *B* – последовательные вершины правильного шестиугольника. Тогда *ABCD* – равнобедренная трапеция (половина правильного шестиугольника), и все упомянутые в условии углы равны 30°.



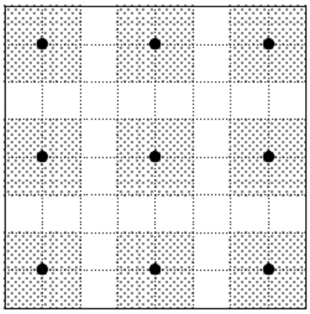
Замечание: четырёхугольник из условия может быть любой равнобедренной трапецией, у которой одно из оснований равно боковой стороне, или квадратом. Других вариантов нет.

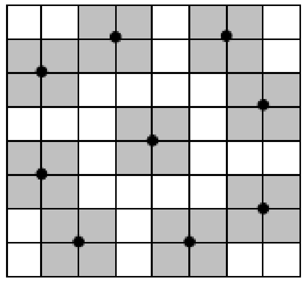
3. [5] У восьми фермеров есть клетчатое поле 8×8, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 8 участков равной площади (каждый участок – многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 9 ягод так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?

Татьяна Казицына

Ответ: может. **Решение**. Пусть ворона утащит ягоды, отмеченные далее точками на рисунке слева. Участок, содержащий одну из этих ягод внутри себя, должен содержать и квадрат 2×2 с центром в этой точке. Поэтому никакие две утащенные вороной ягоды не могут лежать внутри одного участка – ведь участок имеет площадь 8 клеток и состоял бы тогда ровно из двух таких квадратов, а они не образуют многоугольник.

Замечание. Возможен и пример, аналогичный примеру из решения задачи 5 старших классов (рисунок справа).





4. [5] По кругу записано несколько положительных целых чисел (не менее двух). Среди любых двух соседних чисел какое-то одно больше другого в 2 раза или в 5 раз. Может ли сумма всех этих чисел равняться 2023?

Сергей Дворянинов

Ответ: не может. **Решение.** Рассмотрим любые два соседних числа, пусть a – меньшее из них. Тогда большее равно либо $2a$, либо $5a$, и вместе с меньшим оно даёт либо $3a$, либо $6a$. Значит, сумма любых двух соседних чисел кратна 3. Дальше можно рассуждать по-разному.

1-й способ. Найдём для каждого числа сумму его и следующего за ним по часовой стрелке, и все эти суммы сложим. Получим, что удвоенная сумма всех чисел кратна 3. Значит, она не может равняться 4046.

2-й способ. Найдём для каждого числа его отношение к следующему за ним по часовой стрелке. Каждое такое отношение равно одному из чисел 2, ½, 5, 1/5, а произведение всех таких отношений равно 1. Значит, двоек среди этих отношений столько же, сколько и чисел ½, а пятёрок – столько же, сколько чисел 1/5 (по основной теореме арифметики). Тогда общее количество чисел чётно и их можно разбить на пары соседних. В каждой паре сумма кратна 3, поэтому и вся сумма чисел – тоже, но 2023 не делится на 3.

3-й способ. Пусть общая сумма равна 2023. Если общее количество чисел чётно, то их можно разбить на пары соседних. В каждой паре сумма кратна 3, поэтому и вся сумма чисел – тоже, но 2023 не делится на 3. Если общее количество чисел нечётно, то выберем любое число x из них, а остальные разобьём на пары соседних с суммой, кратной 3. Получим, что x имеет такой же остаток от деления на 3, что и общая сумма 2023, то есть остаток 1. Но в качестве x можно взять любое из чисел, поэтому все они имеют остаток 1 от деления на 3. Тогда сумма двух соседних имеет остаток 2 от деления на 3, а должна делиться на 3 – противоречие.

5. [5] Петя и Вася нашли 100 кубиков одинакового размера, 50 из них были белого цвета и 50 – чёрного. Они придумали игру. Назовём башенкой один или несколько кубиков, стоящих друг на друге. В начале игры все кубики лежат по одному, то есть имеется 100 башенок. За один ход игрок должен одну из башенок поставить на другую (переворачивать башенки нельзя), при этом в новой башенке не должно быть подряд двух одинаковых по цвету кубиков. Ходят по очереди, начинает Петя. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто может обеспечить себе победу, как бы ни играл его соперник?

Николай Чернятьев

Ответ: Вася. **Решение**. Назовём башенку *белой*, если её нижний и верхний кубики белые, и *бело-чёрной*, если её нижний кубик белый, а верхний чёрный. Аналогично определяются чёрная и чёрно-белая башенки. В начале игры имеется 50 белых и 50 чёрных башенок. Петя из белой и чёрной башенок соберёт *разноцветную* (*чёрно-белую* или *бело-чёрную*). В любом случае Вася, присоединяя к ней с нужной стороны белую башенку, склеивает белую башенку. В результате остаются по 49 белых и чёрных башенок. Далее Вася продолжает действовать так же, пока не оставит после своего хода две белые и две чёрные башенки. Петя своим ходом снова соберёт разноцветную башенку. Теперь Вася из оставшихся белой и чёрной башенок соберёт противоположную башенку (чёрно-белую, если Петя собрал бело-чёрную), и у Пети не будет хода.

10–11 классы

1. [3] Барону Мюнхгаузену сообщили о многочлене $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_1x + a_0$ лишь то, что многочлен $P(x) + P(–x)$ имеет ровно 45 различных действительных корней. Барон, не зная даже, чему равно n, утверждает, что может определить один из коэффициентов $a_n, \ldots, a_1, a_0$ (готов указать его номер и значение). Не ошибается ли барон?

Борис Френкин

Ответ: не ошибается. **Решение**. Отметим действительные корни многочлена $P(x) + P(–x)$ на координатной прямой. Поскольку $P(x) + P(–x)$ – чётная функция, отмеченные корни симметричны относительно нуля. Так как их нечётное количество, один из этих корней равен нулю. Тогда $2a_0 = P(0) + P(–0) = 0$, откуда $a_0 = 0$.

Замечание: никакой другой коэффициент не определён условием однозначно.

2. [4] На часах три стрелки, каждая вращается в ту же сторону, что и обычно, с постоянной ненулевой, но, возможно, неправильной скоростью. Утром длинная и короткая стрелки совпали. Ровно через 3 часа совпали длинная и средняя стрелки. Еще ровно через 4 часа совпали короткая и средняя стрелки. Обязательно ли когда-нибудь совпадут все три стрелки?

Александр Юран

Ответ: не обязательно.

1-е решение. *Контрпример*. Пусть длинная стрелка за час делает один оборот, средняя – $\frac{1}{8}$ оборота, короткая – половину оборота, «утром» длинная и короткая стрелки были направлены «вверх», а средняя отстояла от них на $\frac{3}{8}$ оборота против часовой стрелки. Тогда через 3 часа длинная и средняя стрелки встретятся «в верхней точке» циферблата, так как обе будут направлены «вверх», а ещё через 4 часа короткая и средняя стрелки встретятся в «нижней точке» циферблата, так как обе будут направлены вниз (то есть условия выполнены).

Поскольку длинная стрелка быстрее короткой на половину оборота в час, они встречаются в точности через каждые два часа, то есть все их встречи происходят через *чётное* число часов после «утра», и значит, происходят «в верхней точке» циферблата. Но средняя стрелка проходит через «верхнюю точку» только через *нечётное* число часов после «утра», поэтому все три стрелки никогда не совпадут.

2-е решение. Пусть угловые скорости короткой, средней и длинной стрелок равны соответственно α, $\alpha + \beta$ и $\alpha + \gamma$ градусов в час (нам удобны именно эти обозначения, ведь β и γ окажутся относительными скоростями стрелок), причём эти числа положительны. Назовём утреннее направление короткой стрелки (совпадающее с направлением длинной) начальным. Пусть средняя в этот момент отстояла от начального направления на угол δ градусов по часовой стрелке.

Тогда через t часов после начального момента короткая стрелка отстоит от начального направления на αt градусов, средняя – на $(\alpha + \beta)t + \delta$ градусов, длинная – на $(\alpha + \gamma)t$ градусов.

Чтобы через 3 часа длинная и средняя стрелки совпали, достаточно выполнения равенства $3(\alpha + \gamma) = 3(\alpha + \beta) + \delta$, или, что то же самое, $\delta = 3(\gamma - \beta)$.

Аналогично, чтобы ещё через 4 часа короткая и средняя стрелки совпали, достаточно того, чтобы $7\alpha = 7(\alpha + \beta) + \delta$, то есть, $\delta = -7\beta$.

Итого, для выполнения условия задачи достаточно выполнения равенств $\beta = -\frac{\delta}{7}$, $\gamma = \frac{4\delta}{21}$.

Докажем, что при иррациональном δ все три стрелки никогда не встретятся. Предположим противное. Чтобы три стрелки когда-нибудь встретились, необходимо и достаточно существования положительного вещественного числа T, для которого попарные разности $((\alpha + \beta)T + \delta) - \alpha T$, и $(\alpha + \gamma)T - \alpha T$ оказались целыми числами, кратными 360. Иными словами, числа $\delta + \beta T$ и γT целые и кратны 360.

Подставим значения β и γ. Получим, что для некоторого T будут целыми числа $\delta\cdot(1 - \frac{T}{7})$ и $\delta\cdot(\frac{4T}{21})$. Отсюда отношение $\frac{\delta\cdot(1-\frac{T}{7})}{\delta\cdot(4\frac{T}{21})} = \frac{21}{4}\cdot\frac{1}{T} - \frac{3}{4}$ рационально. Но тогда и T рационально! Отсюда иррационально число $\delta\cdot(\frac{4T}{21})$ как произведение ненулевого рационального и иррационального. Но оно должно быть целым. Противоречие.

3-е решение. Пусть p и q – произвольные различные действительные числа. Пусть «утром» длинная и короткая стрелки стартуют из одного положения и идут со скоростями p и q оборотов в час соответственно. Далее эти стрелки совпадают в точности в те моменты, когда более быстрая из них прошла на целое число оборотов больше, чем другая. Так как множество целых положительных чисел счётно, то и таких моментов счётно, а значит, множество положений в которых эти стрелки совпадают не более чем счётно (в случае, когда p/q рационально, этих положений конечное количество). Тогда пусть средняя стрелка неподвижно стоит в положении отличном от всех вышеописанных.

Теперь умножим скорости всех стрелок на одно и тоже положительное число (положения встреч длинной и коротких стрелок не поменяются) так, чтобы через q часов после «утра» длинная заняла положение средней. Тогда через p часов после «утра» короткая займёт это положение (отношение скоростей не поменялось). Теперь увеличим скорости всех стрелок на одно и то же положительное число, скорости станут ненулевыми, а даты встреч соответствующих стрелок не изменятся (в частности, не появится одновременной встречи всех стрелок). В частности, при $p = 7$, $q = 3$ получаем в точности ситуацию, описанную в условии.

3. [4] Взяли все 100-значные натуральные числа, в десятичной записи которых каждая цифра – какая-то из цифр 2, 3, 4, 5, 6, 7. Сколько из этих чисел делятся на 2^{100}?

Павел Кожевников

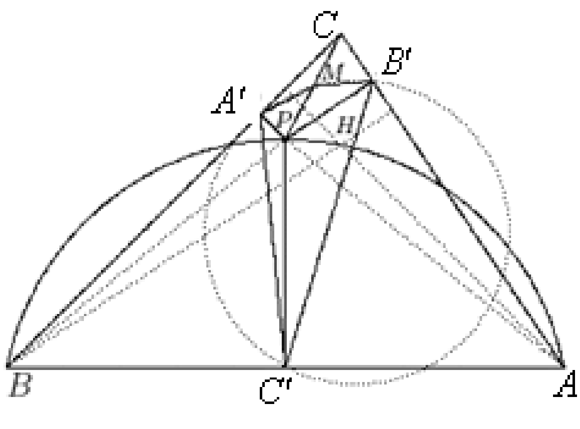
Ответ: 3^{100} чисел. **Решение**. Докажем по индукции, что есть ровно 3^n *хороших* n-значных чисел (кратных 2^n и составленных из указанных цифр). *База* ($n = 1$) очевидна.

Шаг индукции. Если у хорошего (n+1)-значного числа стереть первую цифру, получится хорошее n-значное число (поскольку, стирая цифру x, мы вычитаем из числа, кратного 2^{n+1}, число $x10^n$, кратное 2^n).

С другой стороны, хорошее n-значное число имеет вид $y \cdot 2^n$. Приписывая к нему слева цифру x, мы добавляем число $(x \cdot 5^n)2^n$, и сумма будет делиться на 2^{n+1} тогда и только тогда, когда число $y + x \cdot 5^n$ чётно, то есть, когда x+y чётно. Видно, что для чётных y в качестве x подходят в точности чётные цифры 2, 4, 6, а для нечётного y – в точности нечётные цифры 3, 5, 7. Значит, хороших (n+1)-значных чисел в 3 раза больше, чем хороших n-значных.

4. [5] Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Пусть P – произвольная точка внутри (и не на сторонах) треугольника ABC, лежащая на описанной окружности треугольника ABH, и A', B', C' – проекции точки P на прямые BC, CA, AB. Докажите, что описанная окружность треугольника $A'B'C'$ проходит через середину отрезка CP.

Алексей Заславский



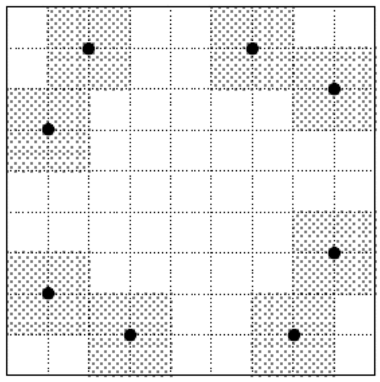
Решение. Пусть M – середина CP. Точки A' и B' лежат на окружности с диаметром CP и центром в M, а вписанный в эту окружность угол $A'CB'$ острый, поэтому $\angle A'MB' = 2\angle BCA$ и M лежит от прямой $A'B'$ по ту же сторону, что и C. Так как P лежит внутри остроугольного треугольника, её проекции A', B', C' лежат внутри сторон, тогда четырёхугольники $AB'PC'$ и $BA'PC'$ вписанные. Используя равенства вписанных углов, имеем:

$180° - \angle A'C'B' = \angle AC'B' + \angle BC'A' = \angle BPA' + \angle APB' = 360° - \angle APB - \angle A'PB' =$ $= (180° - \angle AHB) + (180° - \angle A'PB') = \angle BCA + \angle BCA = 2\angle BCA$, откуда $\angle A'MB' + \angle A'C'B' =$ $= 180°$, то есть точки A', M, B', C' лежат на одной окружности, что и требовалось.

Замечание: Утверждение задачи остаётся верным для всякого треугольника ABC, в котором углы при вершинах A и B не прямые, и для произвольной точки P, лежащей на описанной окружности треугольника ABH и отличной от вершин треугольника ABC.

5. [6] У девяти фермеров есть клетчатое поле 9×9, огороженное по периметру забором и сплошь заросшее ягодами (в каждой точке поля, кроме точек забора, растёт ягода). Фермеры поделили поле между собой по линиям сетки на 9 участков равной площади (каждый участок – многоугольник), но границы отмечать не стали. Каждый фермер следит только за ягодами внутри (не на границе) своего участка, а пропажу замечает, только если у него пропали хотя бы две ягоды. Всё это известно вороне, но где проходят границы между участками, она не знает. Может ли ворона утащить с поля 8 ягод так, чтобы пропажу гарантированно ни один фермер не заметил?

Татьяна Казицына



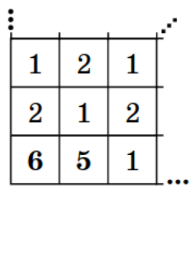
Ответ: может. **Решение**. Пусть ворона утащит ягоды, отмеченные точками на рисунке. Участок, содержащий одну из этих ягод внутри себя, должен содержать и квадрат 2×2 с центром в этой точке. Если участок содержит две утащенные вороной ягоды, он, кроме соответствующих квадратов 2×2, содержит тогда ещё ровно одну клетку (так как площадь участка равна 9). Но тогда эти квадраты 2×2 соприкасаются (иначе одной клетки не хватит, чтобы получить связный участок). В этом случае образуется примыкающий к углу поля изолированный участок, «отсечённый» этими двумя квадратами, в котором будет одна или две клетки, что невозможно (площади всех участков равны 9).

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ

8 – 9 классы

1. [4] В каждую клетку доски 8×8 вписано натуральное число так, что выполнено условие: если из одной клетки в другую можно перейти одним ходом коня, то отношение чисел в этих двух клетках является простым числом. Могло ли оказаться, что в какую-то клетку вписано число 5, а в какую-то другую – число 6?

Егор Бакаев



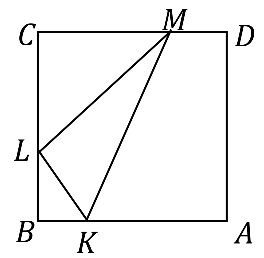
Ответ. Могло. **Решение**. *Пример 1.* Раскрасив доску в чёрный и белый цвета в шахматном порядке, сначала во все чёрные клетки впишем единицы, а во все белые – двойки. Затем заменим угловую единицу на 6, а соседнюю с ней двойку – на 5 (см. рисунок справа).

Пример 2 см. на рисунке ниже.

6	5	10	2	10	2	10	2
5	10	2	10	2	10	2	10
10	2	10	2	10	2	10	2
2	10	2	10	2	10	2	10
10	2	10	2	10	2	10	2
2	10	2	10	2	10	2	10
10	2	10	2	10	2	10	2
2	10	2	10	2	10	2	10

2. [6] В квадратном листе бумаги площади 1 проделали дыру в форме треугольника (вершины дыры не выходят на границу листа). Докажите, что из оставшейся бумаги можно вырезать треугольник площади $^1/_6$.

Александр Юран



Решение 1. Возьмём точку внутри треугольника и спроектируем из неё вершины треугольника на контур квадрата $ABCD$ и соединим проекции друг с другом. Получится новый треугольник, содержащий исходный. Если при этом две вершины нового треугольника окажутся на одной стороне квадрата, увеличим эту сторону треугольника так, чтобы она совпала со стороной квадрата (возможно, эту операцию придется повторить несколько раз). Достаточно доказать утверждение для последнего треугольника. Заметим, что *внутри* одной стороны квадрата (пусть AD) вершин треугольника нет. Поэтому можно считать, что вершины K, L, M треугольника лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD (см. рисунок; возможно некоторые из них совпадают с вершинами квадрата).

Один из отрезков BL, CL (пусть CL) не меньше $^1/_2$. Если при этом $CM \geq {^2/_3}$, то $S_{LCM} \geq {^1/_6}$. Если же $CM < {^2/_3}$, то $S_{ADM} \geq {^1/_6}$.

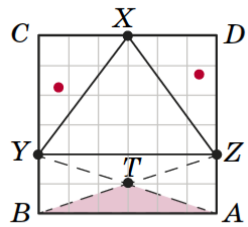


Рис. 1

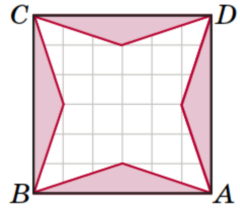


Рис. 2

Решение 2. Отрежем от квадрата нижнюю треть отрезком YZ и соединим концы отрезка с серединой X стороны CD (рис. 1). Площади треугольников CXY и DXZ равны по 1/6, поэтому внутри каждого из них есть вершина дыры (иначе эти треугольники можно отрезать). Площади треугольников BYA и BZA также равны по 1/6, поэтому оставшаяся вершина дыры лежит в каждом из них, то есть, лежит внутри треугольника BTA. Построив на каждой стороне квадрата такой треугольник (рис. 2), аналогично докажем, что внутри каждого из них лежит вершина дыры, что невозможно, так как треугольников четыре, а вершин три.

3. [7] Назовём двуклетчатую карточку 2×1 *правильной*, если в ней записаны два натуральных числа, причём число в верхней клетке меньше числа в нижней клетке. За ход разрешается изменить оба числа на карточке: либо прибавить к каждому одно и то же целое число (возможно, отрицательное), либо умножить каждое на одно и то же натуральное число, либо разделить каждое на одно и то же натуральное число; при этом карточка должна остаться правильной. За какое наименьшее количество таких ходов из любой правильной карточки можно получить любую другую правильную карточку?

Алексей Глебов

Ответ: за 3 хода. **Решение**. Будем изображать карточку в виде пары (a, b), где $a < b$. Пусть надо из (a, b) получить (c, d). Умножим первую карточку на разность $d - c$ чисел на второй карточке, получим карточку $(a(d - c), b(d - c))$. Вторым ходом получим из неё карточку $(c(b - a), d(b - a))$. Это можно сделать с помощью сложения, так как разность между нижним и верх-ним числами на каждой из этих карточек равна $(b - a)(d - c)$. Третьим ходом делим на разность $b - a$.

Докажем, что из карточки (1, 3) нельзя получить карточку (1, 4) меньше, чем за три хода. Для нашей карточки первый ход – прибавление натурального числа или умножение (так как на ней есть 1).

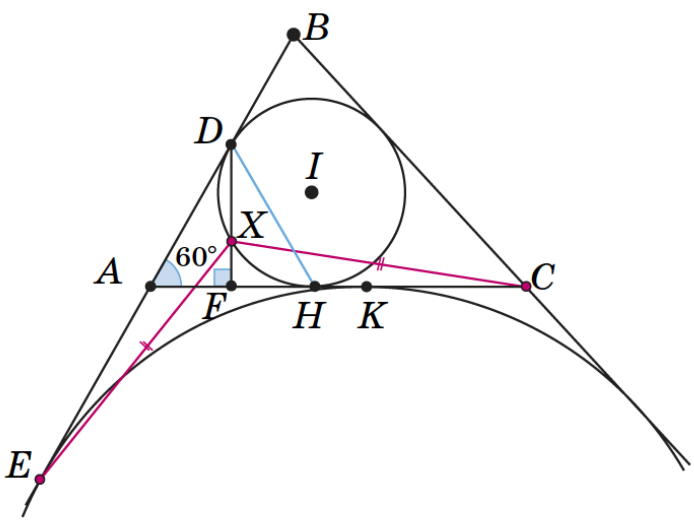
В первом случае разность чисел на карточке останется равной 2, и за одно деление или умножение получить разность 3 нельзя (разность умножится или разделится на целое число); сложение разность вообще не изменит.

Во втором случае, чтобы изменить отношение чисел на карточке с 3 на 4, придётся вторым ходом использовать вычитание, тогда разность уже должна была равняться 3, но она кратна 2.

4. [7] Дан треугольник ABC с углом A, равным 60°. Его вписанная окружность касается стороны AB в точке D, а вневписанная окружность, касающаяся стороны AC, касается продолжения стороны AB в точке E. Докажите, что перпендикуляр к стороне AC, проходящий через точку D, вторично пересекает вписанную окружность в точке, равноудаленной от точек E и C. (Вневписанной называется окружность, касающаяся одной из сторон треугольника и продолжений двух других его сторон.)

Азамат Марданов

Решение. Пусть вписанная окружность ω с центром I касается стороны AC в точке H, вневписанная окружность из условия касается стороны AC в точке K, перпендикуляр DF из условия пересекает ω в точке X. Поскольку $AD = AH$, $\angle A = 60°$, то треугольник ADH равносторонний, а DF – его высота. Так как $\angle XIH = 2\angle XDH = 60° = \angle AIH$, точка X лежит на прямой AI, то есть является центром треугольника ADH.



По свойствам касательных вписанной и вневписанной окружностям, $AE = AK = CH$. Кроме того, $AX = HX$, $\angle EAX = 150° = \angle CHX$. Следовательно, треугольники AXE и HXC равны, откуда $XE = XC$.

5. [9] У Васи есть 13 одинаковых на вид гирь, но 12 из них весят одинаково, а одна фальшивая – весит больше остальных. Также у него есть двое чашечных весов – одни правильные, а другие показывают верный результат (какая чаша тяжелее), если массы на чашах различаются, а в случае равенства могут показать что угодно (какие именно весы правильные, Вася не знает). Перед каждым взвешиванием Вася может сам выбирать весы. Докажите, что Вася может гарантированно найти фальшивую гирю за 3 взвешивания.

Андрей Аржанцев

Решение. Будем всегда класть на чаши весов поровну гирь. Заметим, что тогда заведомо нефальшива гиря, оказавшаяся на лёгкой чаше, а в случае равенства – на любой из чаш. Обозначим весы X и Y. Первым взвешиванием положим на чаши весов X по 4 гири.

1) Весы в равновесии. Тогда фальшива одна из 5 невзвешенных гирь. Вторым взвешиванием положим по 2 подозрительные гири на чаши весов X. При равновесии фальшива невзвешенная гиря A.

В противном случае фальшива либо гиря A (если весы X неправильные), либо одна из гирь B, C на «тяжёлой» чаше. Третьим взвешиванием сравним B с C на весах Y. При равновесии фальшива гиря A. В противном случае фальшива более тяжелая гиря (если бы фальшива была A, весы Y показали бы равновесие).

2) Одна из чаш опустилась. Тогда фальшива либо одна из 4 гирь на «тяжёлой» чаше, либо одна из 5 невзвешенных гирь. Вторым взвешиванием положим на чаши весов Y по 2 «тяжёлые» гири и по одной из невзвешенных – A и B. При равновесии фальшива одна из 3 ещё не взвешенных гирь, причём весы Y правильные (раз они показали равенство, все гири на них настоящие – в том числе, четыре гири, «тяжёлые» по мнению весов X, то есть весы X соврали). С их помощью найдём за одно взвешивание одну фальшивую гирю из 3 подозрительных.

Если одна из чаш (пусть с гирей A) опустилась, то фальшива одна из гирь на этой чаше (если бы фальшивая гиря была среди 3 невзвешенных, то как весы X, так и весы Y были бы неправильны, что не так). Более того, A фальшива только если весы Y правильные. Третьим взвешиванием сравним на весах Y две отличные от A гири с её чаши. При равновесии фальшива A, в противном случае – более тяжёлая гиря.

6. [10] Пекарь испёк прямоугольный лаваш и разрезал его на n^2 прямоугольников, сделав $n - 1$ горизонтальных разрезов и $n - 1$ вертикальных. Оказалось, что округлённые до целого числа площади получившихся прямоугольников равны всем натуральным числам от 1 до n^2 в некотором порядке. Для какого наибольшего n это могло произойти? (Полуцелые числа округляются вверх.)

Георгий Караваев

Ответ. Для $n = 4$. **Решение**. Пример пирога представлен в виде таблицы, указаны ширина столбцов, высота строк и площадь клеток:

	2	3	4	5
0.7	1.4≈1	2.1≈2	2.8≈3	3.5≈4
2.7	5.4≈5	8.1≈8	10.8≈11	13.5≈14
3	6	9	12	15
3.25	6.5≈7	9.75≈10	13	16.25≈16

Докажем, что $n \leq 4$. Переставим строки и столбцы таблицы так, чтобы высоты строк росли сверху вниз, а ширины столбцов росли слева направо. Пусть числа в угловых клетках равны $a < b < c < d$. Ясно, что a – левое верхнее, d – правое нижнее, причём $ad = bc$. Пусть b – правое верхнее. Округлённые числа будем обозначать теми же буквами со штрихами. Тогда $a' = 1$, $d' = n^2$, $b' \geq n$ (оно не меньше всех чисел верхней строки), $c' \geq 2n - 1$ (оно не меньше всех чисел первого столбца и верхней строки). Значит, $a < 1{,}5$, $d < n^2 + 0{,}5$, $b \geq n - 0{,}5$, $c \geq 2n - 1{,}5$. Поэтому $1{,}5(n^2 + 0{,}5) > ad = bc > (n - 0{,}5)(2n - 1{,}5)$, откуда $1{,}5n^2 + 0{,}75 > 2n^2 - 2{,}5n + 0{,}75$, то есть $2{,}5n > 0{,}5n^2$, откуда $n < 5$.

7. [12] На белых клетках шахматной доски 100×100 стоят 100 слонов, среди которых есть белые и чёрные. Они могут делать ходы в любом порядке и бить слонов противоположного цвета. Какого наименьшего числа ходов заведомо достаточно, чтобы на доске остался один слон?

Александр Грибалко

Ответ: 197 ходов.

Алгоритм. Все ходы будем делать так, чтобы на доске оставались слоны обоих цветов, пока слонов хотя бы два.

Если есть возможность сделать *экономичное* взятие (слон за один ход бьёт слона другого цвета, стоящего с ним на одной диагонали), делаем его.

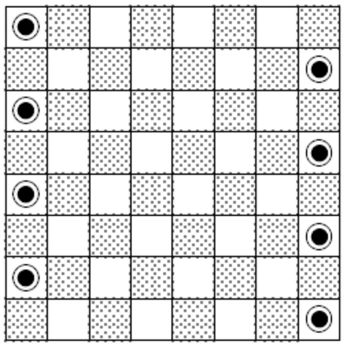
В противном случае сделаем *неэкономичное* взятие (за два хода). Выберем двух слонов разного цвета и рассмотрим путь, по которому первый слон мог бы пройти ко второму за два хода (такой путь всегда есть). Если на этом пути есть ещё слоны, найдём среди них двух ближайших друг к другу слонов разного цвета, и пусть один из них собьёт другого за два хода.

Изначально все слоны стоят на 99 белых диагоналях, параллельных главной белой диагонали. Тогда на одной из них стоит не меньше двух слонов. Назовём двух из этих слонов *особыми*. Если особые слоны разного цвета, экономичное взятие возможно уже на первом ходу вдоль этой диагонали; сделаем его.

Пусть эти особые слоны белые. Тогда при взятиях будем бить чёрными слонами белых. После того как будет взят первый особый слон, это ограничение снимается. Заметим, что сразу после этого возможно экономичное взятие.

Поскольку всего взятий 99 и хотя бы одно из них экономичное, потребуется не больше $2 \cdot 99 - 1 = 197$ ходов.

Оценка. Расставим произвольным образом по 50 слонов в левом и правом столбце доски. При этом на всех 199 белых диагоналях обоих направлений будут стоять слоны (угловые белые клетки доски мы считаем «одноклеточными» диагоналями). За ход число диагоналей, на которых есть слон, может уменьшиться не более, чем на 1 (поскольку «исчезнуть» может только та диагональ, с которой уходит слон, делающий ход). Когда останется один слон, занятых диагоналей будет 2. Итого, понадобится хотя бы $199 - 2 = 197$ ходов.



10–11 классы

1. [4] Для каждого многочлена степени 45 с коэффициентами 1, 2, 3, ..., 46 (в каком-то порядке) Вася выписал на доску все его различные действительные корни. Затем он увеличил все числа на доске на 1. Каких чисел на доске оказалось больше: положительных или отрицательных?

Алексей Глебов

Ответ. Поровну. **Решение**. Заметим, что корни многочленов из условия могут быть только отрицательными. К каждому многочлену P из условия есть парный P^*, коэффициенты которого записаны в обратном порядке. Заметим, что корни P^* обратны корням P. Следовательно, исходные числа на доске разбиваются на пары взаимно обратных отрицательных чисел. После прибавления единицы числа из интервала $(-1, 0)$ станут положительными, а числа, меньшие -1, останутся отрицательными.

2. [5] Для какого наибольшего N существует N-значное число со свойством: в его десятичной записи среди любых нескольких подряд идущих цифр какая-то цифра встречается ровно один раз?

Алексей Глебов

Ответ. Для $N = 2^{10} - 1 = 1023$. **Решение**. Будем называть числа со свойством из условия *хорошими*, включая также «числа», начинающиеся на 0. Докажем по индукции, что в хорошем числе, содержащем k различных цифр ($1 \le k \le 10$), не более $2^k - 1$ знаков.

База ($k = 1$) очевидна – используется лишь одна цифра, и она не может повторяться.

Шаг индукции. Пусть $1 \le k \le 9$ и X – хорошее число, содержащее k+1 различных цифр. По условию одна из цифр a встречается в нём ровно один раз. Заметим, что слева и справа от этой цифры записаны хорошие числа (число справа, возможно, начинается с нуля), в каждом из них используется не более k различных цифр, поэтому в каждом из них (по индукции) не более $2^k - 1$ знаков, а суммарно в X тогда не более $(2^k - 1) + (2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 1$ знаков, что и требовалось.

Пример хорошего числа, содержащего k различных цифр ($1 \le k \le 10$), в записи которого ровно $2^k - 1$ знаков, также построим по индукции.

База (k=1): годится число 1 (берём не 0, чтобы далее итоговое число не начиналось с 0).

Шаг индукции. Пусть $1 \le k \le 9$ и X – хорошее число, в котором k различных цифр и $2^k - 1$ знаков. Возьмём цифру, которая не встречается в этом числе (назовём её a), и припишем к ней слева и справа число X. В полученном числе $2^{k+1} - 1$ знаков, и оно хорошее: ведь любая его часть из несколько подряд идущих цифр либо включает единственную в числе цифру a, либо является частью хорошего числа X.

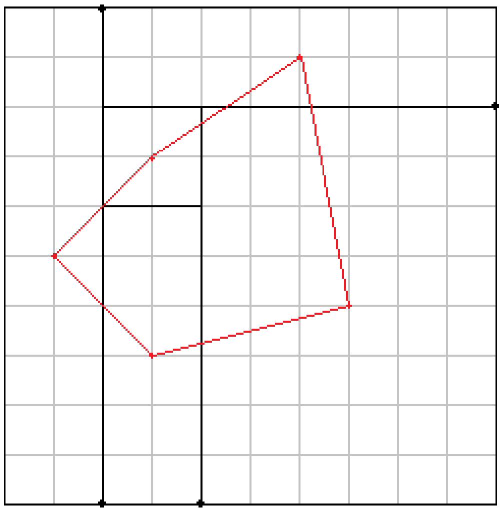
3. Квадрат разбили на несколько прямоугольников так, что центры прямоугольников образуют выпуклый многоугольник.

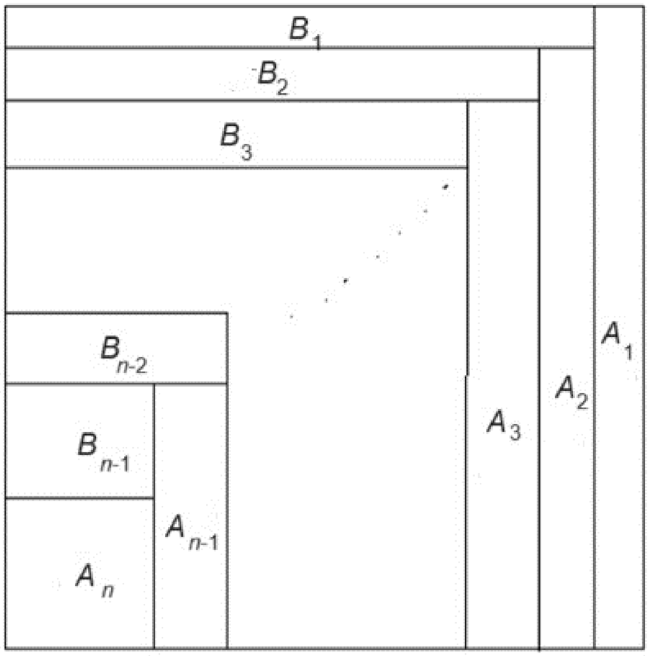
Александр Шаповалов

а) [3] Обязательно ли каждый прямоугольник примыкает к стороне квадрата?

б) [6] Может ли количество прямоугольников равняться 23?

а) Ответ: не обязательно. **Решение**. См. рисунок слева.





б) Ответ. Может.

Решение. Приведём пример для произвольного нечётного $m = 2n - 1$, $n > 1$. Разобьём квадрат на n «вертикальных» прямоугольников A_1, …, A_n и $n - 1$ «горизонтальных» прямоугольников B_1, …, B_{n-1}, расположенных так, как показано на рисунке справа. Центры прямоугольников будем обозначать теми же буквами, что и сами прямоугольники. Пусть ширина (горизонтальная сторона) прямоугольника A_i равна a_i, высота (вертикальная сторона) прямоугольника B_i равна b_i. Тогда тангенс угла наклона прямой $A_{i+1}A_i$ к горизонтальной оси равен $\frac{b_i}{a_{i+1}+a_i}$, а тангенс угла наклона прямой $B_{i+1}B_i$ к вертикальной оси равен $\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}+b_i}$. Для выпуклости достаточно подобрать значения a_i и b_i так, чтобы обе последовательности тангенсов возрастали с уменьшением i и сумма ширин $a_n + \dots + a_1$ была бы больше суммы высот $b_{n-1} + \dots + b_1$ (тогда мы сможем подобрать высоту прямоугольника A_n так, чтобы получился квадрат, а высоты остальных прямоугольников A_i и ширины прямоугольников B_i подберутся автоматически). Сделаем, например $a_i = (2i-1)!$ и $b_i = (2i)!$. Тогда $\mathrm{ctg}(A_{i+1}A_i) =$ $= 2i + 1 + \frac{1}{2i}$, $\mathrm{ctg}(B_{i+1}B_i) = 2i + 2 + \frac{1}{2i+1}$. Нетрудно проверить, что обе последовательности котангенсов убывают с уменьшением i, а значит, последовательности тангенсов возрастают.

4. [9] Дан выпуклый четырехугольник *ABCD* площади *S*. Внутри каждой его стороны отмечено по точке и эти точки последовательно соединены отрезками, так что *ABCD* разбивается на меньший четырехугольник и 4 треугольника. Докажите, что хотя бы у одного из этих треугольников площадь не превосходит $S/8$.

Михаил Малкин

Решение. Пусть *K*, *L*, *M* и *N* – точки деления, лежащие на сторонах *AB*, *BC*, *CD* и *DA*, причём $AK = aAB$, $BL = bBC$, $CM = cCD$, $DN = dDA$. Тогда

$$S_{KBL}S_{LCM}S_{MDN}S_{NAB} = (1-a)bS_{ABC}(1-b)cS_{BCD}(1-c)dS_{CDA}(1-d)aS_{DAB} \le$$

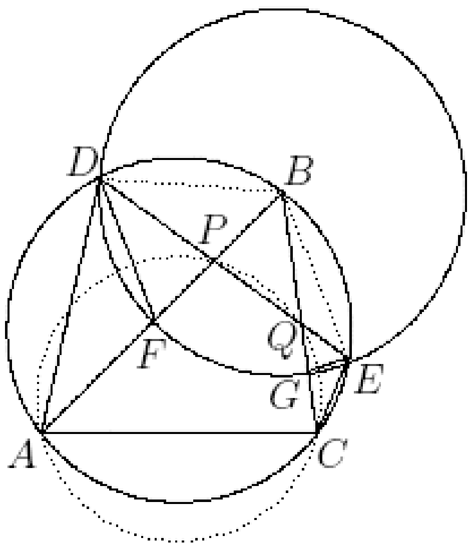
$$\le \left(\frac{a+1-a}{2}\right)^2\left(\frac{b+1-b}{2}\right)^2\left(\frac{c+1-c}{2}\right)^2\left(\frac{d+1-d}{2}\right)^2\left(\frac{S_{ABC}+S_{CDA}}{2}\right)^2\left(\frac{S_{BCD}+S_{DAB}}{2}\right)^2 \le \left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{S}{2}\right)^4.$$

Следовательно, одно из чисел S_{KBL}, S_{LCM}, S_{MDN}, S_{NAB} не превосходит $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{S}{2} = \frac{S}{8}$.

5. [10] Хорда *DE* описанной около треугольника *ABC* окружности пересекает стороны *AB* и *BC* в точках *P* и *Q* соответственно, точка *P* лежит между *D* и *Q*. В треугольниках *ADP* и *QEC* провели биссектрисы *DF* и *EG*. Оказалось, что точки *D*, *F*, *G*, *E* лежат на одной окружности. Докажите, что точки *A*, *P*, *Q*, *C* лежат на одной окружности.

Азамат Марданов

Решение 1. Пусть α – окружность, описанная около треугольника *ABC*, β – окружность, на которой лежат точки *D*, *F*, *G*, *E*. Заметим, что эти точки лежат на β именно в таком порядке. Пусть B' – центр окружности β. Докажем, что точки *B* и B' совпадают.



Углы *ADE* и *ABE* равны, так как опираются на дугу *ACE*, откуда $2\cdot\angle FDE = \angle FBE$ (поскольку *DF* – биссектриса угла *ADE*). С другой стороны, $\angle FB'E =$ $= 2\cdot\angle FDE$ (как центральный и вписанный углы), поэтому $\angle FBE = \angle FB'E$. Тогда точка B' лежит на дуге *FBE* описанной окружности треугольника *FBE*.

Аналогично, точка B' лежит на дуге *DBG* описанной окружности треугольника *DBG*.

Но дуга *DFGE* лежит внутри окружности α, откуда дуга *DBE* лежит внутри окружности β. Тогда дуги *FBE* и *DBG* также лежат внутри β и пересекаются в единственной точке, поскольку дуга *FBE* делит окружность β на две части, причём точки *D* и *G* попадают в разные части (*D* лежит на дуге *FDE*, а *G* – на дуге *FGE*). Значит, точки *B* и B' совпадают, поэтому *B* – середина дуги *DBE* (поскольку *BD* = *BE*).

Но тогда равны углы *EAB* и *DAB*, и для угла $\angle BPQ$, как для угла между хордами *DE* и *AB*, мы получаем равенство:

$$\angle BPQ = \angle EAB + \angle DBA = \angle DAB + \angle DBA = 180° - \angle ADB = \angle ACB,$$

откуда четырёхугольник *APQC* вписанный.

Замечание. Обосновать тот факт, что дуги *FBE* и *DBG* пересекаются в единственной точке, можно по-разному. Например, рассмотрим радикальные оси трёх окружностей: *DFGE*, *DBG* и *FBE*. Они пересекаются в радикальном центре – точке пересечения *отрезков* *DG* и *FE*, исходя из последовательности точек на окружности. Пусть это точка *S*, а вторая точка пересечения окружностей *DBG* и *FBE* – это точка *Z*. Поскольку *S* лежит внутри хорды, то её степень относительно всех трех окружностей отрицательна, то есть *S* лежит между точками *B* и *Z*, откуда точка *Z* и точка *B* лежат в разных полуплоскостях относительно прямой *DG*. Следовательно, *Z* не лежит на *дуге* *DBG*, то есть *B* – единственная точка пересечения указанных дуг.

Решение 2. Заметим сначала, что точки *G* и *E* лежат по другую сторону от прямой *AB*, нежели точка *D*, поэтому отрезки *DF* и *GE* не пересекаются. Отрезки же *DE* и *FG* не пересекаются по построению. Тогда *D, E, G, F* – последовательные точки на окружности, откуда четырёхугольник *DFGE* выпуклый.

Далее мы докажем **лемму**: *B* – середина дуги *DE*, не содержащей точек *A* и *C*.

Этого достаточно для решения задачи, поскольку тогда равны углы *EAB* и *DAB*, и для угла $\angle BPQ$, как для угла между хордами *DE* и *AB*, мы получаем равенство:

$$\angle BPQ = \angle EAB + \angle DBA = \angle DAB + \angle DBA = 180° - \angle ADB = \angle ACB,$$

откуда четырёхугольник *APQC* вписанный.

Доказать лемму можно по-разному.

1-й способ. Предположим противное: серединой дуги *DBE* является точка B', отличная от *B*. Не умаляя общности, B' лежит на дуге *BE*, не содержащей точки *D*. Тогда хорда AB' пересекает хорду *DE* в точке P', такой что *P* лежит между *D* и P'. Далее *DF* – биссектриса угла $P'DA$, пусть F' – точка её пересечения с $P'A$, тогда *F* лежит между *D* и F'.

Аналогично, если Q' – точка пересечения $B'C$ с *DE*, а G' – точка пересечения *EG* с $B'C$, получаем, что G' лежит между *G* и *E*. Имеем тогда:

$$\angle F'DB' = \angle F'DE + \angle EDB' = 1/2 \cdot \angle ADE + \angle EDB' = 1/2 \cdot \angle ADE + \angle DEB',$$

$$\angle DF'B' = 180° - \angle F'DB' - \angle DB'F' = (\angle DB'A + \angle ADE + \angle DEB' + \angle EDB') -$$

$$- (1/2 \cdot \angle ADE + \angle EDB') - \angle DB'F' = 1/2 \cdot \angle ADE + \angle DEB' = \angle F'DB',$$

то есть, треугольник $F'DB'$ равнобедренный и $DB'=F'B'$. Аналогично получаем $EB'=G'B'$, и из определения B' выполнено $DB'=B'E$, то есть, D, F', G', E лежат на окружности с центром B'. Так как четырёхугольники $DFGE$ и $DF'G'E'$ оба вписанные, то $F'G'$ и FG параллельны (так как они обе антипараллельны DE относительно DF и EG). Однако, раз $DFGE$ выпуклый, то прямая, параллельная FG и проходящая через точку G', лежащую на стороне GE, пересечёт луч FD, но она пересекает прямую FD в точке F', лежащей на продолжении FD за F – противоречие.

2-й способ. Пусть B' – центр описанной окружности ω четырёхугольника $DFGE$. Так как $\angle FDE$ острый, то $1/2\angle FB'E = \angle FDE = 1/2\cdot\angle ADE = 1/2\cdot\angle ABE = 1/2\cdot\angle FBE$, то есть $\angle FB'E =$ $= \angle FBE$, при этом B и B' лежат одну сторону с D от прямой FE (B' по эту сторону, так как $\angle FDE$ острый). Тогда B' лежит на описанной окружности треугольника BFE, аналогично она лежит на описанной окружности треугольника BGD. Заметим сразу, что раз $\angle FBE = 2\angle FDE >$ $> \angle FDE$, то B лежит внутри ω. Предположим, $B \neq B'$. Тогда при инверсии относительно ω точка B переходит в общую точку образов описанных окружностей треугольников BFE и BGD, то есть в точку пересечения FE и GD, то есть в точку пересечения диагоналей $DFGE$, то есть в некоторую точку внутри ω, но это невозможно, так как B сама внутри ω – противоречие. Значит, $B=B'$, откуда $BD = BE$ и значит, B – середина дуги DE (описанной окружности треугольника ABC), не содержащей точек A и C.

3-й способ. Пусть ω – описанная окружность четырёхугольника $DFGE$, Ω – описанная окружность треугольника ABC. Так как Q – точка внутри ω, то луч QB пересекает ω, пусть в точке Y; $Y \neq B$ (иначе бы различные окружности ω и Ω имели три общие точки). Аналогично, пусть X – точка пересечения луча PB с ω. Тогда, пользуясь равенствами вписанных углов и тем, что EG – биссектриса угла DEC, имеем следующие равенства ориентированных углов: $\angle(BD, DY) = \angle(BD, BC) + \angle(BC, YD) = \angle(DE, EC) + \angle(YG, YD) = \angle(DE, EC) + \angle(EG, ED) =$ $= -\angle(EG, ED) = -\angle(YG, YD) = -\angle(YB, YD)$, откуда треугольник YDB равнобедренный, то есть $BD=BY$, аналогично получаем $BE=BX$. Из равнобедренности YDB следует, что угол DYB острый, тогда Y лежит на продолжении QB за точку B (иначе бы YBD был смежным с вписанным углом DYQ, который острый, так как равен острому вписанному углу DEG). Тогда

$$\angle YDE = \angle YDB + \angle BDE = \angle DYB + \angle BDE = \angle DEG + \angle BDE = 1/2\cdot\angle DEC + \angle BDE < 1/2\cdot\angle DBE + \angle BDE.$$

Аналогично получаем, что $\angle XED < 1/2\cdot\angle DBE + \angle BED$. Складывая эти неравенства, имеем $\angle XED + \angle YDE < \angle DBE + \angle BED + \angle BDE = 180°$. Значит, DY и EX не параллельны, поэтому серединные перпендикуляры к DY и EX имеют единственную общую точку, но и B, и центр ω являются таковыми, значит B – центр ω. Тогда $BD=BE$ и, значит, B – середина дуги DE (описанной окружности треугольника ABC), не содержащей точек A и C.

6. [12] Таблица 2×2024 заполнена целыми числами, причём в первой строке стоят числа из набора $\{1, ..., 2023\}$. Оказалось, что какие бы два столбца мы ни выбрали, разность их чисел из первой строки делится на разность их чисел из второй строки. Известно, что все числа во второй строке попарно различны. Обязательно ли тогда все числа в первой строке равны между собой?

Иван Кухарчук

Ответ: обязательно.

Решение. **Лемма**. Пусть k и l – натуральные числа, причём НОК(k, l) < $k + l$. Тогда $k + l$ делится на k или на l.

Доказательство. Пусть d = НОД(k, l). По условию $kl < d(k + l)$, т.е. $(k - d)(l - d) < d^2$. Один из множителей меньше d и делится на d, т.е. равен нулю. А $k + l$ делится на d. □

Условие делимости не изменится, если все числа строки уменьшить на одно и то же целое число. Поэтому можно считать, что верхние числа находятся в пределах от 0 до 2022, а нижние – в пределах от – 0 до M (причём и 0, и M присутствуют). Ясно, что $M > 2022$. Разность чисел над 0 и M делится на M, поэтому эти числа равны (пусть это число b).

Предположим, есть столбец вида $\begin{pmatrix} b+d \\ k \end{pmatrix}$, где $d \neq 0$. Ясно, что $|d| \leq 2022$. Сравнивая этот столбец со столбцами $\begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b \\ M \end{pmatrix}$, видим, что d делится как на k, так и на $M - k$. Поэтому d делится на НОК($k, M - k$); по лемме M делится на k или на $M - k$. Как известно, у числа M не более $2\sqrt{M}$ делителей, столько же дополнений этих делителей до M, значит, всего в верхней строке не более $4\sqrt{M}$ чисел, отличных от b. С другой стороны, и k, и $M - k$ не больше 2022, поэтому $M \leq 4044$. Итак, в верхней строке не более $4\sqrt{4044}$ < 300 чисел, отличных от b. Зафиксируем один столбец вида $\begin{pmatrix} b+d \\ k \end{pmatrix}$ и рассмотрим произвольный столбец вида $\begin{pmatrix} b \\ k+q \end{pmatrix}$. По условию d делится на q. Значит, в первой строке не более $4\sqrt{d} \leq 4\sqrt{2022} < 180$ чисел b (q может быть как положительным, так и отрицательным). Но 300 + 180 < 2024. Противоречие.

Замечание. Для малых размеров таблицы утверждение неверно. Пример:

1	1	1	1	7	1	1	1
1	4	5	6	7	8	10	13

7. [14] На столе лежат $2n$ неразличимых на вид монет. Известно, что n из них весят по 9 г, а остальные n – по 10 г. Требуется разбить их на n пар так, чтобы общий вес каждой пары равнялся 19 г. Докажите, что это можно сделать менее чем за n взвешиваний на чашечных весах без гирь (показывающих, равны ли чаши, а если нет, то какая тяжелее).

Александр Грибалко

1-е решение. Случай $n = 1$ очевиден.

В случае $n = 2$ положим на чаши по одной монете. В случае равновесия добавим в пару к каждой одну из не взвешенных монет. В противном случае пары образуют две взвешенные, и две невзвешенные монеты.

В случае $n = 3$ у нас есть 6 монет A, B, C, D, E, F. Сначала сравним A и B, потом C и D. Если оба раза весы в равновесии, то нужные пары – (A, C), (B, D) и (E, F). Если оба раза равновесия нет, нужные пары – (A, B), (C, D) и (E, F). Если равновесия не будет один раз, например при первом взвешивании, то нужные пары – (A, B), (C, E) и (D, F).

Пусть $n \geq 4$. Уменьшим мысленно веса всех монет на 9 г: теперь они весят 0 и 1 г. Поскольку мы всегда будем класть на чаши весов поровну монет, на результаты взвешиваний это не повлияет. Общий вес всех монет теперь равен n г.

Разобьём монеты на n пар, а затем приведём алгоритм разбиения пар на сравнимые *цепочки* вида $a = a = \ldots = a > b = b = \ldots = b$ или $c = c = \ldots = c$ и на отдельные пары известного веса.

Алгоритм. Будем сравнивать первую пару с остальными, пока не получим неравные пары. Взвешенные пары образуют цепочку $a = a = \ldots = a > b$ или $a > b = b = \ldots = b$ (буквами обозначены веса пар). Отложим взвешенные пары и, проделав то же с оставшимися, получим вторую цепочку с неравенством, скажем $c = c = \ldots = c > d$. Сравним $a + b$ с $c + d$. Равенство означает $a = c$, $b = d$. Тогда две цепочки объединяются в одну $a = \ldots = a > b = \ldots = b$, и мы продолжаем поиск цепочки среди оставшихся невзвешенными пар. Заметим, что число взвешиваний с парами цепочки на 1 меньше длины цепочки.

Главный случай. Если при сравнении получилось неравенство, скажем, $a + b > c + d$, то $a = 2$, а $d = 0$. Взяв из этих пар по одной монете, создадим пару $p = 1$. Сравнив каждую из невзвешенных пар с p, найдём их веса. Мы провели всего $n - 1$ взвешивание и теперь знаем веса пар вида a, вида d и пар вне цепочек. Тем самым мы знаем общий вес пар видов b и c в цепочках. Их число нам тоже известно: k пар вида b и m пар вида c. Возможны три случая: 1) $b = c = 1$; 2) $b = 1$, $c = 2$; 3) $b = 0$, $c = 1$. Соответственно, их общий вес $k + m$, $k + 2m$ или m. Но $m < k + m < k + 2m$ – из трёх вариантов подойдёт лишь один. А зная веса пар, легко разложить монеты нужным образом.

Цепочка неравенств + цепочка равенств. $a = \ldots = a > b = \ldots = b$, $c = c = \ldots = c$ (это значит, что невзвешенных пар не осталось). Пусть есть k пар a, m пар b и r пар c.

Для весов a, b, c возможны 9 случаев, сведённых в таблицу. Напомним, что общий вес всех монет равен $n = k + m + r$. Поэтому четыре «красных» строки невозможны.

a	***b***	***c***	**Общий вес**	**Следствие**	
2	1	1	$2k + m + r$		
2	1	0	$2k + m$	$k = r$	$a + b > 2c$, $b > c$
2	0	0	$2k$	$k = m + r$	$a > c$
1	0	0	k		
2	0	1	$2k + r$	$k = m$	$a + b = 2c$
2	1	2	$2k + m + 2r$		
2	0	2	$2k + 2r$	$k + r = m$	$b < c$
1	0	2	$k + 2r$	$r = m$	$a + b < 2c$, $a < c$
1	0	1	$k + r$		

В остальных строках это равенство приводится к виду, записанному в пятом столбце. Если выполнено ровно одно из этих равенств, мы нашли веса a, b, c.

Больше двух равенств могут быть выполнены в трёх случаях. Но мы провели только $n-2$ взвешивания и дополнительное взвешивание поможет их различить.

1) $k = m = r$. Сравнив дополнительно $a + b$ с $c + c$ (заметим, что $r > 1$, поэтому две пары c у нас есть), мы различим три случая в «синих» строках (2-я, 5-я и 8-я).

2) $k = r$, $k + r = m$. Сравнив дополнительно b с c, мы отличим 2-ю и 7-ю строки.

3) $m = r$, $k = m + r$. Сравнив дополнительно a с c, мы отличим 3-ю и 8-ю строки.

Одна цепочка неравенств: $a = ... = a > b = ... = b$ возможна только в случае $a = 2$, $b = 0$.

Одна цепочка равенств: $a = ... = a$ возможна только в случае $a = 1$.

Замечание. Случай $n = 2$ можно отдельно не разбирать: он подходит под общий случай.

2-е решение. Если $n = 1$, то монеты уже образуют нужную пару, достаточно 0 взвешиваний. Поэтому далее можем и будем считать, что $n > 1$.

Пары монет с суммарными весами 20 г, 19 г, 18 г будем называть тяжёлыми, средними, лёгкими соответственно. Далее приведём явный алгоритм.

Разобьём монеты на n пар произвольным образом, далее возьмём одну из этих пар и будем последовательно сравнивать с остальными парами до тех пор, пока не будет получено неравновесие. Если оно так и не будет получено, то все n пар одинаковые, и значит они все средние (так как 20-граммовых и 19-граммовых монет одинаковое количество), то есть уже получено искомое разбиение.

Поэтому далее можем и будем считать, что неравновесие встретится, причём первая пара в этом взвешивании тяжелее (другой случай аналогичен: надо поменять в рассуждении 20 граммовые монеты с 18 граммовыми, тяжёлые пары с лёгкими и т.п.).

Так как 20 граммовых и 18 граммовых монет одинаковое количество, то тяжёлых и лёгких пар тоже одинаковое количество. Если уже сделано $n-1$ взвешивание, то все пары, кроме одной («последней») одинаковые, причём эта одна легче остальных. Это возможно только при $n = 2$ (иначе пар какого-то типа – одна, какого-то $n - 1 > 1$, а какого-то 0, т.е. тяжёлых и лёгких пар не поровну). В этом случае понятно, что «первая» пара тяжёлая, а «последняя» – лёгкая; беря по монете из этих пар, формируем 2 нужные пары. Тогда далее можем и будем считать что сделано $a + 1 < n - 1$ взвешиваний (получено a равновесий, возможно $a = 0$), в частности $n > a+2 \geq 2$. Обозначим через A, B монеты «первой» пары, а через C, D – монеты последней пары. Сравним пару A, C с парой B, D.

Если будет получено равновесие, то суммарный вес пар $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$ составляет чётное количество граммов, и значит, первая пара (вместе с a равновесными ей) тяжёлая, а последняя – лёгкая. То есть, мы знаем тип каждой из взвешенных монет. Далее сформируем одну вспомогательную среднюю пару (например, $\{A, C\}$) и будем последовательно сравнивать с остальными невзвешенными парами (всего делаем $n - 1$ взвешивание), по результату определяем тип очередной пары. Так будут определены веса всех исходных пар, кроме одной. Зная, сколько среди всех этих $n - 1$ пар тяжёлых, а сколько лёгких, определяем тип последней пары, исходя из равенства количеств тяжёлых и лёгких пар среди всех n пар. Зная тип каждой пары, формируем нужные пары: средние не трогаем, а из каждой пары пар (лёгкая, тяжёлая) формируем две средние, беря по монете из каждой пары (назовём это *стандартной процедурой*).

Если же при сравнении $\{A, C\}$ с $\{B, D\}$ равновесия не будет, то можем и будем считать, что A с C весят больше, чем B с D (иначе просто переобозначим монеты: A <–> B, C <–> D). Суммируя то, что $\{A, B\}$ тяжелее $\{C, D\}$ и $\{A, C\}$ тяжелее $\{B, D\}$, получаем, что A тяжелее D, значит A весит 10 г, а D весит 9 г. Тогда B и C одинаковые, иначе в одном из двух выше рассмотренных взвешиваний было бы равновесие. Кроме того, если они 10-граммовые, то все a пар, с которыми пара $\{A, B\}$ попала в равновесие – тяжёлые, иначе – они средние. Эти a пар пока не трогаем, назовём их *главными*; пары $\{A, B\}$, $\{C, D\}$ переформируем: сформируем среднюю пару $\{A, D\}$ и пару $\{B, C\}$, состоящую из одинаковых монет. Далее последовательно сравним $\{A, D\}$ с каждой из остальных пар (из изначально сформированных, отличных от уже взвешенных) кроме одной, всего сделав n–1–(a+2)+(a+2)= n–1 взвешиваний и определив тип каждой из этих n–1–(a+2) пар. Пусть Y – последняя пара. Тогда мы «уже» знаем тип каждой пары, кроме Y, $\{B, C\}$ и a главных пар. Зная, что суммарно тяжёлых и лёгких пар одинаково, вычисляем x – разность количеств тяжёлых и лёгких пар среди Y, $\{B, C\}$ и a главных пар (она противоположна аналогичной разности количеств среди пар, у которых мы «уже» знаем тип).

Введём y: положим y=1, если Y тяжёлая, 0 – если Y средняя, и –1 – если Y лёгкая (мы «пока» не знаем значение у). Если $x > 0$, то мы понимаем, что$\{B, C\}$ тяжёлая и a главных пар – тяжёлые: иначе бы, согласно выше установленному, $\{B, C\}$ была бы лёгкой и a главных пар были бы средними, и тогда было бы $x = -1+y \leq 0$, что не так; и тогда имеем $x = 1+a+y$, откуда вычисляем y, то есть, мы знаем тип каждой пары, и тогда формируем нужные пары стандартной процедурой. Аналогично, при $x < 0$ получаем, что $\{B, C\}$ лёгкая и a главных пар средние (иначе $x=a+1+y \geq 0$,) и тогда из $x = -1+y$ находим y, то есть, знаем все пары, формируем нужные по стандартной процедуре. Остаётся рассмотреть случай x=0. При $a > 0$ в точности аналогичное рассуждение исключает случай $x = a+1+y$, и приводит к нужным парам. Наконец рассмотрим случай x=0=a: тогда главных пар 0 штук, а пара $\{B, C\}$ не средняя, тогда она «противоположна» паре Y, беря по монете из этих пар формируем 2 нужные пары. Из остальных пар (типы которых нам известны) формируем нужные пары по стандартной процедуре.

3-е решение.

Рассмотрим отдельно случай $n = 3$. Пронумеруем монеты числами от 1 до 6. Первым взвешиванием сравним монеты 1 и 2, вторым – монеты 3 и 4. Если получим два равенства, то в одной из этих пар монеты весят по 9 г, а в другой – по 10 г. Тогда пары {1, 3}, {2, 4}, {5, 6} весят по 19 г. Если в одном взвешивании, например в первом, будет неравенство, а во втором – равенство, то можно разбить монеты на пары {1, 2}, {3, 5}, {4, 6}. Если же оба взвешивания дадут неравенства, то искомые пары – {1, 2}, {3, 4}, {5, 6}.

Если $n \neq 3$, разобьём монеты на *пары* произвольным образом. Каждая пара весит 18 г, 19 г или 20 г, причём пар массой 18 г и 20 г поровну. Если для каждой пары мы определим её массу, то сможем получить требуемое разбиение монет. Действительно, пары массой 19 г можно оставить без изменений, а, объединив по одной монете из пар массами 18 г и 20 г, также получим искомые пары.

Сравним первую пару со второй, потом с третьей и так далее, пока не получим неравенство или не закончатся пары. Если неравенство получено, то из всех пар, которые мы сравнили, сформируем первую *кучку*. Если остались пары, то будем действовать с ними аналогично и создавать новые кучки. В итоге получим несколько кучек, в каждой из которых пары имеют две различные массы. Возможно, несколько последних пар не образуют кучку, если они равны между собой. В каждой кучке выделим одну лёгкую и одну тяжёлую пары и объединим их в *группу*. Пронумеруем группы в соответствии с номерами кучек, которым они принадлежат.

Начнём сравнивать группы: первую группу сравним со второй, затем с третьей и так далее, пока не получим неравенство или не закончатся группы. Если неравенство получено, например первая группа оказалась легче k-й (если наоборот, дальнейшие рассуждения аналогичны), то в первой группе лёгкая пара весит 18 г, а в k-й группе тяжёлая пара весит 20 г. Объединим эти две пары в новую группу X массой 38 г. Если k меньше числа групп, то сравним X со всеми группами, номера которых больше k – так мы узнаем массы пар во всех кучках, начиная с $(k+1)$-й. Если какие-то пары не попали в кучки, то сравним одну из них с половиной группы X (в которую входит по одной монете из составляющих её пар). Результат сравнения позволит узнать массы всех пар, не попавших в кучки.

Заметим, что если массы двух групп равны, то в этих группах лёгкие пары весят одинаково и тяжёлые пары тоже. Поэтому все лёгкие пары в кучках с первой по $(k-1)$-ю весят по 18 г, а все тяжёлые пары в k-й кучке – по 20 г. Таким образом, пока мы не узнали только массы тяжёлых пар в первых $k-1$ кучках и лёгких пар в k-й кучке. Они могут весить либо 19 г и 18 г, либо 19 г и 19 г, либо 20 г и 19 г соответственно. Учитывая, что общее число пар массой 18 г и 20 г одинаковое, мы однозначно можем определить, какой из случаев имеет место.

Если при сравнении групп мы дошли до последней группы и не получили ни одного неравенства (в частности, если число кучек равно 0 или 1), то во всех кучках лёгкие пары весят одинаково и тяжёлые пары тоже. Тогда мы имеем три *набора*, состоящие из равных пар: лёгкие пары в кучках, тяжёлые пары в кучках и пары, не попавшие в кучки (какие-то наборы могут оказаться пустыми). Обозначим число пар в этих наборах через a, b, c соответственно. Можем считать, что все эти числа ненулевые, ибо в противном случае тип каждой пары определяется тривиально. Так как пар массой 18 г и 20 г поровну, то в большинстве случаев можно сразу понять, сколько весят пары в каждой группе: либо есть два набора, состоящие из одинакового числа пар, либо два набора содержат в сумме столько же пар, сколько и третий. Нельзя это понять, только когда одновременно выполняется более одного равенства, то есть в следующих четырёх случаях.

1) $a = c$ и $a+c = b$. Тогда лёгкие пары весят по 18 г. Сравним тяжёлую пару с парой не из кучек. Если тяжёлая пара окажется легче, то они весят 19 г и 20 г, а если тяжелей – 20 г и 18 г соответственно.

2) $b = c$ и $b+c = a$. Этот случай рассматривается аналогично предыдущему.

3) $a = b$, $c = a+b$. Нетрудно понять, что этот случай реализуется, только если тяжёлые пары весят 20 г, лёгкие – 18 г, а остальные – 19 г.

4) $a = b = c$. Такое возможно, если n делится на 3. Так как $n \neq 3$, то в каждом наборе есть хотя бы по две пары. Объединим в группу одну лёгкую пару с одной тяжёлой и сравним её с двумя парами, не попавшими в кучки. Результат такого взвешивания однозначно определит массы всех пар.

Построим граф, в котором вершины соответствуют составленным в самом начале n парам. Рёбрами соединим две вершины, если соответствующие пары участвовали во взвешивании. Если взвешивались группы, то ребром будем соединять по одной паре из групп. Когда одна из пар сравнивалась с половиной группы X, соединим ребром эту пару с одной из пар, которая использовалась в формировании группы X. Тогда во всех рассмотренных случаях полученный граф не содержит циклов, поэтому число сделанных взвешиваний не превышает $n-1$.

КАК СТАВИЛИСЬ ОЦЕНКИ

«+» ставится за любое правильное решение; «±» ставится за решение с существенным, но легко восполнимым пробелом; «∓» ставится за неверное решение, однако с существенным продвижением; «–» ставится за неверное решение; «**0**» ставится, если задача не записана. «**+.**», «**–.**» (варианты «+», «–») ставятся в случае менее существенных недостатков (продвижений), чем в случае «+–» и «–+». «**+/2**» ставится в отдельных случаях, когда в тексте присутствует правильная идея, недостаточно развитая, чтобы считать задачу решенной. Эта оценка ставится и в том случае, если задача естественно распадается на две половины, из которых одна решена. Если жюри хочет обратить внимание на необычное достижение учащегося (краткость, красота, усиление результата и т.п.), – это отмечается знаком «+!».

При массовой проверке работ возникают типичные случаи, в которых требуются уточнения, считать ли недостаток (продвижение) существенным. Эти случаи описаны ниже.

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ, 8–9 классы

Номер задачи	Оценка	Критерий
1	−	Только верный ответ.
	∓	Только "явно" указаны две различные траектории (с общим началом и общим концом) прохода всех клеток (без повторений) с одинаковыми длинами соответствующих прыжков, но начала/и или концы траекторий не в крайних клетках.
	+	Только "явно" указаны две различные корректные траектории с одинаковыми длинами соответствующих прыжков.
2	−	Доказано только, что из условия следует, что $BC = AD$.
	−.	Только идея, что существует контрпример - равнобедренная трапеция, содержательного продвижения в его построении нет.
	∓	Доказано, что $BC=AD$. Доказано и явно сформулировано, что $CD=AD$ и/или что $\angle DAC=\angle ACD$ и/или аналогичное. Других существенных продвижений нет.
		К критерию выше НЕ относится доказательство только равенств углов $\angle CAD=\angle CAB=\angle DBA=\angle DBC$.
	+.	Только утверждается, что $ABCD$ может быть равнобедренной трапецией, у которой диагонали являются биссектрисами углов при основании AB.
	+.	Только верный ответ и "картинка", на которой указаны "явно" значения всех углов, на которые углы четырёхугольника делятся диагоналями, но никак не обосновано, что действительно существует соответствующий рисунку четырёхугольник, удовлетворяющий условию задачи, отличный от квадрата (при этом соответствующий четырёхугольник существует).
		За углы как у половины правильного шестиугольника ставится плюс; за остальное совсем без обоснований ±
	+	Утверждается, что существует равнобедренная трапеция, у которой одно из оснований равно боковой стороне, и что $ABCD$ может быть такой трапецией с таким основанием CD.

3	−	Только верный ответ.
	−.	Лишь утверждается и, возможно, даже сформулировано в строгом виде, и, возможно, даже доказано, что «вороне выгодно брать все ягоды из узлов».
	∓	Только утверждается, и, возможно, доказано, что если узел сетки лежит внутри участка, то все 4 содержащие его клетки лежат в этом участке.
	±	Только явно указаны 9 ягод, и утверждается, что, утащив их, ворона гарантированно добьётся того, что ни один фермер не заметит пропажу; (и ягоды указаны верно).
	+.	Только явно указаны 9 ягод, и утверждается, что, утащив их, ворона гарантированно добьётся того, что ни один фермер не заметит пропажу (и ягоды указаны верно), причём на рисунке соответствующие 9 точек обведены клетчатыми квадратами 2×2.
4	−	Только верный ответ.
	∓	Только утверждается, и возможно, доказано, что сумма всяких двух соседних чисел кратна 3.
	+/2	Доказано только, что при чётном количестве чисел в круге их сумма не равна 2023.
	+/2	Доказано лишь, что при нечётном количестве чисел в круге их сумма не равна 2023, или доказано лишь, что количество чисел в кругу чётно.
5	−	Только верный ответ.
	∓	Только утверждается, что Вася может "после каждого своего хода оставлять среди башен две башни, состоящие из чётного числа кубиков, у одной из которых нижний кубик белый, а у другой – чёрный".
		Если обоснование верной стратегии ссылается на перебор случаев и всё разобрано верно, но один случай (не получающийся из разобранных инвертированием цветов) упущен, и его разбор не сложнее остальных случаев – ставится ± ***;***
		Если работоспособность стратегии тривиальна из её описания (довольно понятно, как будет идти игра) – стратегия считается обоснованной.
		Список известных жюри стратегий прилагается отдельно. Если приведена полностью верная стратегия из прилагаемого списка, но её работоспособность совсем не доказана – ставится ∓
		Если только ***приведена стратегия, которая не верна, но можно исправить ход в позиции из 3 башен так, чтобы она стала верна*** - *ставится* **−.** *; если помимо такой стратегии есть ещё какие-то рассуждения, существенно помогающие обосновать верность исправленной стратегии, но то, что её надо исправлять, так и не написано – ставится ∓.*

Приложение к критериям базового варианта 8-9 классов. Список стратегий в задаче 5:

Стратегия 0. Пока башенок больше трёх: Вася всегда делает ход так, чтобы после его хода все башенки были чёрными или белыми. Когда башенок 3, Вася делает ход так, чтобы Петя не смог сделать следующий ход.

Стратегия 1. До тех пор, пока башенок больше трёх: если Петя своим ходом поставил сверху башенку с чёрным низом, то Вася ставит сверху башенку с белым низом (какую-угодно, на какую-угодно с чёрным верхом). Когда башенок 3, Вася делает ход так, чтобы Петя не смог сделать следующий ход.

Стратегия 1'. До тех пор, пока башенок больше трёх, Вася делает ход так, чтобы количества чёрных кубиков снизу (то есть башен, у которых нижний кубик чёрный), чёрных кубиков сверху, белых кубиков снизу и белых кубиков сверху совпадали после его хода. Когда башенок 3, Вася делает ход так, чтобы Петя не смог сделать следующий ход.

Стратегия 1''. До тех пор, пока башенок больше трёх, Вася делает ход так, чтобы количества башен ЧБ (чёрный низ, белый верх) и БЧ (белый низ, чёрный верх) совпадали после его хода. Когда башенок 3, Вася делает ход так, чтобы Петя не смог сделать следующий ход.

Стратегия 2. Вася всегда делает ход так, чтобы сохранялись условия: количества БЧ и ЧБ одинаковы, и количество ББ чётно.

Стратегия 3 (правильная зеркальная). Вася делает «зеркальный ход относительно типов башен»: если Петя ставит ББ на ЧЧ, то Вася ставит ЧЧ на ББ, если ББ на БЧ – то ЧЧ на ЧБ, если БЧ на БЧ – то ЧБ на ЧБ, и т.д. и т.п.

Стратегия 4 (локальный переворот). Вася делает «перевёрнутый ход относительно типов башен»: Если Петя ставит ББ на ЧЧ, то Вася ставит ЧЧ на ББ, если ББ на БЧ – то ЧБ на ББ, если БЧ на БЧ – то ЧБ на ЧБ, если БЧ на ЧЧ – то ЧЧ на ЧБ, в остальных случаях аналогично (чёрный и белый цвета меняются местами).

Стратегии 1, 1', 1'' в точности эквивалентны, вторая – частный случай первой, 3-я и 4-я – частные случаи второй.

Стратегия 5 (полный переворот). Если Петя ставит башню X на башню Y, то Вася ставит перевёрнутую башню Y на перевёрнутую башню X. (Перевёрнутая башня – это башня, в которой кубики идут в противоположном порядке.)

Стратегия 6. Вася всегда делает ход так, чтобы после его хода среди башенок была ЧБ и была БЧ.

Стратегия 7. Вася всегда делает ход так, чтобы после его хода среди башенок была ровно одна ЧБ и ровно одна БЧ.

Стратегия 8. Вася всегда делает ход так, чтобы после его хода среди башенок была ровно одна ЧБ, ровно одна БЧ, а всё остальное – отдельные кубики.

БАЗОВЫЙ ВАРИАНТ, 10–11 классы

Номер задачи	**Оценка**	**Критерий**
1	−	Только верный ответ.
	∓	Только утверждается, что обязательно *a*_0=0.
	∓	Доказано только, что 0 – корень многочлена *P(x)+P(–x)*; нет даже утверждения, что *a*_0=0.
2	−	Только верный ответ.
	Не более +/2	Только приведено описание (например, указаны скорости стрелок и их положения в некоторый конкретный момент времени) часов, удовлетворяющих условию задачи, и у этих часов все три стрелки действительно никогда (после произошедшего в условии) не совпадут. И, возможно, доказано, что описание корректно и удовлетворяет условиям задачи.

2		***Комментарий к критерию выше.*** *Оценка зависит от того, насколько просто проверить, что часы, соответствующие описанию и удовлетворяющие условию задачи, существуют и что для них три стрелки не совпадут. Последнее иногда требует проверки того, что некий параметр не имеет вид N/4, где N – целое, а иногда проверка сводится к тому, что некий параметр не является специального вида квадратичной иррациональностью, что для некоторых чисел (например, для π/e, что встречалось в работах) непонятно, как проверить.*
3	−.	Только верный ответ и/или идея индукции.
	∓	Только утверждается, что всякое (n+1)-значное «хорошее» число получается из n-значного «хорошего» приписыванием одной из трёх цифр слева или аналогичное. Дальнейших продвижений нет.
	±	Решение аналогично авторскому, однако без обоснования и без формулировки используется (неявно), что всякое n+1-значное «хорошее» число получается из некоторого n-значного «хорошего» числа приписыванием к нему слева некоторой цифры; всё остальное верно и доказано.
	+.	Решение аналогично авторскому, и явно сформулировано, но не доказано то, что всякое n+1-значное «хорошее» число получается из некоторого n-значного «хорошего» числа приписыванием к нему слева некоторой цифры; всё остальное верно и доказано.
	+.	Решение аналогично авторскому, сформулировано, но не доказано, что если к «хорошему» n-значному числу приписать слева цифру из {2,3,4,5,6,7} то полученное число будет «хорошим» ровно в двух случаях: 1-й: приписанная цифра чётна и исходное число кратно 2^(n+1); 2-й: приписанная цифра нечётна и исходное число не кратно 2^(n+1); всё остальное верно и доказано.
4	−	Доказано только, что отрезок $A'B'$ виден из середины CP под углом, равным $2\angle ACB$.
	∓	Доказано только, что $\angle A'C'B' = 180° – 2\angle ACB$.
	+.	Утверждение задачи доказано в предположении, (возможно неявном), что $P\neq H$. Случай $P=H$ не разобран.
		Оценка не снижается за отсутствие обоснования явно сформулированного утверждения о том, что отрезок A'B' виден из середины CP под углом, равным 2∠ACB.
		Оценка не снижается за использование (в том числе неявное) того, что A, B, C лежат снаружи окружности (A'B'C').
		Оценка не снижается за использование (в том числе неявное) того, что точки C и P (или C и C'') лежат по разные стороны от B''A'', где B'', A'', C'' – образы P при симметрии от AC, BC, AB соответственно.
5	−	Только верный ответ.
	−.	Лишь утверждается и, возможно, даже сформулировано в строгом виде, и, возможно, даже доказано, что «вороне выгодно брать все ягоды из узлов».
	∓	Только утверждается, и, возможно, доказано, что если узел сетки лежит внутри участка, то все четыре содержащие его клетки лежат в этом участке.

5	±	Только явно указаны 8 ягод, и утверждается, что, утащив их, ворона гарантированно добьётся того, что ни один фермер не заметит пропажу (и ягоды указаны верно). И, возможно, на рисунке соответствующие восемь точек обведены клетчатыми квадратами 2×2.

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ, 8–9 классы

Номер задачи	Оценка	Критерий
1		
	−	Только верный ответ.
	+	Только «явно» указана подходящая расстановка чисел.
2		
	−.	Только идея рассмотреть области листа бумаги (из условия задачи), в каждой из которых должна быть какая-то вершина треугольника.
		Комментарий к критерию выше: *рассуждения вида «пусть нельзя вырезать нужный треугольник, тогда в каждом из таких-то четырёх мест должна быть вершина дыры, а, значит, у дыры хотя бы 4 вершины, но это треугольник».*
		Комментарии к критериям ниже: *Под квадратом всюду подразумевается один и тот же бумажный квадрат площади 1 (лист бумаги из условия). Под «разбором случая» всюду подразумевается доказательство того, что если в бумажном квадрате площади 1 проделана дыра, соответствующая этому случаю (это не обязательно дыра из условия задачи!), то из оставшейся бумаги можно вырезать треугольник площади $^1/_6$.*
	−.	Доказано только, что достаточно разобрать только случай, когда дыра – треугольник с вершинами на сторонах квадрата.
	−.	Только верно разобран случай дыры-треугольника с двумя вершинами, лежащими на одной стороне квадрата и третьей вершиной, лежащей на другой стороне квадрата.
	−.	Доказано, что достаточно разобрать только случай, когда дыра – треугольник с вершинами на сторонах квадрата. Верно разобран случай дыры-треугольника с двумя вершинами, лежащими на одной стороне квадрата, и третьей вершиной, лежащей на другой стороне квадрата. Нет других существенных продвижений.
	+/2	Только верно разобран случай, когда все вершины дыры-треугольника лежат на попарно различных сторонах квадрата.
	±	Доказано, что достаточно разобрать только случай, когда дыра – треугольник с вершинами на сторонах квадрата. Верно разобран случай, когда все вершины дыры-треугольника лежат на попарно различных сторонах квадрата. Нет других существенных продвижений.
	±	Только верно разобран случай, когда все вершины дыры-треугольника лежат на сторонах квадрата.

2	±	Случай, когда все вершины дыры-треугольника лежат на сторонах квадрата, разобран верно и полностью. Утверждается, что «можно разбирать только случай, когда дыра – треугольник с вершинами на сторонах квадрата, так как можем заменить исходную дыру на такой треугольник с большей площадью», или текст в работе начинается со слов «вытянем вершины дыры на границу, площадь дыры увеличится, поэтому если теперь сможем вырезать нужный треугольник, то и изначально могли». Нет существенных продвижений в доказательстве существования треугольника со всеми вершинами на сторонах квадрата, полностью содержащего исходную дыру из условия задачи. Возможно, доказано, что для всякой дыры из условия задачи найдётся треугольник с вершинами на сторонах квадрата, больший по площади, чем исходная дыра. Нет других существенных продвижений ни в рассмотрении случая, когда дыра удовлетворяет исходным условиям задачи, ни в сведении этого случая к разобранным.
	+.	Приведена конструкция построения (по исходной дыре из условия задачи) треугольника со всеми вершинами на сторонах квадрата, полностью содержащего исходную дыру из условия задачи, причём обоснование того, что эта конструкция действительно такова и корректна, тривиально. Утверждается, что «можно разбирать только случай, когда дыра – треугольник с вершинами на сторонах квадрата, так как можем заменить исходную дыру на такой треугольник в соответствии с приведённой конструкцией, так как его площадь больше, чем площадь исходной дыры» или в работе написано «вытянем вершины дыры на границу в соответствии с приведённой конструкцией, площадь дыры увеличится, поэтому если теперь сможем вырезать нужный треугольник, то и изначально могли». Случай, когда все вершины дыры-треугольника лежат на сторонах квадрата, разобран верно и полностью. Больше ничего.
	+.	Случай, когда все вершины дыры-треугольника лежат на сторонах квадрата, разобран верно и полностью. Сформулировано и используется, но не доказано утверждение «среди треугольников с вершинами на сторонах квадрата найдётся содержащий исходную дыру из условия». Больше ничего.
	Комментарий к критерию выше: *сюда же относится случай, когда вместо этого утверждения написано что-то вроде «можем вытянуть вершины на границу так, чтобы дыра увеличилась», но сюда не относится случай, когда написано конкретно про увеличение дыры* <u>*по площади*</u> *(а не по включению).*	
3	−.	Только верный ответ.
	∓	Только «явно» указаны такие 2 карточки, что из одной нельзя получить другую за 2 операции, и это утверждается, но без обоснования.
	∓	Утверждается, что при операции прибавления/вычитания разность между верхним и нижним числом сохраняется, а при умножении/делении сохраняется значение дроби. Комментарий: это наблюдение не суммируется с другими оценками
	∓	Утверждается, что при операции прибавления/вычитания разность между верхним и нижним числом сохраняется, при умножении/делении эта разность увеличивается/уменьшается пропорционально, и сделан вывод, что карточку надо и умножать, и делить. *Комментарий:* ценится сам вывод; наблюдение инвариантов не суммируется с другими оценками
	+/2	Доказано только, что не из любой карточки можно получить любую за 2 операции.

3	+/2	Доказано только, что из любой карточки можно получить любую за не более, чем 3 операции.
	±	Доказано, что из любой карточки можно получить любую за 3 операции, и указаны «явно» 2 такие карточки, что из одной нельзя получить другую за 2 операции, и это утверждается, но без обоснования. Более ничего.
	+.	Задача сведена к доказательству того, что существуют такие числа a, b, c, d, что $a/b \neq c/d$ и $(a-b)/(d-c)$ не является ни целым, ни обратным к целому
	+.	Задача сведена к доказательству того, что существуют такие числа a, b, c, d, что $a/b \neq c/d$ и НОД$(b - a, d - c) = 1$ (без разбора случая, когда одна из разностей равна 1)
4	∓	Доказано только, что биссектриса угла BAC проходит через точку вторичного пересечения перпендикуляра из D на AC со вписанной окружностью, дальнейшего содержательного продвижения нет.
	∓	Задача только сведена к доказательству того, что точки A, X, I (в обозначениях из первого авторского решения) лежат на одной прямой, или аналогичное – например, задача только сведена к доказательству того, что X – центр треугольника ADH (в обозначениях из первого авторского решения).
5		
	−.	Только наблюдение/наблюдения вида (возможно с доказательством): «если весы показывают равновесие при взвешивании по k гирь на чашах, то на чашах все гири настоящие», где k – некоторое из чисел 1, 2, 3, 4, 5, 6. То есть, чтобы заработать «**−.**», достаточно, например, утверждать это про взвешивание «1 против 1»; но даже если утверждается и доказано в общем виде, что «при равновесии чаш с одинаковым количеством гирь на каждой все гири на чашах настоящие», но далее нет продвижений – оценка тоже «**−.**»
	∓	Предлагается сделать первое взвешивание «4 на 4», далее верно разобран либо только случай равновесия, либо только случай неравновесия (верно указана фальшивая гиря во всех случаях, с обоснованием или без).
	±	Только приведён верный алгоритм взвешиваний и в каждом возможном случае правильно указана фальшивая гиря. Обоснования нет.
6	−.	Только верный ответ.
	∓	Доказано только, что $1{,}5(n^2 + 0{,}5) > (n - 0{,}5)(2n - 1{,}5)$.
	+/2	Доказано только, что при $n=4$ такое могло произойти.
	+/2	Доказано только, что $n < 5$.
7		
	Оценка не снижается за использование без обоснования утверждения о том, что слон может из любой белой клетки попасть в любую другую белую за не более чем за два хода, если на доске нет других фигур.	
	−	Только утверждается, что за 2 хода всегда можно съесть одного слона (если на доске есть слоны разных цветов), причём так, чтобы на доске либо оставались слоны разного цвета, либо на доске остался ровно один слон.
	−.	Только верный ответ.
	−.	Доказано только, что за 2 хода всегда можно съесть одного слона (если на доске есть слоны разных цветов).

7	−.	Только «явно» указана некоторая расстановка слонов, в которой на каждой из 199 диагоналей есть слон (и среди слонов есть слоны разных цветов), и про эту расстановку утверждается, что в ней потребуется не менее 197 ходов, чтобы на доске остался один слон.
	−.	«Явно» указана некоторая расстановка слонов, в которой на каждой из 199 диагоналей есть слон (и среди слонов есть слоны разных цветов), и про эту расстановку утверждается, что в ней потребуется не менее 197 ходов, чтобы на доске остался один слон. Доказано, что за 2 хода всегда можно съесть одного слона (если на доске есть слоны разных цветов), причём так, чтобы на доске либо оставались слоны разного цвета, либо на доске остался ровно один слон. Дан верный ответ. Других существенных продвижений нет.
	∓	Доказано только, что 197 ходов заведомо достаточно; возможно, при доказательстве без обоснования явно использовано утверждение из критерия на «−»;
	+/2	Доказано только, что может потребоваться не менее 197 ходов.
	+/2	Доказано, что 197 ходов заведомо достаточно (возможно, при доказательстве без обоснования явно использовано утверждение из критерия на «−»), и «явно» указана некоторая расстановка слонов, в которой на каждой из 199 диагоналей есть слон (и среди слонов есть слоны разных цветов), и про эту расстановку утверждается, что в ней потребуется не менее 197 ходов, чтобы на доске остался один слон. Более ничего.
	+.	Дан ответ «197», доказательство только сведено к доказательству утверждения из критерия на «−», само утверждение явно сформулировано, но не доказано.

СЛОЖНЫЙ ВАРИАНТ, 10–11 классы

Номер задачи	Оценка	Критерий
1	−	Только верный ответ.
	−.	Только гипотеза, что корни разбиваются на пары взаимно обратных, нет продвижений в доказательстве.
2	−.	Только верный ответ.
	∓	Только приведена «явно» конструкция (возможно, индуктивная) числа из 1023 цифр, удовлетворяющего условиям задачи, но нет доказательства того, что конструкция действительно удовлетворяет условию задачи.
	+/2	Доказано только, что во всяком таком числе не более 1023 цифр,
	+/2	Доказано только, что в таком числе может быть 1023 цифры.
	Не менее ±	Доказано, что во всяком таком числе не более 1023 цифр, и приведена «явно» конструкция (возможно, индуктивная) числа из 1023 цифр, удовлетворяющего условиям задачи, но нет доказательства того, что конструкция действительно удовлетворяет условию задачи.
	+.	В решении по индукции, аналогичном официальному, не доказано только, что удовлетворяет условиям задачи число вида *AxA*, где *A* удовлетворяет предположению индукции, а *x* – цифра, которой нет в *A*. Всё остальное верно и доказано.
3а	−	Только верный ответ.

3а	**Не менее ±**	Только приведена «явно» конструкция разбиения прямоугольника, не являющегося квадратом, на прямоугольники (не более 8 штук), в которой центры прямоугольников образуют выпуклый многоугольник, и при этом один из прямоугольников не примыкает ни к одной из сторон.
	±	Верный пример, нарисованный не вполне точно, и проверка выпуклости многоугольника требует небольших уточнений, как проведены линии
	+.	Верный пример, нарисованный не вполне точно – без «клеточек» и указания точных длин, – но выпуклость многоугольника очевидна, даже учитывая погрешности в точности рисунка.
	+	Верный пример, нарисованный «по клеточкам».
3б		
	−.	Только верный ответ и идея построения разбиения, «комбинаторно» устроенного так же, как разбиение в официальном решении.
	±	Приведена верная явная конструкция без обоснования, обоснование не сложное.
4		
		нет критериев
5		
	−.	Доказано только, что если *A, P, Q, C* лежат на одной окружности, то $BD=BE$, или аналогичное (например, *B* – середина дуги *DE*). Сюда же относится случай, когда задача только сведена к доказательству того, что $BD=BE$. Сюда же относится случай, когда только решена «обратная» задача: если *A, P, Q, C* лежат на одной окружности то *D, E, G, F* лежат на одной окружности с центром *B*. Сюда же относится случай, когда получены все вышеуказанные продвижения сразу, но более ничего нет.
	±	Доказано, что центр окружности, проходящей через точки *D, E, G, F*, лежит на пересечении описанных окружностей треугольников *DGB* и *EFB*, далее безосновательно утверждается, что этот центр – точка *B*, и из этого верно выведено утверждение задачи.
	+.	Вводятся точки *X, Y* как в третьем решении, доказано, что $BD=BY$ и $BE=BX$, далее безосновательно утверждается, что серединные перпендикуляры к *DY* и *EX* имеют единственную общую точку, из чего делается вывод, что *B* совпадает с центром окружности, проходящей через точки *D, E, G, F*, и из этого верно выведено утверждение задачи.
		Оценка не снижается за использование без обоснования выпуклости четырёхугольника DEGF.
6		
	−	Только верный ответ
	−.	В предположении противного доказано, что над максимальным числом *M* и минимальным числом *m* в нижней строке стоят одинаковые числа, далее рассматривается отличное от этих чисел число в верхней строке, и доказано, что под ним стоит такое число *w*, что $M – m$ либо кратно $M – w$, либо кратно $w – m$. Далее нет продвижений.
7		
	−.	При подходе из второго официального решения рассмотрен только случай, когда при первом же взвешивании нет равновесия.

45 Турнир городов, осенний тур. Соответствие между оценками и баллами

Номер задачи		Цена	Оценка								
			0	-	-.	∓	+/2	±	+.	+	+!
Младший базовый	1	4	0	0	0	1	2	3	4	4	4
	2	4	0	0	0	1	2	3	4	4	4
	3	5	0	0	0	1	2	4	5	5	5
	4	5	0	0	0	1	2	4	5	5	5
	5	5	0	0	1	2	3	4	5	5	5
Старший базовый	1	3	0	0	0	1	1	2	3	3	3
	2	4	0	0	0	1	2	3	4	4	4
	3	4	0	0	0	1	2	3	4	4	4
	4	5	0	0	0	2	3	4	5	5	5
	5	6	0	0	0	1	3	5	6	6	6
Младший сложный	1	4	0	0	0	1	2	3	4	4	4
	2	6	0	0	1	2	3	5	6	6	6
	3	7	0	0	1	2	3	5	6	7	7
	4	7	0	0	1	3	4	6	7	7	7
	5	9	0	0	1	3	4	7	8	9	9
	6	10	0	0	1	3	5	8	9	10	10
	7	12	0	0	1	4	6	10	11	12	12
Старший сложный	1	4	0	0	0	1	2	3	4	4	4
	2	5	0	0	1	2	3	4	5	5	5
	3а	3	0	0	0	1	1	3	3	3	3
	3б	6	0	0	1	2	3	5	6	6	6
	4	9	0	0	1	3	4	8	9	9	9
	5	10	0	0	1	3	5	7	9	10	10
	6	12	0	0	2	4	6	10	11	12	12
	7	14	0	0	2	4	7	12	13	14	14

СТАТИСТИКА ПО МОСКВЕ

Базовый младший вариант (798 работ)

	1	2	3	4	5
0	114	112	174	210	235
–	243	393	280	300	386
-.	5	42	8	8	32
∓	5	43	11	21	26
$^{+}/_{2}$	0	0	1	35	1
±	0	1	60	8	17
+.	4	37	12	6	2
+	427	170	252	210	99
+!	0	0	0	0	0

Базовый старший вариант (381 работа)

	1	2	3	4	5
0	70	141	156	224	122
–	103	182	82	71	129
-.	0	1	31	0	24
∓	16	0	9	2	39
$^{+}/_{2}$	0	8	0	0	0
±	1	3	15	0	4
+.	2	2	10	4	3
+	189	44	78	80	60
+!	0	0	0	0	0

Сложный младший вариант (511 работ)

	1	2	3	4	5	6	7
0	108	186	176	358	287	438	364
–	95	200	159	67	57	59	87
-.	3	47	23	0	126	1	45
∓	2	12	28	16	15	2	5
$^{+}/_{2}$	0	15	31	1	0	8	9
±	4	24	14	0	3	0	0
+.	1	5	8	1	0	0	0
+	298	22	72	68	23	3	1
+!	0	0	0	0	0	0	0

Сложный старший вариант (425 работ)

	1	2	3а	3б	4	5	6	7
0	249	95	97	263	264	298	287	308
–	110	83	91	130	139	50	122	104
-.	5	12	0	24	1	37	5	8
∓	0	53	0	4	1	4	2	2
$^{+}/_{2}$	0	36	0	0	0	0	0	0
±	3	36	12	2	1	20	4	2
+.	1	41	32	0	2	4	0	0
+	57	69	193	2	17	12	5	1
+!	0	0	0	0	0	0	0	0