44-й Международный математический Турнир городов
Решения задач весеннего тура

Базовый вариант, 8–9 классы

1. В кабинете сидят N нерях, у каждого на его столе скопилось ненулевое количество мусора. Неряхи выходят обедать по одному (после возвращения предыдущего), а в это время каждый из остальных перекладывает половину мусора со своего стола на стол вышедшего. Может ли случиться, что после того, как все пообедали, количество мусора на столах ни у кого не изменится, если **а**) [1] $N = 2$; **б**) [3] $N = 10$?

Алексей Заславский

Ответ: может.

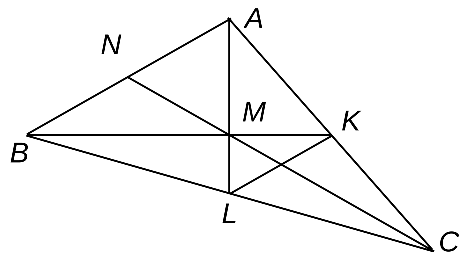
Решение. **а**) Подходит пример, когда у первого ушедшего 2 г мусора, а у второго – 4 г.

б) Занумеруем нерях в порядке их ухода на обед. Пусть на столе i-того неряхи лежит 2^i г мусора. После ухода первого на его столе окажется $2 + 2 + 4 + 8 + ... + 2^9 = 2^{10}$ г мусора, а на остальных столах вес мусора уменьшится вдвое, то есть произойдёт циклический сдвиг. После ухода второго произойдёт аналогичный сдвиг, а после 10 таких сдвигов на всех столах окажется исходное количество мусора.

2. [4] В треугольнике ABC провели медианы BK и CN, пересекающиеся в точке M. Какое наибольшее количество сторон четырёхугольника $ANMK$ может иметь длину 1?

Егор Бакаев

Ответ: 2 стороны. **Решение**. Подходит, например, любой треугольник, где $AB = AC = 2$. Докажем, что трёх равных сторон быть не может.



Способ 1. Предположим, что хотя бы три стороны четырёхугольника $ANMK$ равны 1. Возможны всего два принципиально различных случая.

1) $AN = NM = MK = 1$. Тогда $NB = 1$, $MB = 2$, значит, $MN + NB = MB$.

2) $KA = AN = NM = 1$. Тогда $AC = 2$, $NC = 3$, значит, $NA + AC = NC$.

В обоих случаях получено противоречие с неравенством треугольника.

Способ 2. Если более двух сторон четырёхугольника равны 1, то либо $AK = NA$, либо $KM = MN$. В первом случае треугольник ABC равнобедренный. Во втором случае $BK = CN = 3$, так что и в этом случае треугольник ABC равнобедренный. Отсюда следует, что $AK = KM = MN = NA$, то есть $AKMN$ – ромб. Противоречие, так как прямые AK и NM не параллельны.

Способ 3. Пусть L – середина стороны BC. Если $NM = NA = NB$, то треугольник AMB прямоугольный. Треугольник LMK подобен треугольнику AMB с коэффициентом 0,5, поэтому $MK < LK = NA$. Далее, $AM > LM$, поэтому у треугольника AMK гипотенуза больше,

чем у треугольника *LMK*, то есть $AK > LK = NA$. Таким образом в четырёхугольнике *ANMK* нет трёх равных друг другу сторон.
Случай, когда $KM=KA$ аналогичен, а если $KM \neq KA$ и $NM \neq NA$, то среди отрезков *NM*, *NA*, *KM*, *KA* также нет трёх равных друг другу.

Замечание. Любые две стороны четырёхугольника *ANMK* могут быть равны 1. Равенство $NM = NA$ выполнено в треугольнике с перпендикулярными медианами (см. способ 3). Равенство $NA = MK$ выполнено в треугольнике, где $AB = 2$, $BK = 3$.

3. [5] На столе лежат 2023 игральных кубика. За 1 рубль можно выбрать любой кубик и переставить его на любую из четырёх граней, которые сейчас для него боковые. За какое наименьшее количество рублей гарантированно удастся поставить все кубики так, чтобы на верхних гранях у них было поровну точек? (Количества точек на гранях каждого игрального кубика равны числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, суммарное число точек на противоположных гранях всегда равно 7.)

Егор Бакаев

Ответ: за 2022 рубля.
Решение 1. Пусть есть пара *противоположных* кубиков, то есть сумма точек на их верхних гранях равна 7. Заметим, что на эту пару потребуется суммарно 2 рубля, к какому бы значению ни захотелось их привести. Будем откладывать пары противоположных, пока они есть. Так как исходное количество кубиков нечётно, то в конце останется хотя бы один кубик. Тогда остальные непарные кубики, каждый не более чем за рубль, можно привести в состояние этого оставшегося кубика. Значит, 2022 рублей хватит.
С другой стороны, мог остаться только один кубик без пары, поэтому 2022 рубля необходимо.

Решение 2. Обозначим через k_i общее количество кубиков с i точками на верхней грани, а через n_i – наименьшее количество рублей, за которое можно на всех верхних гранях сделать по i точек. Тогда $k_1 + \ldots + k_6 = 2023$, а $n_1 = k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + 2k_6 = 2023 + k_6 - k_1$, и аналогично $n_2 = 2023 + k_5 - k_2$, ..., $n_6 = 2023 + k_1 - k_6$. Тогда $n_1 + \ldots + n_6 = 6\times 2023$. Пусть среди чисел $n_1, \ldots, n_6$ нет числа, меньшего 2023. Тогда $n_1 = \ldots = n_6 = 2023$, откуда $k_1 = k_6$, $k_2 = k_5$, $k_3 = k_4$, поэтому $2023 = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 = 2(k_1 + k_2 + k_3)$ – чётное число. Противоречие. Значит, одно из чисел $n_1, \ldots, n_6$ не превосходит 2022, то есть 2022 рублей в любом случае достаточно.
При $k_1 = \ldots = k_5 = 337$, $k_6 = 338$ получим $n_1 = 2024$, $n_2 = \ldots = n_5 = 2023$, $n_6 = 2022$, то есть 2021 рубля недостаточно.

4. [5] Для произвольного числа x рассмотрим сумму

$$Q(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x}{10000} \right\rfloor.$$

Найдите разность $Q(2023) - Q(2022)$. (Здесь $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Алексей Толпыго

Ответ: 6. **Решение**. Очевидно, $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$. Неравенство $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor = m$ означает, что $x - 1 < km \le x$, откуда $x = km$, то есть x делится на k, и тогда $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - 1$. Верно и обратное: если x кратно k, то $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$.

Значит, среди чисел $\lfloor 2023 \rfloor - \lfloor 2022 \rfloor$, $\left\lfloor \frac{2023}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2022}{2} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{2023}{10000} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2022}{10000} \right\rfloor$ единиц ровно столько, сколько у числа 2023 натуральных делителей, не превосходящих 2023, а остальные числа равны нулю. *Разность* $Q(2023) - Q(2022)$ равна сумме вышеуказанных чисел, то есть количеству натуральных делителей числа $2023 = 7\times17^2$, а оно равно 6.

5. На каждой клетке доски 5×5 лежит по одной монете, все монеты внешне одинаковы. Среди них ровно 2 монеты фальшивые, они одинакового веса и легче настоящих, которые тоже весят одинаково. Фальшивые монеты лежат в клетках, имеющих ровно одну общую вершину. Можно ли за одно взвешивание на чашечных весах без гирь гарантированно найти **а**) [2] 13 настоящих монет; **б**) [3] 15 настоящих монет; **в**) [2] 17 настоящих монет?

Рустэм Женодаров, Александр Грибалко, Сергей Токарев

Ответ: а) можно; **б)** можно; **в**) нельзя.

Решение. Раскрасим доску и монеты на ней в шахматном порядке (угловые клетки чёрные). Отметим, что обе фальшивые монеты одного цвета.

а) Способ 1. Положим на весы 16 монет, лежащих на краю доски: на одну чашку – 8 чёрных, на другую – 8 белых. Возможны три случая.

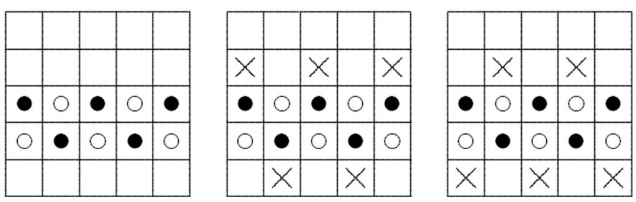
1) Весы в равновесии. Так как фальшивые монеты могли быть на только на одной чаше, их нет среди взвешиваемых монет, то есть все 16 взвешиваемых монет настоящие.

2) Перевесила «чёрная» чашка. Тогда одна фальшивая монета – на «белой» чашке. Следовательно, все 13 чёрных монет настоящие.

3) Перевесила «белая» чашка. Тогда одна фальшивая монета – на «чёрной» чашке. Поэтому центральная монета настоящая. И все 12 белых монет тоже.

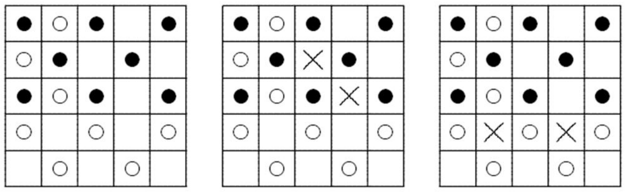
Обобщение. Отложим любую чёрную монету A и всех её соседей по диагонали. Из оставшихся чёрных монет положим на одну чашу не менее 7, а на другую – столько же белых. При равновесии все монеты на весах настоящие (их не меньше 14). Если перевесят чёрные, то все чёрные монеты настоящие, а если белые, то все белые и A.

Способ 2. Положим на чаши 4 чёрные монеты, соседние с центральной, левые – на левую, правые – на правую. При равновесии все чёрные монеты настоящие (так как две фальшивые чёрные монеты не могут быть ни на разных чашах, ни обе вне чаш). Если какая-то чаша перевесит, то настоящие – две монеты на этой чаше и все белые монеты.



б) Способ 1. Взвесим чёрные монеты против белых на рисунке слева. В случае равновесия 15 монет в нижних трёх строках настоящие. Если чёрные монеты тяжелее, не взвешиваемая фальшивая монета может находиться только в квадратах, отмеченных крестиками на рис.

в центре. Следовательно, мы нашли $25 - 5 - 5 = 15$ настоящих монет. Если белые монеты тяжелее, ситуация показана на рисунке справа с тем же результатом.



Способ 2. Взвесим чёрные монеты против белых на левом рисунке. В случае равновесия все 16 взвешиваемых монет настоящие. Если чёрные монеты тяжелее, не взвешиваемая фальшивая монета может находиться только в двух квадратах, отмеченных крестиками на центральном рисунке. Таким образом, найдены $25 - 8 - 2 = 15$ настоящих монет. Если белые монеты тяжелее, получим тот же результат (правый рисунок.

Способ 3. Из пятой строки две белые монеты положим на левую чашку, две чёрные – на правую, а одну монету отложим. Остальные белые – на правую, чёрные – на левую чашку.

При равновесии все монеты из первых трёх строк настоящие. Если какая-то чашка перевесит, то настоящие – все 12 монет на ней и все монеты из пятой строки (итого 15 монет).

в) Априори любая из 25 монет *подозрительна* (может быть фальшивой). Взвешивание может иметь 3 исхода, поэтому хотя бы при одном из них подозрительными останутся не меньше 9 монет, то есть будет найдено не более $25 - 9 = 16$ настоящих монет.

Замечание. Докажем, что даже 16 настоящих монет гарантированно найти нельзя.

Рассмотрим граф: вершины – клетки, рёбра соединяют пары клеток, имеющих единственную общую вершину. Он распадается на две компоненты – чёрную и белую. Взвешивание – разбиение вершин на три части: П – монеты на правой чашке, Л – на левой, С – монеты на столе. В случае равновесия подозрительными остаются рёбра вида ЛП и СС, покрасим их в красный цвет. Если перевесит правая чашка, подозрительны ребра ЛЛ и ЛС (покрасим их в синий), если левая – ПП и ПС (в зелёный).

Пусть при любом исходе удаётся определить 16 настоящих монет. Тогда подграф, порождённый рёбрами каждого цвета, должен содержать не более 9 вершин. Значит, есть вершины, в которых сходятся разные цвета. Пусть в белой компоненте такая вершина единственна. Удалив её со всеми входящими рёбрами, получим связный граф на 11 вершинах, который не может иметь все рёбра одного цвета. Противоречие.

Следовательно, в белой компоненте хотя бы две «нехороших» вершины. Аналогичное верно и для чёрной компоненты.

Оценим двумя способами суммарное число вершин во всех трёх указанных подграфах. С одной стороны, их не больше $3 \cdot 9 = 27$, с другой – не меньше чем $25 + 2 + 2$ («нехорошие вершины» подсчитаны как минимум дважды). Противоречие.

Базовый вариант, 10–11 классы

1. [4] См. задачу 3 младших классов.

2. [4] Дано натуральное число n. Для произвольного числа x рассмотрим сумму

$$Q(x) = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{4} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{x}{10^n} \right\rfloor.$$

Найдите разность $Q(10^n) - Q(10^n - 1)$. (Здесь $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Алексей Толпыго

Ответ: $(n + 1)^2$. **Решение**. Очевидно, $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$. Неравенство $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor = m$ означает, что $x - 1 < km$ £ x, откуда $x = km$, то есть x делится на k, и тогда $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - 1$. Верно и обратное: если x кратно k, то $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$. Пусть $y = 10^n$.

Тогда среди чисел $\lfloor y \rfloor - \lfloor y - 1 \rfloor, \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y-1}{2} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{y}{y} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{y-1}{y} \right\rfloor$ единиц ровно столько, сколько у числа y натуральных делителей, не превосходящих y, а остальные числа равны нулю. *Разность* $Q(y) - Q(y - 1)$ равна сумме вышеуказанных чисел, и значит, равна количеству натуральных делителей числа $y = 2^n \times 5^n$, то есть $(n + 1)^2$.

3. [5] Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC, N – основание биссектрисы угла B. Касательная к описанной окружности треугольника AIN в вершине A и касательная к описанной окружности треугольника CIN в вершине C пересекаются в точке D. Докажите, что прямые AC и DI перпендикулярны.

Михаил Евдокимов

Решение 1. Рассмотрим центр J вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся стороны AC. Поскольку Ð*IAJ* = Ð*ICJ* = 90° (биссектрисы смежных углов перпендикулярны), точки A и C лежат на окружности w с диаметром IJ. По условию Ð*ACD* = Ð*NCD* = Ð*CIN* = Ð*CIJ* = Ð*CAJ*, аналогично Ð*CAD* = Ð*ACJ*. Значит, треугольники ACD и CAJ симметричны относительно серединного перпендикуляра к общей стороне AC. Если точки D и J совпадают, то треугольники IAJ и ICJ равны по катету и гипотенузе. Значит, прямая $ID = IJ$ совпадает с указанным серединным перпендикуляром. Если они не совпадают, точка D также лежит на w и DI ^ DJ || AC.

Решение 2. Пусть перпендикуляр, опущенный из I на AC вторично пересекает описанную окружность треугольника AIC в точке D'. Тогда

Ð*D'AC* = Ð*D'IC* = 90° – $\frac{1}{2}$Ð*C* = $\frac{1}{2}$(Ð*A* + Ð*B*) = Ð*AIN*.

Значит, $D'A$ – касательная к описанной окружности треугольника AIN. Аналогично $D'C$ – касательная к описанную окружности треугольника CIN. Следовательно, D и D' совпадают.

Решение 3. Нетрудно понять, что точки I и D лежат по разные стороны от прямой AC. Поскольку $\angle ACD = \angle NCD = \angle CIN$, $\angle CAD = \angle AIN$, то

$$\angle ADC = 180° - \angle ACD - \angle CAD = 180° - \angle AIC.$$

Значит, четырёхугольник $AICD$ вписан. Один из углов между хордами AC и DI равен

$$\angle DAC + \angle ADI = \angle AIN + \angle ACI = \angle IAB + \angle ABI + \angle ACI = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) = 90°.$$

4. [5] Бесконечные возрастающие арифметические прогрессии a_1, a_2, a_3, ... и b_1, b_2, b_3, … состоят из положительных чисел. Известно, что отношение $\frac{a_k}{b_k}$ целое при любом k. Верно ли, что это отношение не зависит от k?

Борис Френкин

Ответ: верно.

Решение 1. Пусть $a_k = a + ck$, $b_k = b + dk$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k} = \frac{c}{d}$. Но целочисленная последовательность может иметь пределом только целое число, причём все её члены с какого-то момента должны совпадать с этим пределом. Значит, $m = \frac{c}{d}$ – целое число и $\frac{a+ck}{b+dk} = \frac{c}{d}$ при всех достаточно больших k. Но тогда $ad = bc$, то есть $a = bm$, и поскольку $c=dm$, получаем, что $\frac{a_k}{b_k} = m$ при всех k.

Решение 2. Для положительных чисел p, q, r, s воспользуемся следующим фактом: если $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, то $\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$ (легко проверить). Используем обозначения решения 1. Доопределим $a_0 = a$, $b_0 = b$. Предположим, что $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Докажем индукцией по $k \geq 0$, что $\frac{a_k}{b_k} < \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} < \frac{c}{d}$. База k=0 получается применением указанного факта к неравенству $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, а переход от k к k+1 – применением факта к неравенству $\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} < \frac{c}{d}$. Тогда последовательность $\frac{a_k}{b_k}$ целых чисел возрастает, оставаясь ограниченной сверху. Противоречие. Аналогично к противоречию ведёт предположение $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$. Значит, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, а тогда и $\frac{a_k}{b_k} = \frac{c}{d}$.

5. Даны пять точек, расстояние между любыми двумя из них больше 2. Верно ли, что расстояние между какими-то двумя из них больше 3, если эти 5 точек расположены

а) [3] на плоскости;

б) [3] в пространстве?

Алексей Толпыго

а) **Ответ:** верно.

Решение 1. **Лемма**. Если в треугольнике две стороны больше 2, а угол между ними больше 105°, то длина третьей стороны больше 3.

Доказательство. Заметим, что $\sin 15° = \frac{\sin 30°}{2\cos 15°} > \frac{\sin 30°}{2} = \frac{1}{4}$. По теореме косинусов квадрат третьей стороны больше $2^2 + 2^2 - 8\cos 105° = 8 + 8\sin 15° > 10 > 3^2$. •

Рассмотрим два случая.

1) Выпуклая оболочка данных пяти точек – пятиугольник *ABCDE*. Тогда один из его углов (пусть *B*) не меньше $3\cdot 180°:5 = 108°$. По лемме $AC > 3$.

2) Выпуклая оболочка – четырёхугольник или треугольник. Тогда одна из точек (пусть *D*) принадлежит одному из треугольников (пусть *ABC*), образованному тремя другими точками. В этом случае один из углов *ADB*, *ADC*, *BDC* не меньше 120°. По лемме сторона треугольника, на которую он опирается, больше 3.

Замечания. **1**. Случай, когда выпуклая оболочка – отрезок, очевиден.

2. Аналогичные рассуждения доказывают, что найдутся даже точки на расстоянии, большем 1 + $\sqrt{5}$. Улучшить этот результат нельзя, что доказывает пример правильного пятиугольника.

б) **Ответ**. Неверно. *Пример*. Рассмотрим пять вершин правильной четырёхугольной пирамиды с равными рёбрами и диагональю основания длины 3. Тогда длины всех рёбер равны $\frac{3}{\sqrt{2}} > 2$. Можно даже взять 6 точек – в вершинах правильного октаэдра, или в вершинах правильной треугольной призмы с равными рёбрами, у которой диагональ боковой грани равна 3.

Замечание 1. В условиях задачи в пространстве можно показать, что расстояние между какими-то двумя точками больше $4\sqrt{\frac{3}{7}} \approx 2{,}6186$. Этот результат нельзя улучшить, что показывает следующий пример.

Рассмотрим правильную треугольную пирамиду со стороной основания 3 и высотой 1,5. Её боковое ребро равно $\sqrt{3+\left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{2} > 2$. Склеив две такие пирамиды основаниями, получим бипирамиду (5 вершин), у которой отношение наибольшего расстояния между вершинами к наименьшему как раз равно $2\sqrt{\frac{3}{7}}$.

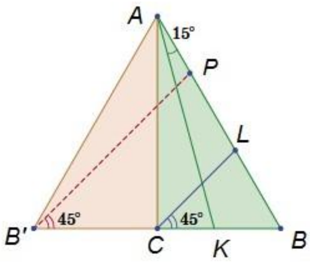
44-й Международный математический Турнир городов
Решения задач весеннего тура

Сложный вариант, 8–9 классы

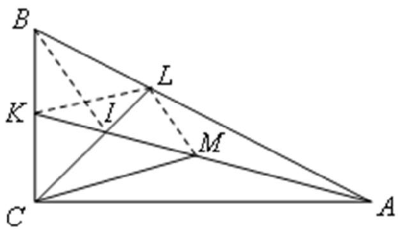
1. [4] Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° одна из биссектрис в два раза короче какой-то другой биссектрисы.

Егор Бакаев

Пусть дан прямоугольный треугольник *ABC*, ∠*A* = 30°, ∠*C* = 90°. Будем доказывать, что биссектриса *AK* в два раза больше биссектрисы *CL* данного треугольника.



Решение 1. Достроим *ABC* до правильного треугольника *ABB′*. При этом Ð*BAK* = 15°. Заметим, что прямая, проходящая через точку *B′* параллельно *CL*, высекает в треугольнике *ABB′* отрезок *B′P*, вдвое больший *CL* (по свойству средней линии треугольника). К тому же Ð*AB′P* = 60° – 45° = Ð*BAK*, а значит, *AK* = *BP* = 2*CL*.



Решение 2. Пусть *I* – точка пересечения биссектрис треугольника *ABC*, *M* – середина *AK* (см. рисунок справа). Тогда Ð*BLC* = 75° = Ð*AKC*, то есть четырёхугольник *BKIL* вписанный. Значит, Ð*KLI* = Ð*KBI* = 30°, но и Ð*KMC* = 30°, то есть четырёхугольник *CKLM* тоже вписанный. Поэтому Ð*CLM* = Ð*CKM* = 75°, Ð*CML* = Ð*CMK* + Ð*KML* = Ð*CMK* + +Ð*KCL* = 75°. Следовательно, *CL* = *CM* = 0,5*AK*.

Решение 3. Проведём высоту *CH*. Из подобия треугольников *CHL* и *ACK* по острому углу следует, что *CL* : *AK* = *CH*: *AC* = 1 : 2.

2. [5] На клетчатой доске 10´10 в одной из клеток сидит бактерия. За один ход бактерия сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две бактерии (обе остаются в той же клетке). Затем снова одна из сидящих на доске бактерий сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две, и так далее. Может ли после нескольких таких ходов во всех клетках оказаться поровну бактерий?

Александр Грибалко

Ответ: нет. Раскрасим клетки доски в белый и чёрный цвета в шахматном порядке. Рассмотрим разность между количеством бактерий на белых клетках и количеством бактерий на чёрных клетках. При ходе с чёрной клетки на белую она увеличивается на 3, а при ходе с белой на чёрную уменьшается на 3. Поскольку вначале эта разность равнялась 1 или –1, она никогда не станет кратна 3, в частности, не станет равна 0.

3. [7] Назовём натуральное число *заурядным*, если в его десятичной записи встречаются только нули и единицы. Пусть произведение двух заурядных чисел оказалось заурядным числом. Обязательно ли тогда сумма цифр произведения равна произведению сумм цифр сомножителей?

Виктор Клепцын, Константин Кноп

Ответ: не обязательно. **Решение**. Рассмотрим произведение двух заурядных чисел

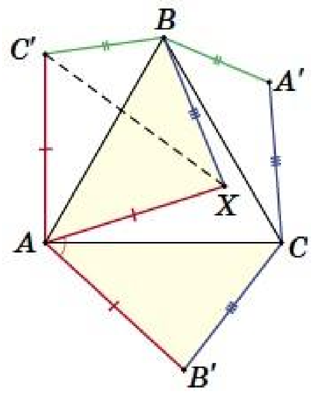
$$(10^2+10^4+10^8+\cdots+10^{1024})(10^{N-2}+10^{N-4}+10^{N-8}+\cdots+10^{N-1024}),$$

где N – большое чётное число (например, миллион). Раскрыв скобки, мы получим много слагаемых, каждое из которых – степень числа 10. Если бы все слагаемые были разными, мы получили бы заурядное число с суммой цифр, равной произведению сумм цифр исходных чисел. Посмотрим, есть ли равные слагаемые. Если $10^a \cdot 10^{N-b} = 10^x \cdot 10^{N-y}$, то $a+N-b=x+N-y$, откуда $a+y=b+x$. Так как a, b, x, y – степени двойки, равенство возможно лишь в случаях $a=x$, $b=y$ (но это одно и то же слагаемое) и $a=b$, $x=y$. Поэтому у нас всего 10 одинаковых слагаемых, равных 10^N, в сумме они дадут 10^{N+1}.

Заметим, что никакие другие слагаемые не равны 10^{N+1}, так как у всех слагаемых показатель степени чётный. Поэтому сумма слагаемых будет заурядным числом, но сумма его цифр будет на 9 меньше, чем произведение сумм цифр исходных чисел.

Вариация. Произведение $(x^{3^9}+x^{3^8}+\ldots+x^{3^2}+x^3+1)(x^{-3^9}+x^{-3^8}+\ldots+x^{-3^2}+x^{-3}+1)$ равно 10 + $(x^{3^9-3^8}+x^{3^9-3^7}+\ldots+x^{3^9-3}+x^{3^9})+(x^{3^8-3^7}+\ldots+x^{3^8-3}+x^{3^8})+\ldots+(x^{3^2-3}+x^{3^2})+x^3+\ldots$ (далее идут отрицательные степени x, отличающиеся от положительных только знаком). Заметим, что степени во всех слагаемых различны, так как любое натуральное число записывается единственным образом в виде суммы степеней троек, каждая из которых повторяется не более двух раз (троичная система счисления).

Подставив $x = 10$ и умножив второй множитель на 10^{3^9}, получим два заурядных числа m и n, их суммы цифр равны 10. Их произведение – заурядное число с суммой цифр 91.



4. [8] На сторонах равностороннего треугольника ABC построены во внешнюю сторону треугольники $AB'C$, $CA'B$, $BC'A$ так, что получился шестиугольник $AB'CA'BC'$, в котором каждый из углов $A'BC'$, $C'AB'$, $B'CA'$ больше 120°, а для сторон выполнены равенства $AB' = AC'$, $BC' = BA'$, $CA' = CB'$. Докажите, что из отрезков AB', BC', CA' можно составить треугольник.

Давид Бродский

Решение. Чтобы из данных отрезков можно было составить треугольник, достаточно доказать, что наибольший из них (пусть это AC') меньше суммы двух других. Повернём треугольник $AB'C$ вокруг точки A на 60° так, чтобы точка C перешла в точку B. Точка B' перейдёт при этом в новую точку X (см. рис.). Заметим, что в треугольнике $C'AX$ боковые стороны AC' и AX равны, а угол между ними больше 60°. Тогда сторона $C'X$ в нём наибольшая и не превосходит $C'B + BX$ по неравенству треугольника. Получаем, что $AC' < C'X \leq C'B + BX$, что и требовалось.

5. [8] Натуральные числа от 1 до 100 раскрашены в три цвета: 50 чисел – в красный, 25 чисел – в жёлтый и 25 – в зелёный. Известно, что все красные и жёлтые числа можно разбить на 25 троек так, чтобы в каждой тройке было два красных числа и одно жёлтое, которое больше одного красного и меньше другого. Аналогичное утверждение верно для красных и зелёных чисел. Обязательно ли все 100 чисел можно разбить на 25 четвёрок, в каждой из которых два красных числа, одно жёлтое и одно зелёное, при этом жёлтое и зелёное числа лежат между красными?

Александр Грибалко

Ответ: обязательно. **Решение**. Упорядочим числа каждого цвета по возрастанию. А красные числа ещё и разобьём на две части: первые 25 назовём *малыми*, а следующие 25 – *большими*. Докажем, что можно взять в качестве k-й четверки k-е жёлтое и k-е зелёное числа и из красных k-е малое и k-е большое.

Действительно, k-е жёлтое число больше одного красного числа из своей тройки и из всех троек с меньшими жёлтыми числами, то есть больше хотя бы k красных чисел. Значит, оно больше k-го малого красного числа. С другой стороны, k-е жёлтое число меньше одного красного числа из своей тройки и из всех троек с большими жёлтыми числами, то есть меньше хотя бы $25 - (k - 1)$ красных чисел. Значит, оно меньше k-го большого красного числа. Те же рассуждения справедливы для k-го зелёного числа.

6. Пусть X – некоторое множество целых чисел, которое можно разбить на N непересекающихся возрастающих арифметических прогрессий (бесконечных в обе стороны), а меньше чем на N – нельзя. Для любого ли такого X такое разбиение на N прогрессий единственно, если **а**) [4] $N = 2$; **б**) [4] $N = 3$?

(Возрастающая арифметическая прогрессия – это последовательность, в которой каждое число больше своего соседа слева на одну и ту же положительную величину.)

Виктор Клепцын

6. **а) Ответ:** для любого. **Решение**. Предположим противное – есть четыре арифметические прогрессии A, B, C и D, причём A и B не пересекаются и дают в объединении X, и C и D – тоже. Можно считать, что у прогрессии A разность a не больше, чем у каждой из остальных.

Ясно, что A не совпадает ни с C, ни с D – иначе разбиения совпадают. Тогда A и не содержится целиком ни в C, ни в D (так как у A наименьшая разность). Значит, A пересекается и с C, и с D.

Пусть число x лежит в пересечении A и C, тогда ни одно из чисел x-a и x+a не лежит в C (иначе A совпадает с C). Значит, они оба лежат в D, а разность прогрессии D – делитель числа $2a=(x+a)-(x-a)$, причём не меньший a, то есть это $2a$ или a. Последнее невозможно, поскольку A не совпадает с D. Аналогично получаем, что разность прогрессии C равна $2a$. Тогда прогрессии C и D в объединении дают A, а прогрессия B отсутствует – противоречие.

б) **Ответ**: не для любого. **Решение**. Пусть *X* – все целые числа, дающие остатки 0, 3, 4, 6, 8 или 9 при делении на 12. Первое разбиение: все числа, кратные 3; все числа с остатком 4 от деления на 12; все числа с остатком 8 от деления на 12. Второе разбиение: все числа, кратные 4; все числа с остатком 3 от деления на 6; все числа с остатком 6 от деления на 12.

Докажем, что на две прогрессии разбить *X* нельзя. Предположим противное. Заметим, что тогда минимум четыре числа из 0, 3, 4, 6, 8, 9, 12 принадлежат одной прогрессии. Тогда минимум два из них лежат «с одной стороны» от 6, и поэтому разность этой прогрессии – либо 1, либо 2, либо 3, либо 4. Первые два случая невозможны (возникнут лишние числа), а в остальных двух случаях оставшееся множество – не прогрессия.

7. [10] Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.

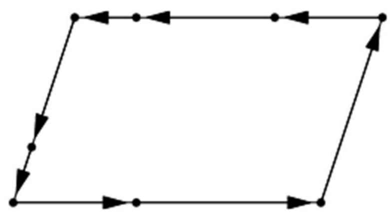
Александр Юран

Решение 1. У каждого параллелограмма с горизонтальными сторонами покрасим верхнюю сторону в синий цвет, а нижнюю в красный. То же сделаем со всеми имеющимися горизонтальными сторонами треугольников (если треугольник снизу от стороны, красим её в синий, иначе – в красный). А если у 100-угольника есть горизонтальные стороны, то их покрасим наоборот: верхнюю в красный цвет, а нижнюю в синий.

Теперь каждый горизонтальный отрезок на рисунке покрашен один раз в синий цвет («снизу») и один раз в красный («сверху»), поэтому синего и красного цвета мы потратили поровну. Но ведь и в каждом параллелограмме, и в нашем 100-угольнике синего и красного цвета было использовано поровну. Поэтому если их стереть и оставить только два треугольника, то в них тоже синего и красного поровну. Другими словами, если у одного есть синяя горизонтальная сторона какой-то длины, то у другого есть красная горизонтальная сторона такой же длины!

Аналогично докажем, что остальные стороны треугольников попарно равны. Следовательно, они равны по трём сторонам.

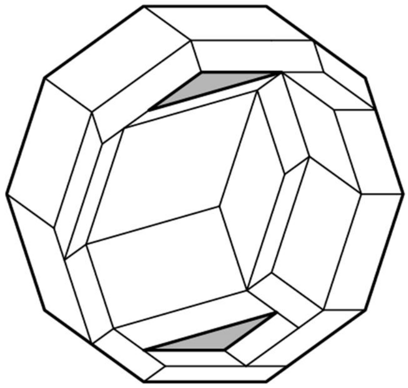
Решение 2. Для каждой фигуры – параллелограмма и треугольника – рассмотрим все вершины фигур на границе. Для каждой фигуры проведём между соседними точками на границе векторы так, чтобы их направление соответствовало обходу границы фигуры против часовой стрелки.



Рассмотрим произвольную прямую ℓ и все векторы, параллельные ей. Сумма этих векторов равна нулю. Действительно, к каждой линии разреза, параллельной ℓ, примыкают наборы противоположных векторов. Если ℓ параллельна сторонам 100-угольника, то сумма векторов, соответствующих противоположным сторонам 100-угольника, также равна нулю, так как они будут направлены в противоположные стороны и равны по длине.

С другой стороны, в каждом параллелограмме сумма векторов, соответствующих противоположным сторонам, равна нулю. Следовательно, и в двух треугольниках сумма всех векторов, параллельных ℓ, также будет нулевой.

Выберем в качестве ℓ прямую, параллельную какой-нибудь из сторон первого треугольника. Получим, что набор векторов второго треугольника, параллельных ℓ, – это векторы, противоположные векторам первого треугольника. Аналогично для двух других сторон. Поэтому для каждой стороны первого треугольника существует параллельная и равная ей по длине сторона второго треугольника. Следовательно, треугольники равны.



Замечание. Разрезания из условия существуют, причём они могут быть устроены достаточно несимметричным образом (например, не обязательно все стороны треугольников параллельны сторонам 100-угольника, треугольники не обязательно: образуют параллелограмм, примыкают к сторонам 100-угольника, симметричны относительно центра 100-угольника). На рисунке справа приведён пример разрезания 10-угольника.

Сложный вариант, 10–11 классы

1. [4] Даны две последовательности из букв А и Б, в каждой из которых по 100 букв. За одну операцию разрешается или вставить в какое-то место последовательности (возможно, в начало или в конец) любое количество одинаковых букв, или убрать из последовательности любое количество подряд идущих одинаковых букв. Докажите, что из первой последовательности можно получить вторую не более чем за 100 операций.

Владислав Новиков

Решение. Сначала решим аналогичную задачу для последовательностей из двух букв, а именно докажем, что из одной последовательности можно получить другую не более чем за 2 операции.

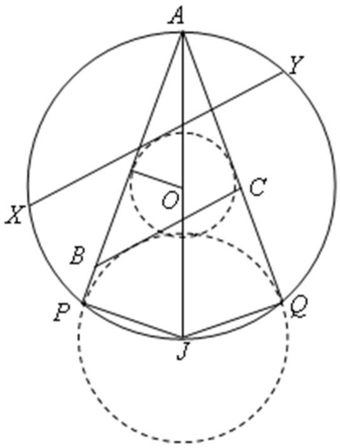
Если одна из последовательностей – это АА, а другая – ББ, уберём все буквы первой последовательности, а затем добавим буквы второй последовательности. В противном случае в последовательностях есть одинаковые буквы (возможно, стоящие на разных местах). Оставим в первой последовательности эту букву, а другую уберём. Затем добавим в нужное место букву, которой недостаёт для второй последовательности.

Вернёмся к первоначальной задаче. Разобьём каждую последовательность на 50 пар подряд идущих букв. За две операции каждую пару первой последовательности можно переделать в соответствующую пару второй последовательности.

2. [5] Периметр треугольника *ABC* равен 1. Окружность w касается стороны *BC*, продолжения стороны *AB* в точке *P* и продолжения стороны *AC* в точке *Q*. Прямая, проходящая через середины сторон *AB* и *AC*, пересекает описанную окружность треугольника *APQ* в точках *X* и *Y*. Найдите длину отрезка *XY*.

Давид Бродский

Ответ. 0,5.



Решение. Отметим, что ω – вневписанная окружность треугольника ABC. Пусть J – её центр. Описанная окружность Ω треугольника APQ – это окружность с диаметром AJ. Пусть O – её центр. Гомотетия с центром в точке A и коэффициентом 0,5 переводит ω в окружность с центром O, касающуюся хорд AP, AQ и XY. Значит, эти хорды равноудалены от центра Ω, то есть имеют равные длины. Но, как известно, длина AP равна половине периметра треугольника ABC, то есть 0,5.

3. [6] Дан многочлен $P(x)$ степени $n > 5$ с целыми коэффициентами, имеющий n различных целых корней. Докажите, что многочлен $P(x) + 3$ имеет n различных действительных корней.

Михаил Малкин

Решение. Пусть $Q(x) = P(x) + 3$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ – корни $P(x)$, $y_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$, $1 \le i \le n - 1$. Тогда $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_n)$ (a – ненулевое целое число). Заметим, что $|P(y_i)| \ge (\frac{1}{2})^2(\frac{3}{2})^2(\frac{5}{2})^2 > 3$ при всех указанных i. Если n чётно и $a > 0$, то $P(x) \le 0$ на отрезках $[x_1, x_2]$, $[x_3, x_4]$, …, $[x_{n-1}, x_n]$, а многочлен $Q(x)$ равен 3 в концах этих отрезков и отрицателен в их серединах, то есть имеет по два корня на каждом из них – всего n корней.

Если n чётно и $a < 0$, то $P(x) \le 0$ на отрезках $[x_2, x_3]$, $[x_4, x_5]$, …, $[x_{n-2}, x_{n-1}]$, а $Q(x)$ имеет по два корня на каждом из них и по корню на $(-\infty, x_1)$ и $(x_n, +\infty)$ – всего n корней.

Если n нечётно, то аналогично $Q(x)$ имеет по два корня на каждом из $\frac{n-1}{2}$ отрезков вида $[x_i, x_{i+1}]$ и корень на одном из интервалов $(-\infty, x_1)$ или $(x_n, +\infty)$ – всего n корней.

4. [8] См. задачу 7 младших классов.

5. [8] Дано целое число $h > 1$. Назовём положительную обыкновенную дробь (не обязательно несократимую) *хорошей*, если сумма её числителя и знаменателя равна h. Скажем, что число h *замечательное*, если каждую положительную обыкновенную дробь, знаменатель которой меньше h, можно выразить через хорошие дроби (не обязательно различные) с помощью операций сложения и вычитания. Докажите, что h замечательное тогда и только тогда, когда оно простое.
(Напомним, что у обыкновенной дроби числитель целый, а знаменатель натуральный.)

Татьяна Казицына

Решение. 1) h – простое число. Пусть n – натуральное число, меньшее h. Поскольку числа n и $h - n$ взаимно просты, найдутся целые a и b, при которых $a(h - n) + bn = 1$. При этом $a\frac{h-n}{n} + b(h-1)\frac{1}{h-1} = \frac{1}{n}$, то есть дробь $\frac{1}{n}$ является алгебраической суммой хороших дробей. Этого достаточно, чтобы получить все дроби со знаменателем n, следовательно, h – замечательное число.

2) h – составное число. Пусть p – один из простых делителей числа h и $p^k < h \le p^{k+1}$. Заметим, что хорошая дробь со знаменателем, кратным p^k, имеет вид $\frac{h-ap^k}{ap^k}$ $(0 < a < p)$, и после сокращения на p её знаменатель не кратен p^k. Значит, всякую хорошую дробь можно записать в виде дроби со знаменателем, не кратным p^k. Но тогда дробь $\frac{1}{p^k}$ не является алгебраической суммой хороших дробей, то есть h – не замечательное число.

6. [10] Середины всех высот некоторого тетраэдра лежат на его вписанной сфере. Обязательно ли тогда этот тетраэдр правильный?

Михаил Евдокимов

Ответ: обязательно. **Решение**. Пусть r – радиус, O – центр вписанной сферы S тетраэдра $ABCD$. Пусть объем V_{OABC} меньше четверти объема V_{ABC} тетраэдра. Тогда r меньше четверти высоты h_D, опущенной на грань ABC, то есть середина этой высоты не может лежать на S. Противоречие.

Отсюда видно, что все высоты равны $4r$, центр O лежит на пересечении высот и делит их в отношении 3:1, считая от вершины. Таким образом, O – пересечение плоскостей, параллельных граням и делящим высоты в отношении 3:1. Но это пересечение совпадает с центром масс вершин тетраэдра, то есть основания высот совпадают с точками пересечения медиан граней.

Пусть K – точка пересечения медиан треугольника ABC. Тогда $AO \perp BCD$, прямая AK – проекция прямой AO на грань ABC. По теореме о трёх перпендикулярах $AK \perp BC$, то есть все высоты граней совпадают с медианами. Следовательно, все грани – равносторонние треугольники.

7. [12] На острове живут хамелеоны пяти цветов. Когда один хамелеон кусает другого, цвет укушенного хамелеона меняется на один из этих пяти цветов по некоторому правилу, причём новый цвет зависит только от цвета укусившего и цвета укушенного. Известно, что 2023 красных хамелеона могут договориться о последовательности укусов между собой, после которой все они станут синими. При каком наименьшем k можно гарантировать, что k красных хамелеонов, кусая только друг друга, смогут стать синими? (Например, правила могут быть такими: если красный хамелеон кусает зелёного, укушенный меняет цвет на синий; если зелёный кусает красного, укушенный остаётся красным, то есть «меняет цвет на красный»; если красный кусает красного, укушенный меняет цвет на жёлтый, и т. д. Правила смены цветов могут быть другими.)

Михаил Раскин

Ответ: при $k = 5$.

Решение. Для начала приведём пример правил, при которых для описанной перекраски потребуется хотя бы 5 красных хамелеонов. Занумеруем цвета так, чтобы красный был первым цветом, а синий – последним. Пусть правила выглядят так: если хамелеон цвета $k < 5$ кусает хамелеона того же цвета, укушенный меняет цвет на $k + 1$. Кроме того, хамелеон, укушенный хамелеоном синего цвета, становится синим. Никакие другие ситуации цвета хамелеонов не меняют. Несложно заметить, что если изначально хамелеонов всего 4, то ни у одного из них не получится стать синим. (Действительно, никакой появившийся цвет не может исчезнуть раньше появления синего. Кроме того, никакой цвет не может появиться раньше, чем появятся все предыдущие. Тогда к моменту появления первого синего хамелеона есть хотя бы по одному хамелеону каждого из остальных цветов, то есть это 4 хамелеона разного цвета, но их укусы друг друга уже не изменят их окраски.) С другой стороны, если красных хамелеонов больше 4, то сначала четыре из них приобретают 2-й цвет, потом три – 3-й, два – 4-й, после чего один становится синим и превращает в синих всех остальных.

Теперь докажем, что 5 хамелеонов хватит. Рассмотрим *основную* группу из 2023 хамелеонов, которые постепенно из красных становятся синими, и *контрольную* группу из пяти красных хамелеонов, которых предстоит превратить в синие.

1-й этап. Пусть в основной группе использовалось всего $n \leq 5$ цветов. Пронумеруем эти цвета в соответствии с моментами их первого появления (1-й цвет будет красным). На этом этапе на m-м шаге ($1 < m \leq n$) будем превращать одного из красных хамелеонов контрольной группы в хамелеона цвета m (после этого в контрольной группе будет по одному хамелеону цветов 2, ..., m и $6 - m$ красных). Для этого рассмотрим момент, когда в основной группе впервые возник хамелеон X цвета m. В начале он был красным и приобрел свой цвет после того, как его укусили несколько хамелеонов, имеющих цвета с меньшими номерами (других до этого момента в основной группе не было). Возьмём в контрольной группе красного хамелеона и устроим ему ту же последовательность кусаний (это возможно, поскольку среди оставшихся хамелеонов есть хамелеоны всех цветов от 1 до $m - 1$). В конце этого этапа в контрольной группе будет по одному хамелеону цветов 2, ..., n и $6 - n$ красных.

2-й этап. Перенумеруем цвета в соответствии с моментами их последнего исчезновения в основной группе (n-й цвет будет синим). Рассмотрим момент исчезновения цвета 1. При этом последний хамелеон цвета 1 перекрасился после укуса хамелеона, имеющего цвет с большим номером (хамелеонов с номером 1 в основной группе больше нет). Пусть после окончания 1-го этапа хамелеон контрольной группы с тем же номером укусит всех хамелеонов цвета 1 (если они красные, то их может быть больше одного). Далее аналогично уберём хамелеонов цвета 2, ..., пока все хамелеоны не станут синими.