Росатом 11 класс (Отборочный тур), Москва 29.10.2023

Во всех задачах ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б – Неверно составлено хотя бы одно из неравенств по условию задачи и (или) не записана величина, которую нужно максимизировать.

1 б – Верно составлена математическая модель (верно составлены оба неравенства и записана величина, которую нужно максимизировать).

2б -- Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2:

0 б – Нет учета ОДЗ при отборе корней, не получено верное упрощенное уравнение.

1 б – Получено верное упрощенное уравнение (обе части уравнения возведены в квадрат и упрощены), верно найдены некоторые решения уравнения (присутствует отбор корней по ОДЗ или подстановкой в исходное уравнение).

2 б - Верно найдены все серии решений, ошибка при выборе наименьшего положительного решения уравнения или арифметическая ошибка.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б – Сделаны некоторые предположения по решению задачи.

1 б – Выражен x через p.

2 б -- Обосновано монотонное возрастание x от p, но p найдено неверно.

3 б - Задача решена верно.

Задача 4:

0 б -Неверно найден экстремум функции $y=f(x)$ и не решено неравенство с целой и дробной частью.

1 б -Найдены экстремумы или верно решено неравенство с целой и дробной частью.

2 б - Задача решена с одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения, или есть мелкие недочеты;

3 б - Задача решена верно.

Задача 5

0 б -Не введены обозначения/ нет пояснений по составлению уравнений, необходимых для решения задачи.

1 б -Верно составлена система двух уравнений, необходимых для решения задачи.

2 б – Верно составленная система двух уравнений решена с арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения, или присутствуют мелкие недочеты.

3 б - Задача решена верно.

Задача 6:

0 б -Нарисован чертёж, найдены элементы треугольника, недостаточные для решения задачи.

1б - Найдены элементы в треугольнике BFM, достаточные для определения радиуса описанной окружности.

2 б - Задача решена с мелкими недочетами или одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б - Задача решена верно.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, 11 класс.

Вариант №1.

1. Вася работает в магазине «Вкус Вилл», развозит на велосипеде клиентам пиццу и мороженное. В его дорожный ящик можно разместить не более 24 коробок с пиццей весом 1кг каждая, либо 40 упаковок мороженного, расфасованного по 300 грамм. На багажнике велосипеда можно перевозить не более 21 кг груза. Магазин продает коробку с пиццей за 400р, с мороженным – за 180р. Сколько коробок с мороженным и пиццей надо положить в дорожный ящик Васи, чтобы стоимость доставленного товара была максимальной? (вес ящика не учитывать).

2. Найти наименьшее положительное решение уравнения

$$\sqrt{\sin x-\sin 2x+\sin 3x}=\sqrt{\sin x}-\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{\sin 3x}.$$

3. Найти наибольшее целое число x, удовлетворяющее уравнению $\sqrt{x}+\sqrt{x+p}=p$, где p – простое число меньшее 100.

4. Найти наименьшее значение функции $y=(x-2)^2-5-\ln(x-2)^2$ на множестве решений неравенства $[x]\cdot\{x\}<2x-4$, где $[x]$ – целая часть числа x – наибольшее целое число, не превосходящее x, $\{x\}=x-[x]$ - дробная часть числа x.

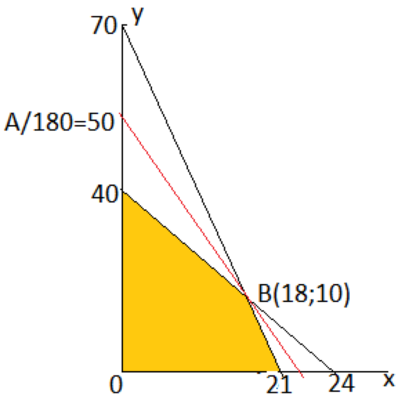
5. Каждый день выбор двух дежурных среди учеников $11^{А}$ класса осуществляют путем случайного и равновозможного выбора двух фамилий из классного журнала. Вероятность того, что дежурными окажутся две девочки равна $3/20$, а два мальчика выбираются дежурными с вероятностью $7/20$. Сколько мальчиков учится в $11^{А}$ классе?

6. Точка D делит сторону AB равностороннего треугольника ABC в отношении $AD:DB=1:2$. Через точку D проведены две прямые: одна параллельная стороне BC и пересекающая AC в точке E, а другая параллельная стороне AC и пересекающая BC в точки F. Прямые AF и BE пересекаются в точке M. Найти радиус окружности, описанной около треугольника BMF, если длина стороны треугольника ABC равна $\sqrt{3}$.

Ответы и решения.

Задача 1

Решение. Введем обозначения. Пусть x – количество коробок с пиццей, y – количество коробок с мороженным. Тогда одна коробка с пиццей занимает $\frac{1}{24}$ часть дорожного ящика, а коробка с мороженным $\frac{1}{40}$ часть ящика, поэтому ограничения по объему имеют вид следующего неравенства: $\frac{x}{24}+\frac{y}{40}\le 1$. Ограничения по весу примут вид неравенства: $x+0,3y\le 21$. Наконец сумма заказа, о которой спрашивают в задаче, $A=400x+180y$ должна быть максимальная. Построим график, отражающий решения данных неравенств.



Желтым цветом выделяем допустимый многоугольник, в который входят допустимые значения параметров x и y. Координаты вершины B (точки пересечения всех прямых) являются решениями системы:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{24}+\dfrac{y}{40}=1 \\ x+0,3y=21 \end{cases}$$

Решая систему, мы находим искомые количества коробок с пиццей и мороженного. Максимальное допустимое значение $A=9000$ соответствует прохождению прямой $A=400x+180y$ через точку B.

Ответ: 18 коробок с пиццей, 10 коробок с мороженным.

Задача 2

Решение. Введем следующие обозначения для упрощения преобразования уравнения:

$$u=\sqrt{\sin x}, v=\sqrt{\sin 2x}, w=\sqrt{\sin 3x}$$

Тогда уравнение примет вид:

$$\sqrt{u^2-v^2+w^2}=u-v+w \to \begin{cases} (u-v+w)^2=u^2-v^2+w^2 \\ v\le u+w \end{cases} \to$$

$$\to \begin{cases} (u-v+w)^2-u^2=w^2-v^2 \\ v\le u+w \end{cases} \to \begin{cases} \left(w-v\right)\left(u-v\right)=0 \\ v\le u+w \end{cases}$$

Решение получившейся системы соответствует совокупности двух систем:

Случай 1 $\begin{cases} u=v>0 \\ w\ge 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \sin x=\sin 2x \\ \sin x\ge 0, \sin 3x\ge 0 \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} 2x=x+2\pi k \\ 2x=\pi-x+2\pi m \end{array} \right. \to \left[\begin{array}{l} x=2\pi k \\ x=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi m}{3} \end{array} \right.$$

Наименьшее положительное решение в этой серии $x=\dfrac{\pi}{3}$, при m=0.

Случай 2 $\begin{cases} w=v>0 \\ u\ge 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} \sin 3x=\sin 2x \\ \sin x\ge 0, \sin 3x\ge 0 \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} 3x=2x+2\pi k \\ 3x=\pi-2x+2\pi m \end{array} \right. \to \left[\begin{array}{l} x=2\pi k \\ x=\dfrac{\pi}{5}+\dfrac{2\pi m}{5} \end{array} \right.$$

Наименьшее положительное решение в этой серии $x=\dfrac{\pi}{5}$, при m=0.

Выбираем самое минимальное положительное решение и пишем ответ.

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{5}$.

Задача 3

Решение. При фиксированном параметре $p>1$ уравнение имеет единственное решение по причине монотонного возрастания непрерывной функции $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{x+p}$ и $f(0)=\sqrt{p}<p$.

Если $p>2$ простое (для $p=2$ целых решений нет) число, то оно нечетное и существует $n\geq 1$, для которого $p=2n+1$. Тогда $x=n^2$ является единственным целым решением исходного уравнения. Оно будет наибольшим, если $p=2n+1$– наибольшее простое число меньшее 100. Таким числом является $p=97=48\cdot 2+1$, а наибольшим решением $x=48^2=2304$

Ответ: $x=48^2=2304$

Задача 4

Решение. Введем обозначения: $a=[x], b=\{x\}, x=a+b$.

Решим неравенство в новых обозначениях:

$$ab<2(a+b)-4\to a(b-2)-2(b-2)<0\to(a-2)(b-2)<0$$

С учетом того, что b, это дробная часть числа, то $0\leq b<1\to b-2<-1$. Отсюда делаем вывод, что решением неравенства являются те x, для которых целая часть числа больше двух:

$$a>2\to[x]>2\to x\geq 3$$

Теперь найдем производную функции и знаки производной: $y'=2(x-2)-\dfrac{2}{x-2}=2\dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-2)}$

положительная на полуоси $x>3$, поэтому наименьшее значение функции достигается при $x=3$(что соответствует решению неравенства выше), т.е. $y_{\min}=y(3)=-4$.

Ответ: - 4

Задача 5

Решение. Введем обозначения: m – число девочек в классе, n– число мальчиков. Тогда для вычисления вероятности выбора дежурными двух девочек:

$$P(A)=\frac{C_m^2}{C_{m+n}^2}=\frac{3}{20}\to 20m(m-1)=3(m+n)(m+n-1)\quad (*)$$

А вероятность выбора дежурными двух мальчиков:

$$P(B)=\frac{C_n^2}{C_{m+n}^2}=\frac{7}{20}\to 20n(n-1)=7(m+n)(m+n-1)\quad (**)$$

Наша задача сводится к решению системы двух уравнений. Умножая (*) на 7, а (**) на 3, получим

$$7m(m-1)=3n(n-1)\to\begin{cases} m(m-1)=3t\\ n(n-1)=7t, t\in Z\end{cases}$$

Вычитая из второго равенства первое, получим

$$n(n-1)-m(m-1)=4t\to n^2-m^2-(n-m)=4t\to(n-m)(n+m-1)=4t\to$$

$$\to n+m-1=\frac{4t}{n-m}$$

Подставим полученное выражение, например, в уравнение (**) будем иметь:

$$20\cdot 7t=7(m+n)\cdot\frac{4t}{n-m}\to\frac{m+n}{n-m}=5\to 3m=2n\to\begin{cases} m=2s\\ n=3s, s\in Z\end{cases}$$

Для нахождения s, подставим полученное в уравнении (*):

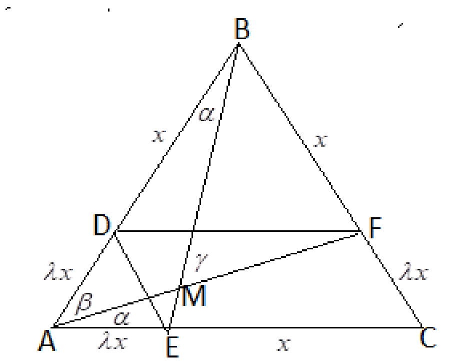
$20\cdot 2s(2s-1)=3\cdot 5s(5s-1)\to 8s(2s-1)=15s^2-3s\to s=5.$

Отсюда делаем вывод, что число мальчиков в классе $n=3s=15$. Это и есть ответ на вопрос задачи.

Ответ: 15 мальчиков.

Задача 6

Решение. Построим чертеж, согласно условию задачи. Введем обозначения: α – угол ABE, β – угол BAF, γ – угол BMF. Треугольник ABE равен треугольнику CAF (по двум сторонам и углу между ними). Из равенства треугольников получим, что угол CAF равен углу ABE и равен α. Тогда угол $\gamma=\alpha+\beta=60^0$, как внешний угол к углу M в треугольнике ABM.



По условию знаем, что $\lambda x + x = a \to x = BF = \dfrac{a}{1+\lambda}$.

По теореме синусов найдем радиус описанной окружности, о котором нас спрашивают в задаче:

$$2R = \frac{BF}{\sin\gamma} = \frac{2a}{(1+\lambda)\sqrt{3}} \to R = \frac{a\sqrt{3}}{3(1+\lambda)}$$

Ответ: $R = \dfrac{a\sqrt{3}}{3(1+\lambda)} = \dfrac{2}{3}$.

Вариант №2.

1. Вася работает в магазине «Вкус Вилл», развозит на велосипеде клиентам пиццу и мороженное. В его дорожный ящик можно разместить не более 21 коробки с пиццей весом 0,6кг каждая, либо 36 упаковок мороженного, расфасованного по 300 грамм. На багажнике велосипеда можно перевозить не более 12 кг груза. Магазин продает коробку с пиццей за 250р, с мороженным – за 126р. Сколько коробок с мороженным и пиццей надо положить в дорожный ящик Васи, чтобы стоимость доставленного товара была максимальной? (вес ящика не учитывать).
Ответ: 14 коробок с пиццей, 12 коробок с мороженным.

2. Найти наименьшее положительное решение уравнения

$$\sqrt{\cos x - \sin 2x + \cos 3x} = \sqrt{\cos x} - \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\cos 3x}\,.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{10}$.

3. Найти наибольшее целое число x, удовлетворяющее уравнению $\sqrt{x} + \sqrt{x+p} = p$, где p – простое число меньшее 200.
Ответ: $x = 99^2 = 9801$.

4. Найти наибольшее значение функции $y = x^3 \cdot e^{-4x}$ на множестве решений неравенства $[x]\cdot\{x\} < 3x - 9$, где $[x]$ – целая часть числа x – наибольшее целое число, не превосходящее x, $\{x\} = x - [x]$ - дробная часть числа x.

Ответ: $\dfrac{64}{e^{16}}$.

5. Каждый день выбор двух дежурных среди учеников $11^{Б}$ класса осуществляют путем случайного и равновозможного выбора двух фамилий из классного журнала. Вероятность того, что дежурными окажутся две девочки равна $22/145$, а мальчик и девочка выбираются дежурными с вероятностью $72/145$. Сколько девочек учится в $11^{Б}$ классе?
Решение. Введем обозначения: m – число девочек в классе, n – число мальчиков. Тогда вероятность выбора дежурными двух девочек:

$$P(A)=\frac{C_m^2}{C_{m+n}^2}=\frac{22}{145}\to 145m(m-1)=22(m+n)(m+n-1)\quad (*)$$

А вероятность выбора дежурными мальчика и девочки:

$$P(C)=\frac{C_n^1\cdot C_m^1}{C_{m+n}^2}=\frac{72}{145}\to 290mn=72(m+n)(m+n-1)\quad (**)$$

Решаем полученную систему из двух уравнений. Умножая (*) на 36, а (**) на 11 и вычитая одно из другого, получим:

$$145\cdot 36m(m-1)=290\cdot 11nm\to\begin{cases}(m-1)=11t\\ n=18t,t\in Z\end{cases}$$

Подставим полученное, например, в (**) имеем $t=1\to m=12$

Ответ: 12 девочек.

6. Точка D делит сторону AB равностороннего треугольника ABC в отношении $AD:DB=2$. Через точку D проведены две прямые: одна параллельная стороне BC и пересекающая AC в точке E, а другая параллельная стороне AC и пересекающая BC в точки F. Прямые AF и BE пересекаются в точке M. Найти радиус окружности, описанной около треугольника BMF, если длина стороны треугольника ABC равна 9.

Ответ: $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3(1+\lambda)}=\sqrt{3}$.

Вариант №3.

1. Вася работает в магазине «Вкус Вилл», развозит на велосипеде клиентам пиццу и мороженное. В его дорожный ящик можно разместить не более 20 коробок с пиццей весом 0,7кг каждая, либо 48 упаковок мороженного, расфасованного по 250 грамм. На багажнике велосипеда можно перевозить не более 13 кг груза. Магазин продает коробку с пиццей за 900р, с мороженным – за 350р. Сколько коробок с мороженным и пиццей надо положить в дорожный ящик Васи, чтобы стоимость доставленного товара была максимальной? (вес ящика не учитывать).

Ответ: 10 коробок с пиццей, 24 коробок с мороженным.

2. Найти наименьшее положительное решение уравнения

$$\sqrt{\cos x-\sin 2x+\sin 5x}=\sqrt{\cos x}-\sqrt{\sin 2x}+\sqrt{\sin 5x}\,.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{7}$.

3. Найти наибольшее целое число x, удовлетворяющее уравнению $\sqrt{x}+\sqrt{x+p}=p$, где p – простое число меньшее 300.

Ответ: $x=146^2=21316$.

4. Найти наименьшее значение функции $y=\sqrt{x}\ln x,\ x>0$ на множестве решений неравенства $[x]\cdot\{x\}<x-1,$ где $[x]$ – целая часть числа x – наибольшее целое число, не превосходящее x, $\{x\}=x-[x]$ - дробная часть числа x.

Ответ: $\sqrt{2}\cdot\ln 2$.

5. Каждый день выбор двух дежурных среди учеников 11$^{\text{В}}$ класса осуществляют путем случайного и

равновозможного выбора двух фамилий из классного журнала. Вероятность того, что дежурными окажутся две девочки равна $3/29$, а два мальчика выбираются дежурными с вероятностью $38/87$. Сколько девочек учится в $11^{В}$ классе?
Ответ: 10 девочек.

6. Точка D делит сторону AB равностороннего треугольника ABC в отношении $AD:DB=1:3$. Через точку D проведены две прямые: одна параллельная стороне BC и пересекающая AC в точке E, а другая параллельная стороне AC и пересекающая BC в точки F. Прямые AF и BE пересекаются в точке M. Найти радиус окружности, описанной около треугольника BMF, если длина стороны треугольника ABC равна 8.

Ответ: $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3(1+\lambda)}=2\sqrt{3}$.

Вариант №4.

1. Вася работает в магазине «Вкус Вилл», развозит на велосипеде клиентам пиццу и мороженное.
В его дорожный ящик можно разместить не более 16 коробок с пиццей весом 1кг каждая, либо 30 упаковок мороженного, расфасованного по 200 грамм. На багажнике велосипеда можно перевозить не более 11 кг груза. Магазин продает коробку с пиццей за 350р, с мороженным – за 80р. Сколько коробок с мороженным и пиццей надо положить в дорожный ящик Васи, чтобы стоимость доставленного товара была максимальной? (вес ящика не учитывать).
Ответ: 8 коробок с пиццей, 15 коробок с мороженным.

2. Найти наименьшее положительное решение уравнения

$$\sqrt{\sin x-\cos 2x+\sin 7x}=\sqrt{\sin x}-\sqrt{\cos 2x}+\sqrt{\sin 7x}.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{18}$.

3. Найти наибольшее целое число x, удовлетворяющее уравнению $\sqrt{x}+\sqrt{x+p}=p$, где p – простое число меньшее 400.
Ответ: $x=198^2=39204$.

4. Найти наименьшее значение функции $y=x\sqrt[3]{x-1}$ на множестве решений неравенства $[x]\cdot\{x\}<8x-64$, где $[x]$ – целая часть числа x – наибольшее целое число, не превосходящее x, $\{x\}=x-[x]$ - дробная часть числа x.
Ответ: 18.

5. Каждый день выбор двух дежурных среди учеников $11^{Г}$ класса осуществляют путем случайного и равновозможного выбора двух фамилий из классного журнала. Вероятность того, что дежурными окажутся две девочки равна $11/63$, а мальчик и девочка выбираются дежурными с вероятностью $32/63$. Сколько фамилий учеников в журнале $11^{Г}$ класса?
Ответ: 28 фамилий.

6. Точка D делит сторону AB равностороннего треугольника ABC в отношении $AD:DB=3$. Через точку D проведены две прямые: одна параллельная стороне BC и пересекающая AC в точке E, а другая параллельная стороне AC и пересекающая BC в точки F. Прямые AF и BE пересекаются в точке M. Найти радиус окружности, описанной около треугольника BMF, если длина стороны треугольника ABC равна 3.

Ответ: $R=\dfrac{a\sqrt{3}}{3(1+\lambda)}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Критерии проверки работ отборочного тура Олимпиады Росатом по математике, 11 класс, выезд 18-19 ноября 2023

Во всех задачах верный ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б – Неверно найдены скорости движения стрелок часов;

1 б – Верно составлены уравнения по условию задачи;

2б -- Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2:

0 б –Система уравнений не упрощена;

1 б – Второе уравнение разложено на множители и система уравнений сведена к совокупности систем;

2 б -Ошибка при выборе наибольшего значения величины xyz или арифметическая ошибка.

3 б - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б – Сделаны некоторые предположения по решению задачи;

1 б – Выражено число, записанное цифрами $\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2$;

2 б – Обоснованы возможные значения a_1 и a_2, но количество вариантов найдено неверно;

3 б - Задача решена верно.

Задача 4:

0 б - Сделаны некоторые предположения по решению задачи;

1 б – Найдены все корни $P(x)$, но не доказано, что это все корни;

2 б – Некоторые мелкие пробелы в обосновании ответа;

3 б - Задача решена верно.

Задача 5:

0 б -Нарисован чертёж, найдены некоторые элементы призмы, недостаточные для решения задачи;

1б - Найдены элементы, достаточные для определения объёма призмы;

2 б - Задача решена с мелкими недочетами или одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения;

3 б - Задача решена верно.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», выезд 1, математика, 11 класс

Вариант № 1

1. На кухне весят необычные часы. Они имеют форму прямоугольника, разделенного на три равных квадрата. Каждый квадрат имеет циферблат и вращающуюся стрелку вокруг его центра. Первая слева стрелка часовая и на циферблате отмечены цифрами часы от 1 до 12. На следующем циферблате стрелка минутная и цифры указывают число минут от 1 до 60. На третьем циферблате вращается секундная стрелка и показывает число секунд от 1 до 60. Сколько раз за сутки все три стрелки параллельны? Сутки начинаются в 0 час, 0 мин, 0 сек.

2. Тройка чисел $(x; y; z)$ удовлетворяет системе уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y + \cos z = 0 \\ \sin^5 x + \sin^5 y + \cos^5 z = 0 \end{cases}$ и неравенствам $\pi \le x \le 2\pi, 0 \le y \le 2\pi, 0 \le z \le \pi$. Какое наибольшее значение может принимать величина $x \cdot y \cdot z$?

3. Сколько существует натуральных чисел n , для которых обыкновенная дробь $p = \frac{101}{n}$ может быть представлена в виде десятичной периодической дроби вида $p = 0,0(a_1 a_2)$ с любым набором цифр $a_1, a_2, a_1 \ne a_2$, включая 0?

4. Многочлен $P(x)$ удовлетворяет тождеству $xP(x-1) \equiv (x-5)P(x)$ по переменной x . Найти степень многочлена.

5. Каждый из трех шаров радиуса 1 касаются друг друга и всех боковых ребер правильной треугольной призмы. Первый и третий касаются также ребер верхнего и нижнего ее оснований. Найти объем призмы.

Приведём решение этого варианта.

1. Решение. Угловая скорость часовой стрелки - $0,5^0$ в минуту, минутной - 6^0, а секундной - 360^0 в минуту. Введем обозначения: углы α, β, γ (в градусах) поворотов часовой, минутной и секундной стрелок за время t (мин) равны:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}t \\ \beta = 6t \quad , t \in [0,1440) \\ \gamma = 360t \end{cases}$$

Запишем систему по условию задачи: $\begin{cases} |\alpha - \beta| = 180k \\ |\beta - \gamma| = 180m \end{cases}, k \ge 0, m \ge 0 \in Z$

$$\begin{cases} \dfrac{11}{2}t = 180k, \\ 354t = 180m \end{cases} \to \frac{m}{k} = \frac{708}{11} \to 11m = 708k \to \begin{cases} m = 708s \\ k = 11s \end{cases}, s \geq 0, s \in Z \to$$

$$\to t = 360s \to 0 \leq 360s < 1440 \to s = 0, 1, 2, 3$$

Нам подходят только 4 значения s.

Ответ: 4 раза**.**

2. Решение. Введем обозначения: $a = \sin x,\ b = \sin y,\ c = \cos z$. Тогда система уравнений из условия примет вид: $\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a^5 + b^5 + c^5 = 0 \end{cases}$

Преобразуем её. Разложим второе уравнение на множители:

$$\begin{cases} c = -a - b \\ a^5 + b^5 = (a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b + 10a^2b^3 + 5ab^4 + a^5 \end{cases} \to$$

$$\begin{cases} c = -a - b \\ 5ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) = 5ab((a+b)(a^2 - ab + b^2) + 2ab(a+b)) = 0 \end{cases} \to$$

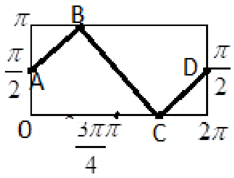
$$\begin{cases} c = -a - b \\ 5ab((a+b)(a^2 - ab + b^2) + 2ab(a+b)) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} c = -a - b \\ abc(a^2 + ab + b^2) = 0 \end{cases}$$

И сведем систему к совокупности нескольких систем.

Случай 1. $a = \sin x = 0$

$$\sin y + \cos z = 0 \to \cos z = \cos\left(\frac{\pi}{2} + y\right) \to \left[\begin{array}{l} z = y + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ z = -\dfrac{\pi}{2} - y + 2\pi m \end{array}\right. \quad (*)$$

На рис жирной линией отмечены все допустимые пары $(y; z)$, удовлетворяющие (*):



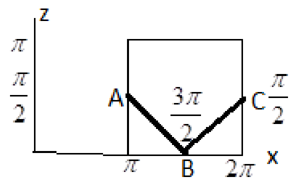
На отрезке $[A; B]$ парабола $u = yz = y\left(y + \dfrac{\pi}{2}\right), y \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ растет и принимает наибольшее значение $u_{AB} = \dfrac{\pi^2}{2}$. На отрезке $[B; C]$ парабола $u = yz = y\left(\dfrac{3\pi}{2} - y\right), y \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$ принимает наибольшее значение $u_{BC} = \dfrac{9\pi^2}{16}$ в точке $y = \dfrac{3\pi}{4}$. На отрезке $[C; D]$ парабола $u = yz = y(y - \dfrac{3\pi}{2})$ растет принимает максимальное значение $u_{CD} = \pi^2$ при $y = 2\pi$.

Наибольшее значение произведения xyz для случая 1 равно $u_1 = 2\pi^3$

Случай 2. $b = 0 \leftrightarrow \sin y = 0$

$$a + c = 0 \leftrightarrow \sin x + \cos z = 0 \to \left[\begin{array}{l} z = x + \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ z = -\dfrac{\pi}{2} - x + 2\pi m \end{array}\right. \quad (**)$$

На рис жирной линией изображено множество точек $(x;z)$, удовлетворяющих (**):

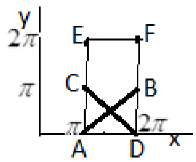


На отрезке $[A;B]$ парабола $v = xz = x\left(\frac{3\pi}{2} - x\right), x \in \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ принимает максимальное значение $v_{AB} = \frac{9\pi^2}{16}$ при $x = \frac{3\pi}{4}$. На отрезке $[B;C]$ парабола $v = xz = x\left(x - \frac{3\pi}{2}\right), x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ возрастает и принимает наибольшее значение $v_{BC} = \pi^2$ для $x = 2\pi$. Наибольшее значение произведения xyz для случая 2 равно $u_2 = 2\pi^3$.

Случай 3. $c = 0 \leftrightarrow \cos z = 0 \rightarrow z = \frac{\pi}{2}$

$$\sin x + \sin y = 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -x + 2\pi k \\ y = x + \pi + 2\pi m \end{array}\right. \text{ (***).}$$

На рис изображено жирной линией множество точек $(x;y)$, удовлетворяющих(***):



На отрезке $[A;B]$ парабола $w = xy = x(x - \pi), x \in [\pi; 2\pi]$ возрастает и принимает максимальное значение $w_{AB} = \frac{\pi^2}{4}$ при $x = 2\pi$. На отрезке $[C;D]$ парабола $w = xy = x(2\pi - x), x \in [\pi; 2\pi]$ убывает и свое максимальное значение $w_{CD} = \pi^2$ достигает в точке $x = \pi$. В точке $E(\pi; 2\pi)$, которая также допустимая, значение $w_E = 2\pi^2$. В точке $F(2\pi; 2\pi)$, которая также допустимая, значение $w_F = 4\pi^2$. Наибольшее значение произведения xyz для случая 3 равно $u_3 = 2\pi^3$.

Ответ: $2\pi^3$**.**

3. Решение. Преобразуем десятичную дробь из условия, и представим a_1a_2 в виде дроби:

$$10p = 0,(a_1a_2) \rightarrow 10^3 p = a_1a_2 + 10p \rightarrow 990p = a_1a_2 \rightarrow$$

$$a_1a_2 = \frac{101 \cdot 990}{n} = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 101}{n}$$

Число, записанное цифрами a_1, a_2 (здесь a_1 может быть нулем, $a_1 \neq a_2$), не делится на 101, поэтому $n = 101 \cdot n_1$ и $a_1a_2 = \frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11}{n_1}$. Количество n, для которых число $\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 101}{n}$ содержит две цифры, равно количеству натуральных n_1 таких, что число $\frac{2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11}{n_1}$ записывается цифрами a_1, a_2 и имеет простые делители $\{2,3,5,11\}$.

Числа (a_1a_2), содержащие по одному простому делителю с учетом кратности $a_1 \neq a_2$:

$$(02), (03), (09), (05).$$

Числа (a_1a_2), содержащие по два простых делителя с учетом кратности $a_1 \neq a_2$:

$$(06),(18),(10),(15),(45).$$

Числа (a_1a_2), содержащие по три простых делителя с учетом кратности $a_1 \neq a_2$:

$$(30),(90).$$

Числа (a_1a_2), содержащие четыре простых делителя, отсутствуют.

Кроме того, число (a_1a_2) может быть равно (01) и не и меть простых делителей.

Всего 12 различных вариантов числа n_1, а значит и n.

Ответ: 12.

4. Решение. Подставляя в тождество $x=0$, получим $P(0)=0$. Подставляя в тождество последовательно $x=1,2,3,4$, получим $P(1)=P(2)=...=P(4)=0$. Тогда многочлен $P(x)$ можно представить в виде произведения:

$$P(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)Q(x)$$

с некоторым многочленом $Q(x)$. Докажем, что степень многочлена $Q(x)$ нулевая. Действительно,

$$P(x-1)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)Q(x-1) \to$$
$$xP(x-1)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)Q(x-1)$$
$$(x-5)P(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)Q(x)$$

Из данного тождества приходим к следующему тождеству $Q(x)\equiv Q(x-1)$. Если степень многочлена $Q(x)$ равна $m\geq 1$, то

$$Q(x)=a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+...+a_1x+a_0,\;\; a_m \neq 0$$
$$Q(x-1)=a_m(x-1)^m+a_{m-1}(x-1)^{m-1}+...+a_1(x-1)x+a_0$$

Многочлен

$$R(x)=Q(x)-Q(x-1)=a_m(x^m-(x-1)^m)+a_{m-1}(x^{m-1}-(x-1)^{m-1})+...=$$
$$=a_m\cdot mx^{m-1}+....$$

нулевой и $a_m=0$. Полученное противоречие, показывает, что $m=0$ и $Q(x)=C$ константа.

Степень многочлена $P(x)$ равна 5.

Ответ: 5.

5. Решение. Приведем решения для этой задачи в общей постановке: шары одинакового радиуса r пронумерованы $1,2,...,n$. Первый и последний касаются ребер верхнего и нижнего оснований правильной треугольной призмы и ее боковых ребер. Остальные шары с соседними номерами касаются друг друга и боковых ребер призмы. Найти объем призмы.

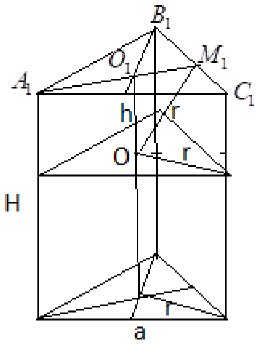
Введем обозначения: O – центр первого шара; h – расстояние точки O до верхнего основания призмы; H – высота призмы; a – сторона основания призмы; A_1M_1 – медиана верхнего основания, тогда:

$$O_1M_1=\frac{1}{3}A_1M_1=\frac{\sqrt{3}}{6}a=\frac{r}{2}\to a=r\sqrt{3}$$

$$h^2+\frac{r^2}{4}=r^2\to h=\frac{\sqrt{3}}{2}r$$

$$H=2(h+r)+2r(n-2)=r(2n-2+\sqrt{3})$$

$$V=\frac{\sqrt{3}a^2}{4}H=\frac{3\sqrt{3}}{4}(2(n-1)+\sqrt{3})r^3$$



Ответ : $V=\frac{3(3+4\sqrt{3})}{4}$.

Вариант № 2

1. На кухне весят необычные часы. Они имеют форму прямоугольника, разделенного на три равных квадрата. Каждый квадрат имеет циферблат и вращающуюся стрелку вокруг его центра. Первая слева стрелка часовая и на циферблате отмечены цифрами часы от 1 до 12. На следующем циферблате стрелка минутная и цифры указывают число минут от 1 до 60. На третьем циферблате вращается секундная стрелка показывает число секунд от 1 до 60. Сколько раз за сутки все три стрелки параллельны и направлены в одну сторону? Сутки начинаются в 0 час, 0 мин, 0 сек.
Ответ: 2 раза.

2. Тройка чисел $(x;y;z)$ удовлетворяет системе уравнений $\begin{cases}\cos x+\cos y+\cos z=0\\ \cos^5 x+\cos^5 y+\cos^5 z=0\end{cases}$ и неравенствам $0\le x\le 2\pi, 0\le y\le 3\pi, \pi\le z\le 3\pi$. Какое наибольшее значение может принимать величина $x\cdot y\cdot z$?

Ответ: $\frac{75\pi^3}{8}$.

3. Сколько существует натуральных чисел n, для которых обыкновенная дробь $p=\frac{103}{n}$ может быть представлена в виде десятичной периодической дроби вида $p=0,00(a_1a_2)$ с любым набором цифр $a_1,a_2, a_1\ne a_2$, включая 0?

Ответ: 20.

4. Многочлен $P(x)$ удовлетворяет тождеству $xP(x-1)\equiv(x-6)P(x)$ по переменной x. Найти степень многочлена.

Ответ: 6.

5. Каждый из четырех шаров радиуса 2 касаются друг друга и всех боковых ребер правильной треугольной призмы. Первый и четвертый касаются также ребер верхнего и нижнего ее оснований. Найти объем призмы.

Ответ: $V=18(2\sqrt{3}+1)$.

Вариант № 3

1. На кухне висят необычные часы. Они имеют форму прямоугольника, разделенного на три равных квадрата. Каждый квадрат имеет циферблат и вращающуюся стрелку вокруг его центра. Первая слева стрелка часовая и на циферблате отмечены цифрами часы от 1 до 12. На следующем циферблате стрелка минутная и цифры указывают число минут от 1 до 60. На третьем циферблате вращается секундная стрелка и показывает число секунд от 1 до 60. В какие моменты времени t (целое число в минутах) две стрелки из трех перпендикулярны?

Ответ: $t_m = 180 + 360m$, $m = 0,1,2,...,6$
$t_n = 15 + 30m,\ m = 0,1,...,47$

2. Тройка чисел $(x; y; z)$ удовлетворяет системе уравнений $\begin{cases} \cos x + \cos y + \cos z = 0 \\ \cos^5 x + \cos^5 y + \cos^5 z = 0 \end{cases}$ и неравенствам $0 \le x \le 2\pi,\ 0 \le y \le 3\pi,\ \pi \le z \le 3\pi$. Какое наибольшее значение может принимать величина $x \cdot y \cdot z$?

Ответ: $\frac{75\pi^3}{8}$.

3. Сколько существует натуральных чисел n, для которых обыкновенная дробь $p = \frac{107}{n}$ может быть представлена в виде десятичной периодической дроби вида $p = 0,000(a_1a_2)$ с любым набором цифр $a_1, a_2, a_1 \ne a_2$, включая 0?

Ответ: 24.

4. Многочлен $P(x)$ удовлетворяет тождеству $xP(x-1) \equiv (x-7)P(x)$ по переменной x. Найти степень многочлена.

Ответ: 7.

5. Каждый из пяти шаров радиуса $\sqrt{3}$ касаются друг друга и всех боковых ребер правильной треугольной призмы. Первый и пятый касаются также ребер верхнего и нижнего ее оснований. Найти объем призмы.

Ответ: $V = \frac{27(8+\sqrt{3})}{4}$.

Вариант № 4

1. На кухне висят необычные часы. Они имеют форму прямоугольника, разделенного на три равных квадрата. Каждый квадрат имеет циферблат и вращающуюся стрелку вокруг его центра. Первая слева стрелка часовая и на циферблате отмечены цифрами часы от 1 до 12. На следующем циферблате стрелка минутная и цифры указывают число минут от 1 до 60. На третьем циферблате вращается секундная стрелка и показывает число секунд от 1 до 60. В какие моменты времени t (целое число в минутах) хотя бы две стрелки из трех параллельны?

Ответ: $t_n = 30n,\ n = 0,1,2,...,47$.

2. Тройка чисел $(x; y; z)$ удовлетворяет системе уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y + \sin z = 0 \\ \sin^5 x + \sin^5 y + \sin^5 z = 0 \end{cases}$ и неравенствам $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \le y \le \frac{7\pi}{2}, 0 \le z \le 2\pi$. Какое наибольшее значение может принимать величина $x \cdot y \cdot z$?

Ответ: $\frac{15\pi^3}{2}$.

3. Сколько существует натуральных чисел n, для которых обыкновенная дробь $p = \frac{109}{n}$ может быть представлена в виде десятичной периодической дроби вида $p = 0,0000(a_1a_2)$ с любым набором цифр $a_1, a_2, a_1 \ne a_2$, включая 0?

Ответ: 27.

4. Многочлен $P(x)$ удовлетворяет тождеству $xP(x-1) \equiv (x-8)P(x)$ по переменной x. Найти степень многочлена.
Ответ: 8.

5. Каждый из шести шаров радиуса $\sqrt{6}$ касаются друг друга и всех боковых ребер правильной треугольной призмы. Первый и шестой касаются также ребер верхнего и нижнего ее оснований. Найти объем призмы.

Ответ: $V = \dfrac{27(10\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}$.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Предварительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», выезд 2, математика, 11 класс

Вариант 1.

1. На столе разложены в ряд 18 кучек монет одинакового достоинства, упорядоченные номерами 1, 2, …18. Количество монет в кучке с номером в сумме с удвоенным числом монет в соседней кучке с номером всегда одинаковое и равное 180 для всех. Сколько монет находится в последней кучке?

2. Сколько существует различных пар $(x;y)$, $0\le x\le 2\pi, 0\le y\le 2\pi$, удовлетворяющих условию

$$\frac{\sin 2x}{\sin 3x}=\frac{\cos y}{\cos 2y}=\frac{\sin 2x\cos y+1}{\sin 3x\cos 2y+1}?$$

3. Рассматриваются три числа $\frac{1}{x^2}, \frac{y}{x}$ и $8\cdot\left(x^2+\frac{x}{y}\right)$, $x>0, y>0$. Число w, зависящее от x и y, равно наименьшему из них. Какое наибольшее значение может принимать w и при каких x, y оно достигается?

4. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и целое число $n\ge 5$ такие, что $P(3)=2$, а $P(n)=7$. Найти число n.

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ вершина D проектируется на основание в точку пересечения его высот (ортоцентр) и лежит на сфере, построенной на стороне BC как на диаметре. Длины ребер BC, CA и AB равны $2, \sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ соответственно. Найти длины боковых ребер пирамиды.

Ответы и решения

Задача 1. Обозначим x_i число монет к кучке с номером $i=1,2,\dots,18$ соответственно. Тогда условие задачи описывается системой уравнений $x_i+2x_{i+1}=180$ для $i=1,2,\dots,17$. Преобразуем полученную систему:

$$\begin{cases} x_1+2x_2=180\\ x_2+2x_3=180\\ \dots\\ x_i+2x_{i+1}=180\\ \dots\\ x_{17}+2x_{18}=180\end{cases} \to \begin{cases} x_1-x_2=2(x_3-x_2)\\ x_2-x_3=2(x_4-x_3)\\ \dots\\ x_{i-1}-x_i=2(x_{i+1}-x_i)\\ \dots\\ x_{16}-x_{17}=2(x_{18}-x_{17})\end{cases} \to \begin{cases} |x_1-x_2|=2|x_3-x_2|\\ |x_2-x_3|=2|x_4-x_3|\\ \dots\\ |x_{i-1}-x_i|=2|x_{i+1}-x_i|\\ \dots\\ |x_{16}-x_{17}|=2|x_{18}-x_{17}|\end{cases} \quad (1)$$

Из последней системы уравнений следует равенство $|x_1-x_2|=2^{16}|x_{18}-x_{17}|$

Заметим, что если $x_{18}\ne x_{17}$, то $|x_{18}-x_{17}|\ge 1$, так как x_i – целые числа. Но тогда $180+180\ge |x_1|+|x_2|\ge |x_1-x_2|\ge 2^{16}$, что невозможно. Следовательно, $x_{18}=x_{17}$, и из системы уравнений (1) следует цепочка равенств $x_{18}=x_{17}=\dots=x_i=\dots=x_2=x_1$. При этом $180=x_1+2x_2=3x_1$, $x_1=60$ и в каждой кучке по 60 монет.
Ответ: 60 монет.

Задача 2. Введем обозначения $a = \sin 2x$, $b = \cos y$, $c = \sin 3x$, $d = \cos 2y$. В новых обозначениях цепочка равенств из условия задачи принимает вид

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{ab+1}{cd+1},$$

Приравняв первую и третью дробь, а также вторую и третью дробь, получим систему уравнений и преобразуем ее:

$$\begin{cases} acd + a = abc + c \\ bcd + b = abd + d \end{cases} \to \begin{cases} ac(b-d) = c - a \\ bd(c-a) = b - d \end{cases} \to \begin{cases} abcd(c-a) = c - a \\ abcd(d-b) = d - b \end{cases}$$
$$\to \begin{cases} (c-a)(abcd-1) = 0 \\ (b-d)(abcd-1) = 0 \end{cases}$$

Отсюда следует, что или $abcd - 1 = 0$, или выполнена система $\begin{cases} c - a = 0 \\ b - d = 0 \end{cases}$

1) Рассмотрим случай $abcd = 1$. Так как каждая из величин a, b, c, d по абсолютной величине не превосходит 1, то каждая из них по абсолютной величине равна 1. В частности, имеем систему равенств $\begin{cases} |a| = |\sin 2x| = 1 \\ |c| = |\sin 3x| = 1 \end{cases}$. Решения этой системы – это решения системы $\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \cos 3x = 0 \end{cases}$, то есть $\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \\ 3x = \frac{\pi}{2} + 2\pi nm \end{cases}$ для $n, m \in Z$. Выразив x, получаем равенство $3\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, откуда $3n - 2m = -\frac{1}{2}$. Последнее равенство невозможно для целых n, m, получено противоречие.

Тогда выполнен другой случай

2) Одновременно выполнено $abcd \neq 1$ и $\begin{cases} c - a = 0 \\ b - d = 0 \end{cases}$. Решим систему

$$\begin{cases} a = c \neq 0 \\ b = d \neq 0 \\ |cd| \neq 1 \end{cases} \to \begin{cases} \sin 2x = \sin 3x \neq 0 \ (*) \\ \cos 2y = \cos y \neq 0 \ (**) \\ |\sin 2x \cos y| \neq 1 \end{cases}$$

Решение для уравнения $(*)$: $\sin 2x = \sin 3x$

$$\left[\begin{array}{ll} x = 2\pi n & \text{серия } (a) \\ x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi m}{5} & \text{серия } (b) \end{array}\right.$$

Серия решений (a) не удовлетворяет системе, так как для нее $\sin 2x = 0$. Для x из серии (b) выполняется неравенство $|\sin 2x| \neq 1$, поэтому условие$|\sin 2x \cos y| \neq 1$ выполняется. Так же для серии (b) по причине условия $\sin 2x \neq 0$ отбрасываются решения x, для которых $m = 5t + 2, t \in Z$.

$$2\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi m}{5}\right) = \pi k \to 5k - 4m = 2 \to \begin{cases} k = 2 + 4t \\ m = 2 + 5t \end{cases}, t \in Z.$$

Для серии (b) по причине условия $\sin 3x \neq 0$ отбрасываются те же решения x, для которых $m = 5t + 2, t \in Z$.

$$3\left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi m}{5}\right) = \pi l \to 5l - 6m = 3 \to \begin{cases} l = 3 + 6t \\ m = 2 + 5t \end{cases}, t \in Z$$

На отрезке $[0, 2\pi]$ уравнение $(*)$ имеет решения для значений $m = 1, 2, 3, 4, 5$, так как

$$0 \leq \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi m}{5} \leq 2\pi \to 0 \leq 2m + 1 \leq 10.$$

Значение $m = 2$ не удовлетворяет системе, так как $m = 2 = 5 \cdot 0 + 2$ и $\sin 2x = 0$, остальные четыре значения m не противоречат условиям и соответствуют четырем допустимым значениям x.

Аналогично найдем решение для уравнения $(**)$: $\cos 2y = \cos y$

$$\left[\begin{array}{ll} y = 2\pi n & \text{серия } (c) \\ y = \dfrac{2\pi m}{3} & \text{серия } (d) \end{array}\right.$$

Серия (d) содержит серию (c), и уравнение $(**)$ отрезке $[0, 2\pi]$ имеет решения для значений $m = 0, 1, 2, 3$, так как

$$0 \le \frac{2\pi m}{3} \le 2\pi \quad \to \quad 0 \le m \le 3.$$

Для $m = 0, 1, 2, 3$, $\cos y \ne 0$, $\cos 2y \ne 0$, поэтому эти четыре значения m соотвествуют четырем допустимым значениям y.

Таким образом, в квадрате $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ имеется $4 \cdot 4 = 16$ пар чисел (x, y), удовлетворяющих условию задачи.
Ответ: 16 пар.

Задача 3. Рассматриваются три числа $u, v, \frac{a}{u} + \frac{a}{v}$, для фиксированного числа $a > 0$ и произвольных u, v. Число w, зависящее от u, v, равно наименьшему из этих трех чисел. Требуется узнать, какое наибольшее значение может принимать w и при каких u, v оно достигается.
В условиях варианта 1 $u = \frac{1}{x^2}, v = \frac{y}{x}, a = 8$.
Пусть наибольшее значение $w = w_m$ достигается при $u = u_m, v = v_m$. Докажем, что $u_m = v_n$ методом от противного. Предположим, что $u_m \ne v_n$, и без ограничения общности полагаем $u_m < v_n$.
Рассмотрим три исчерпывающих случая

1) Случай $w_m = u_m$. Тогда $u_m \le \frac{a}{u_m} + \frac{a}{v_m}$. Строгое неравенство невозможно, иначе можно было увеличить u_m, одновременно уменьшив величину $\frac{a}{u_m} + \frac{a}{v_m}$ с сохранением неравенств $\begin{cases} u_m < v_n \\ u_m \le \frac{a}{u_m} + \frac{a}{v_m} \end{cases}$; при этом $w_m = u_m$ увеличится, и значит, оно было не максимально. Получено противоречие. Тогда
$$\begin{cases} u_m = \dfrac{a}{u_m} + \dfrac{a}{v_m} \\ u_m < v_n \end{cases} \to \frac{a}{u_m} > \frac{a}{v_m} = u_m - \frac{a}{u_m} \to u_m < \frac{2a}{u_m},$$
откуда получаем $u_m < \sqrt{2a}$ и $w_m < \sqrt{2a}$.
2) Случай $w_m = v_m$. Тогда $u_m \le \frac{a}{u_m} + \frac{a}{v_m}$. Строгое неравенство невозможно, иначе можно было увеличить v_m, одновременно уменьшив величину $\frac{a}{u_m} + \frac{a}{v_m}$ с сохранением неравенств $\begin{cases} u_m < v_n \\ u_m \le \frac{a}{u_m} + \frac{q}{v_m} \end{cases}$; при этом $w_m = v_m$ увеличится, и значит, оно было не максимально. Получено противоречие. Тогда
$$\begin{cases} v_m = \dfrac{a}{u_m} + \dfrac{a}{v_m} \\ u_m < v_n \end{cases} \to \frac{a}{v_m} = v_m - \frac{a}{u_m} < v_m - \frac{a}{v_m} \to v_m < \frac{2a}{v_m},$$

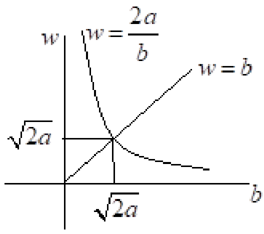
откуда получаем $v_m < \sqrt{2a}$ и $w_m < \sqrt{2a}$.

3) Случай $w_m = \frac{a}{u_m} + \frac{a}{v_m}$. Тогда выполнена система неравенств $\begin{cases} \frac{a}{u_m} + \frac{a}{v_m} \le u_m \\ \frac{a}{u_m} + \frac{a}{v_m} \le v_m \end{cases}$ $(*)$

   и если оба неравенства нестрогие, то уменьшив v_m с сохранением неравенств $u_m < v_n$ и $\frac{a}{u_m} + \frac{a}{v_m} \le v_m$, мы увеличим $\frac{a}{u_m} + \frac{a}{v_m}$. Таким образом, w_m было не наибольшим и получено противоречие. Тогда хотя бы одно неравенство системы $(*)$ обращается в равенство. Если $\frac{a}{u_m} + \frac{a}{v_m} = u_m$, то $\frac{a}{u_m} > \frac{a}{v_m} = u_m - \frac{a}{u_m} \to u_m < \frac{2a}{u_m}$, откуда получаем $u_m < \sqrt{2a}$ и $w_m < \sqrt{2a}$. Если же $\frac{a}{u_m} + \frac{a}{v_m} = v_m$, то $\frac{a}{v_m} = v_m - \frac{a}{u_m} < v_m - \frac{a}{v_m} \to v_m < \frac{2a}{v_m}$, откуда получаем $v_m < \sqrt{2a}$ и $w_m < \sqrt{2a}$.

В любом из трех рассмотренных случаев получено неравенство $w_m < \sqrt{2a}$, однако легко проверить, что при равных $u = v = \sqrt{2a}$ имеем $\frac{a}{u} + \frac{a}{v} = \frac{2a}{u} = \frac{2a}{\sqrt{2a}} = \sqrt{2a}$ и $w = \sqrt{2a}$.
Следовательно, $w_m < \sqrt{2a}$ не могло быть наибольшим, получено противоречие. Тогда наибольшее значение $w = w_m$ не могло достигаться при $u_m \ne v_n$, и достигается при $u = v = b$, где b - некоторая константа.

Найдем w_m и соответствующее ему значение b_m уже для двух чисел b и $\frac{2a}{b}$. На рис изображен график функции $w = w(b), b > 0$



$$w = \begin{cases} b, & b \in \left(0; \sqrt{2a}\right] \\ 2a/b, & b \in \left(\sqrt{2a}; +\infty\right) \end{cases} \to w_m = \sqrt{2a} \text{ достигается при } b = b_m = \sqrt{2a}$$

В варианте 1 при $u = \frac{1}{x^2}, v = \frac{y}{x}, a = 8, w_m = \sqrt{2a} = \sqrt{2 \cdot 8} = 4$ достигается при

$\frac{1}{x^2} = \frac{y}{x} = 4$, то есть при $x = \frac{1}{2}, y = 1$.

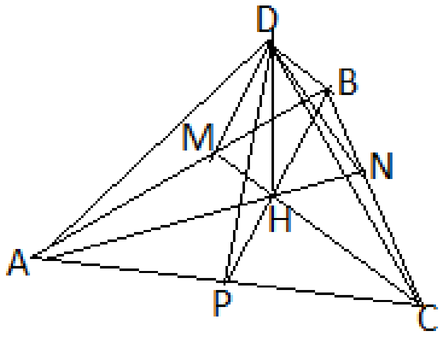
В каждом из предложенных вариантов возможно решение, основанное на решении рациональных систем уравнений.

Ответ: $w_{max} = 4$ при $x = \frac{1}{2}, y = 1$.

Задача 4. Разность $P(n) - P(3) = 7 - 2 = 5$ делится на $(n-3)$ согласно следствию из теоремы Безу. Так как 5 делится на целое число $(n-3)$, то величина $(n-3)$ может принимать только одно из следующих значений: -5, -1, 1, 5, а число n может принимать значения -2, 2, 4, 8. Условию $n \ge 5$ удовлетворяет лишь $n = 8$.
Ответ: $n = 8$.

Задача 5. Найдем длины боковых ребер пирамиды, площади боковых граней пирамиды, углы наклона боковых граней к основанию, объем пирамиды $ABCD$.

Обозначим H ортоцентр основания, M, N, P – основания перпендикуляров из вершины D на прямые AB, BC и AC соответственно. Длины ребер BC, CA и AB обозначим a, b и c соответственно. Заметим, что угол BDC прямой, как вписанный угол, опирающийся на диаметр BC окружности сечения сферы из условия плоскостью грани BDC.



Заметим, что $DH \perp BH, DH \perp AC \rightarrow BD \perp AC$ по теореме о трех перпендикулярах. Так как прямая BD ортогональна прямым AC и DC, то BD ортогональна плоскости ACD, отсюда следует, что угол ADB прямой. Аналогично, по теореме о трех перпендикулярах, прямая CD ортогональна прямой AB. Так как прямая CD ортогональна прямым AB и DB, то CD ортогональна плоскости ABD, отсюда следует, что угол ADC прямой. Следовательно, все углы пирамиды при вершине D прямые.

Вычислим длины боковых ребер. По теореме Пифагора имеем систему уравнений

$$\begin{cases} AD^2 + BD^2 = c^2 \\ AD^2 + CD^2 = b^2, \\ CD^2 + BD^2 = a^2 \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} 2AD^2 = b^2 + c^2 - a^2 \\ 2BD^2 = a^2 + c^2 - b^2, \\ 2CD^2 = a^2 + b^2 - c^2 \end{cases} \begin{cases} AD = \sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}} \\ BD = \sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}} \\ CD = \sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}} \end{cases}$$

Площади боковых граней:

$$S_{ADB} = \frac{1}{2} AD \cdot BD = \frac{1}{4}\sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)} = \frac{1}{4}\sqrt{c^4 - (b^2 - a^2)^2}$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} AD \cdot CD = \frac{1}{4}\sqrt{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + b^2 - c^2)} = \frac{1}{4}\sqrt{b^4 - (c^2 - a^2)^2}$$

$$S_{BDC} = \frac{1}{2} BD \cdot CD = \frac{1}{4}\sqrt{(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)} = \frac{1}{4}\sqrt{a^4 - (c^2 - b^2)^2}$$

Углы между боковыми гранями и основанием пирамиды:

$$\cos\measuredangle DMH = \frac{S_{ADB}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{c^4-(b^2-a^2)^2}}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},\ p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\cos\measuredangle DNH = \frac{S_{CDB}}{S_{ABC}} = \frac{1}{4}\frac{\sqrt{a^4-(c^2-b^2)^2}}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},\ p = \frac{a+b+c}{2}$$

$$\cos\measuredangle DPH=\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}}=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{b^4-(c^2-a^2)^2}}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}},\ p=\frac{a+b+c}{2}$$

Объем пирамиды $V_{ABCD}=\frac{1}{6}DA\cdot DB\cdot DC$.

Для варианта 1 имеем $a=2, b=\sqrt{2}, c=\sqrt{3}$, тогда

$$\begin{cases} AD=\sqrt{\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ BD=\sqrt{\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2} \\ CD=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $AD=\frac{\sqrt{2}}{2}, BD=\frac{\sqrt{10}}{2}, CD=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Вариант 2

1. На столе разложены в ряд 15 кучек монет одинакового достоинства упорядоченные номерами 1, 2, …15. Количество монет в кучке с номером k в сумме с удвоенным числом монет в соседней кучке с номером $k+1$ всегда одинаковое и равное 150 для всех $k=1,2,...,14$. Сколько монет находится в последней кучке?

Ответ: 50 монет.

2. Сколько существует различных пар $(x;y)$, $\pi\le x\le 4\pi, \pi\le y\le 4\pi$, удовлетворяющих условию

$$\frac{\sin x}{\sin 2x}=\frac{\cos 2y}{\cos y}=\frac{\sin x\cos 2y+1}{\sin 2x\cos y+1}?$$

Ответ: 16 пар.

3. Рассматриваются три числа $\frac{1}{x}$, y^2 и $32\cdot\left(x+\frac{1}{y^2}\right)$, $x>0, y>0$ Число w, зависящее от x и y, равно наименьшему из них. Какое наибольшее значение может принимать w и при каких x, y оно достигается?

Ответ: $w_m=8$ при $x=\frac{1}{8}, y=2\sqrt{2}$

4. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и целое число $n\ge 4$ такие, что $P(2)=-2$, а $P(n)=3$. Найти число n.

Ответ: $n=7$.

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ вершина D проектируется на основание в точку пересечения его высот (ортоцентр) и лежит на сфере, построенной на стороне BC как на диаметре. Длины ребер BC, CA и AB равны $4, 5$ и 6 соответственно. Найти площади боковых граней пирамиды.

Ответ: $c = AB = 6, b = AC = 5, a = BC = 4.$

$$S_{ADB} = \frac{1}{2} L \cdot DB = \frac{1}{4}\sqrt{(c^2+b^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)} = \frac{1}{4}\sqrt{c^4-(b^2-a^2)^2} = \frac{9\sqrt{15}}{4}$$

$$S_{ADC} = \frac{1}{2} L \cdot DC = \frac{1}{4}\sqrt{(c^2+b^2-a^2)\left(a^2+b^2-c^2\right)} = \frac{1}{4}\sqrt{b^4-(c^2-a^2)^2} = \frac{15}{4}$$

$$S_{BDC} = \frac{1}{2} DB \cdot DC = \frac{1}{4}\sqrt{a^4-(c^2-b^2)^2} = \frac{3\sqrt{15}}{4}$$

Вариант 3

1. На столе разложены в ряд 21 кучка монет одинакового достоинства упорядоченные номерами 1, 2, …21. Количество монет в кучке с номером k в сумме с удвоенным числом монет в соседней кучке с номером $k+1$ всегда одинаковое и равное 210 для всех $k = 1, 2, ..., 20$. Сколько монет находится в последней кучке?

Ответ: 70 монет.

2. Сколько существует различных пар $(x; y)$, $2\pi \le x \le 3\pi, 2\pi \le y \le 3\pi$, удовлетворяющих условию

$$\frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{\cos 2y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos 2y + 1}{\sin 2x \cos y + 1}?$$

Ответ: 6 пар.

3. Рассматриваются три числа $x\sqrt{y}, y\sqrt{x}$ и $4 \cdot \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{xy}\right)$, $x > 0, y > 0$ Число w, зависящее от x и y, равно наименьшему из них. Какое наибольшее значение может принимать w и при каких x, y оно достигается?

Ответ: $w_m = 2\sqrt{2}$ при $x = y = 2$

4. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и целое число $n \ge 1$ такие, что $P(-1) = -1$, а $P(n) = -4$. Найти число n.

Ответ: $n = 2.$

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ вершина D проектируется на основание в точку пересечения его высот (ортоцентр) и лежит на сфере, построенной на стороне BC как на диаметре. Длины ребер BC, CA и AB равны $5, 6$ и 7 соответственно. Найти углы наклона боковых граней к основанию.

Ответ: $c = AB = 7, b = AC = 6, a = BC = 5.$

$$\cos\measuredangle DMH=\frac{S_{ADB}}{S_{ABC}}=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{c^4-(b^2-a^2)^2}}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{\sqrt{95}}{12},\ p=\frac{a+b+c}{2}=9$$

$$\cos\measuredangle DNH=\frac{S_{CDB}}{S_{ABC}}=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{a^4-(c^2-b^2)^2}}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{\sqrt{19}}{12},\ p=\frac{a+b+c}{2}=9$$

$$\cos\measuredangle DPH=\frac{S_{ADC}}{S_{ABC}}=\frac{1}{4}\frac{\sqrt{b^4-(c^2-a^2)^2}}{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}=\frac{\sqrt{30}}{12},\ p=\frac{a+b+c}{2}=9$$

Вариант 4

1. На столе разложены в ряд 24 кучки монет одинакового достоинства, упорядоченные номерами 1, 2, …24. Количество монет в кучке с номером k в сумме с удвоенным числом монет в соседней кучке с номером $k+1$ всегда одинаковое и равное 240 для всех $k=1,2,...,23$. Сколько монет находится в последней кучке?

Ответ: 80 монет.

2. Сколько существует различных пар $(x;y)$, $\pi\le x\le 2\pi,\pi\le y\le 2\pi$, удовлетворяющих условию

$$\frac{\sin 2x}{\cos 3x}=\frac{\cos y}{\sin 3y}=\frac{\sin 2x\cos y+1}{\cos 3x\sin 3y+1}?$$

Ответ: 8 пар.

3. Рассматриваются три числа $\frac{\sqrt{x}}{y}, \frac{\sqrt{y}}{x}$ и $0,5\cdot\left(\frac{x\sqrt{y}+y\sqrt{x}}{\sqrt{xy}}\right)$, $x>0,\ y>0$ Число w, зависящее от x и y, равно наименьшему из них. Какое наибольшее значение может принимать w и при каких x, y оно достигается?

Ответ: $w_m=1$ при $x=y=1$

4. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами и целое число $n\ge 0$ такие, что $P(-2)=3$, а $P(n)=8$. Найти число n.

Ответ: $n=3$.

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ вершина D проектируется на основание в точку пересечения его высот (ортоцентр) и лежит на сфере, построенной на стороне BC как на диаметре. Длины ребер BC, CA и AB равны $7, 8$ и 9 соответственно. Найти объем пирамиды.

Ответ: $c=AB=9, b=AC=8, a=BC=7.$

$$AD=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}=4\sqrt{3},\qquad BD=\sqrt{\frac{a^2+c^2-b^2}{2}}=\sqrt{33}, CD=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}}=4;$$

$$V_{ABCD}=\frac{1}{6}DA\cdot DB\cdot DC=8\sqrt{11}.$$

Критерии проверки работ отборочного тура Олимпиады Росатом по математике, 11 класс, выезд 25-26 ноября 2023

Во всех задачах верный ответ без решения – 0 б.

Задача 1:

0 б – Сделаны некоторые предположения по решению задачи, нет составленной математической модели;

1 б – Верно составлена система уравнений по условию задачи;

2б - Задача решена с мелкими недочётами или арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения.

3 б – Задача решена верно.

Задача 2:

0 б – Двойное равенство сведено к системе, но уравнения системы не упрощены;

1 б – Каждое уравнение в системе разложено на множители, и система сведена к совокупности систем;

2 б - Получены верные решения систем, но количество различных пар (x;y) найдено неверно;

3 б - Задача решена верно.

Задача 3:

0 б – Сделаны некоторые предположения по решению задачи;

1 б – Доказано, что максимум минимального числа может достигаться только в случае, когда два числа из трех равны;

2 б – Доказано, что все три числа должны быть равны, но есть пробелы в обосновании;

3 б - Задача решена верно.

Задача 4:

0 б - Решение найдено подбором без объяснения, что других вариантов нет;

1 б – С помощью теоремы Безу получено разложение многочлена P(x)- const=(x-a)*(...);

2 б – Найдены все возможные значения n и доказано, что их конечное число; но ответ на вопрос задачи не найден;

3 б - Задача решена верно.

Задача 5:

0 б -Нарисован чертёж, найдены некоторые элементы пирамиды, недостаточные для решения задачи;

1б - Найдены элементы, достаточные для определения длин боковых ребер/боковых граней/ углов наклона боковых граней/объёма пирамиды;

2 б - Задача решена с мелкими недочетами или одной арифметической ошибкой, не влияющей на ход решения;

3 б - Задача решена верно.