Объединенная межвузовская математическая олимпиада **04.02.2024**

1 вариант

Задача 1. Все члены геометрической прогрессии положительны. Сумма первых 11 членов прогрессии равна 6, а сумма обратных величин этих членов равна 24. Найдите шестой член прогрессии.

Задача 2. На доске написаны числа 1, 2, 3, …, 27. За одну операцию Саша может выбрать два числа на доске, стереть их и записать на доску сумму стёртых чисел. Такими операциями он хочет добиться, чтобы на доске не нашлись одно или несколько чисел, сумма которых равна 27 (сумма одного числа — это само это число). Какое наименьшее количество операций придётся сделать Саше?

Задача 3. Партию новогодних шаров необходимо сложить в коробки так, чтобы в каждой коробке лежали шарики. Если использовать коробки вместимостью 90 шаров, то ровно одна коробка останется не полностью заполненной. Если взять на 3 коробки больше, но в которые помещается по 80 шаров, то вновь ровно одна коробка останется не полностью заполненной. Если же взять ещё на 12 коробок больше, но вместимостью 50 шаров, то все коробки будут полными. Сколько шаров могло быть в партии?

Задача 4. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$, расположенные в одной плоскости с вектором $\vec{b}$, имеют равную длину, отличную от длины вектора $\vec{b}$. Известно, что $\vec{a}_2+\vec{b}-2\vec{a}_1 = 8\vec{a}_4+\vec{b}-9\vec{a}_3 = \vec{0}$, $|\vec{a}_3 - \vec{b}| = 8$. Найдите $|\vec{a}_1 - \vec{b}|$.

Задача 5. Про действительные числа a, b, c известно, что

$$\begin{cases} ac - 3 = 4b^2, \\ 2bc - 3 = a^2. \end{cases}$$

Найдите все значения, чему может быть равно ab.

Задача 6. Решите уравнение

$$\cos\frac{88\pi^2}{x} = \frac{1}{\sin 3x}.$$

Задача 7. Наименьшее значение функции

$$\sqrt{x_1^2+1^2}+\sqrt{x_2^2+2^2}+\sqrt{x_3^2+3^2}+\ldots+\sqrt{x_{2023}^2+2023^2}$$

для неотрицательных x_1, x_2, …, x_{2023}, сумма которых равна k, равно $2023 \cdot 2024$. При каком значении параметра k такое возможно?

Задача 8. Ортогональной проекцией правильной треугольной пирамиды на некоторую плоскость является равнобокая трапеция с острым углом 60°. Известно, что объём пирамиды равен 72. Найдите площадь трапеции.

Задача 9. Функция f, определённая на действительных числах, принимает действительные значения. Известно, что для любых действительных x и y выполнено равенство $f(x)f(y) = f(7x - y)$. Найдите все такие функции f.

Задача 10. Последовательность (a_n) удовлетворяет условиям

$$a_0 = 0, \quad a_1 \neq 0, \quad a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n + a_{n+1}} \quad \text{при всех } n \geqslant 0.$$

Какие значения может принимать a_{2024}?

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **04.02.2024**

2 вариант

Задача 1. Все члены геометрической прогрессии положительны. Сумма первых 13 членов прогрессии равна 81, а сумма обратных величин этих членов равна 4. Найдите седьмой член прогрессии.

Задача 2. На доске написаны числа 3, 9, 27, $\ldots$, 3^{43}. За одну операцию Саша может выбрать два числа на доске, стереть их и записать на доску произведение стёртых чисел. Такими операциями он хочет добиться, чтобы на доске не нашлись одно или несколько чисел, произведение которых равно 3^{43} (произведение одного числа — это само это число). Какое наименьшее количество операций придётся сделать Саше?

Задача 3. Партию новогодних шаров необходимо сложить в коробки так, чтобы в каждой коробке лежали шарики. Если использовать коробки вместимостью 100 шаров, то ровно одна коробка останется не полностью заполненной. Если взять на 3 коробки больше, но в которые помещается по 90 шаров, то вновь ровно одна коробка останется не полностью заполненной. Если же взять ещё на 6 коробок больше, но вместимостью 70 шаров, то все коробки будут полными. Сколько шаров могло быть в партии?

Задача 4. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$, расположенные в одной плоскости с вектором $\vec{b}$, имеют равную длину, отличную от длины вектора $\vec{b}$. Известно, что $5\vec{a}_1 + 16\vec{a}_2 + 21\vec{b} = 5\vec{a}_3 + 4\vec{a}_4 + 9\vec{b} = \vec{0}$, $|\vec{a}_3 + \vec{b}| = 8$. Найдите $|\vec{a}_1 + \vec{b}|$.

Задача 5. Про действительные числа a, b, c известно, что

$$\begin{cases} ac - 1 = 4b^2, \\ 2bc - 1 = a^2 \end{cases}$$

Найдите все значения, чему может быть равно ab.

Задача 6. Решите уравнение

$$\sin \frac{88\pi^2}{x} = \frac{1}{\cos 7x}.$$

Задача 7. Наименьшее значение функции

$$\sqrt{x_1^2 + 2^2} + \sqrt{x_2^2 + 4^2} + \sqrt{x_3^2 + 8^2} + \ldots + \sqrt{x_{2024}^2 + \left(2^{2024}\right)^2}$$

для неотрицательных x_1, x_2, $\ldots$, x_{2024}, сумма которых равна k, равно 2^{2025}. При каком значении параметра k такое возможно?

Задача 8. Ортогональной проекцией правильной треугольной пирамиды на некоторую плоскость является равнобокая трапеция. Известно, что площадь трапеции составляет $30\sqrt{2}$, а полная поверхность пирамиды равна $100\sqrt{3}$. Найдите периметр трапеции.

Задача 9. Функция f, определённая на действительных числах, принимает действительные значения. Известно, что для любых действительных x и y выполнено равенство $f(x)f(y) = f(9x - y)$. Найдите все такие функции f.

Задача 10. Последовательность (a_n) удовлетворяет условиям

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n + a_{n+1}} \quad \text{при всех } n \geqslant 1.$$

Какие значения может принимать a_{2024}?

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **04.02.2024**

3 вариант

Задача 1. Все члены геометрической прогрессии положительны. Сумма первых 15 членов прогрессии равна 58, а сумма обратных величин этих членов равна 14,5. Найдите восьмой член прогрессии.

Задача 2. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 36. За одну операцию Саша может выбрать два числа на доске, стереть их и записать на доску сумму стёртых чисел. Такими операциями он хочет добиться, чтобы на доске не нашлись одно или несколько чисел, сумма которых равна 37 (сумма одного числа — это само это число). Какое наименьшее количество операций придётся сделать Саше?

Задача 3. Партию новогодних шаров необходимо сложить в коробки так, чтобы в каждой коробке лежали шарики. Если использовать коробки вместимостью 100 шаров, то ровно одна коробка останется не полностью заполненной. Если взять на 11 коробок больше, но в которые помещается по 70 шаров, то вновь ровно одна коробка останется не полностью заполненной. Если же взять ещё на 5 коробок больше, но вместимостью 60 шаров, то все коробки будут полными. Сколько шаров могло быть в партии?

Задача 4. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$, расположенные в одной плоскости с вектором $\vec{b}$, имеют равную длину, отличную от длины вектора $\vec{b}$. Известно, что $9\vec{a}_1 - 4\vec{a}_2 - 5\vec{b} = 16\vec{a}_3 - 9\vec{a}_4 - 7\vec{b} = \vec{0}$, $|\vec{a}_1 - \vec{b}| = 8$. Найдите $|\vec{a}_3 - \vec{b}|$.

Задача 5. Про действительные числа a, b, c известно, что

$$\begin{cases} ac - 2 = 9b^2, \\ 3bc - 2 = a^2 \end{cases}$$

Найдите все значения, чему может быть равно ab.

Задача 6. Решите уравнение

$$\sin \frac{88\pi^2}{x} = \frac{1}{\cos 3x}.$$

Задача 7. Наименьшее значение функции

$$\sqrt{x_1^2 + 1^2} + \sqrt{x_2^2 + 2^2} + \sqrt{x_3^2 + 3^2} + \ldots + \sqrt{x_{2024}^2 + 2024^2}$$

для неотрицательных x_1, x_2, ..., x_{2024}, сумма которых равна k, равно $2024 \cdot 2025$. При каком значении параметра k такое возможно?

Задача 8. Ортогональной проекцией правильной треугольной пирамиды на некоторую плоскость является параллелограмм с острым углом 60°. Найдите объём пирамиды, если её боковая поверхность равна 54.

Задача 9. Функция f, определённая на действительных числах, принимает действительные значения. Известно, что для любых действительных x и y выполнено равенство $f(x)f(y) = f(5x - y)$. Найдите все такие функции f.

Задача 10. Последовательность (a_n) удовлетворяет условиям

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n + a_{n+1}} \quad \text{при всех } n \geqslant 1.$$

Какие значения может принимать a_{2023}?

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **04.02.2024**

4 вариант

Задача 1. Все члены геометрической прогрессии положительны. Сумма первых 9 членов прогрессии равна 2,75, а сумма обратных величин этих членов равна 44. Найти пятый член прогрессии.

Задача 2. На доске написаны числа $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\ldots$, $\frac{1}{2^{24}}$. За одну операцию Саша может выбрать два числа на доске, стереть их и записать на доску произведение стёртых чисел. Такими операциями он хочет добиться, чтобы на доске не нашлись одно или несколько чисел, произведение которых равно $\frac{1}{2^{25}}$ (произведение одного числа — это само это число). Какое наименьшее количество операций придётся сделать Саше?

Задача 3. Партию новогодних шаров необходимо сложить в коробки так, чтобы в каждой коробке лежали шарики. Если использовать коробки вместимостью 70 шаров, то ровно одна коробка останется не полностью заполненной. Если взять на 7 коробок больше, но в которые помещается по 50 шаров, то вновь ровно одна коробка останется не полностью заполненной. Если же взять ещё на 5 коробок больше, но вместимостью 40 шаров, то все коробки будут полными. Сколько шаров могло быть в партии?

Задача 4. Векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$, расположенные в одной плоскости с вектором $\vec{b}$, имеют равную длину, отличную от длины вектора $\vec{b}$. Известно, что $2\vec{a}_1+\vec{a}_2+3\vec{b} = \vec{a}_3+8\vec{a}_4+9\vec{b} = \vec{0}$, $|\vec{a}_1 + \vec{b}| = 4$. Найдите $|\vec{a}_4 + \vec{b}|$.

Задача 5. Про действительные числа a, b, c известно, что

$$\begin{cases} ac - 1 = 9b^2, \\ 3bc - 1 = a^2 \end{cases}$$

Найдите все значения, чему может быть равно ab.

Задача 6. Решите уравнение

$$\cos\frac{88\pi^2}{x} = \frac{1}{\sin 7x}.$$

Задача 7. Наименьшее значение функции

$$\sqrt{x_1^2+1^2} + \sqrt{x_2^2+2^2} + \sqrt{x_3^2+4^2} + \ldots + \sqrt{x_{2024}^2 + (2^{2023})^2}$$

для неотрицательных x_1, x_2, $\ldots$, x_{2024}, сумма которых равна k, равно 2^{2024}. При каком значении параметра k такое возможно?

Задача 8. Ортогональной проекцией правильной треугольной пирамиды на некоторую плоскость является параллелограмм, площадь которого равна $6\sqrt{15}$. Найдите объём пирамиды, если её боковая поверхность составляет $15\sqrt{15}$.

Задача 9. Функция f, определённая на действительных числах, принимает действительные значения. Известно, что для любых действительных x и y выполнено равенство $f(x)f(y) = f(3x - y)$. Найдите все такие функции f.

Задача 10. Последовательность (a_n) удовлетворяет условиям

$$a_0 = 0, \quad a_1 \neq 0, \quad a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n + a_{n+1}} \quad \text{при всех } n \geqslant 0.$$

Какие значения может принимать a_{2023}?