Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2024.

Отборочный этап. Условия и решения задач.

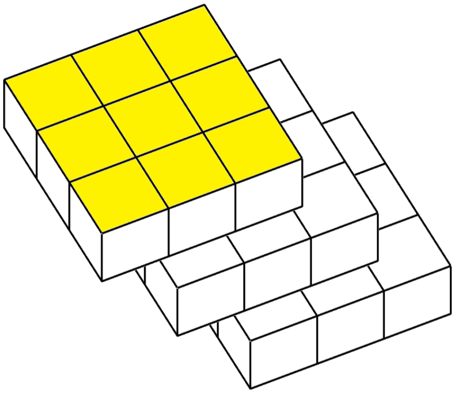
Содержание

6-7 классы.

Задача 1. У Пети есть 27 белых деревянных кубиков. Он сложил из них куб $3 \times 3 \times 3$ и покрасил жёлтой краской все его грани. После высыхания краски он снова разобрал куб и заметил, что краска затекала в стыки между кубиками, в результате чего были испачканы ещё некоторые грани маленьких кубиков. А именно, если Петя окрашивал грани двух соседних кубиков, то оказывались в краске ещё и грани этих кубиков, которыми они соприкасались, и только они. На рисунке показан пример того, как если бы Петя взял только два кубика, сложил бы их в брусочек $2 \times 1 \times 1$ и окрасил только одну его грань, в результате чего у этих двух кубиков суммарно оказалось бы 4 грани в краске, а 8 их граней остались бы белыми.

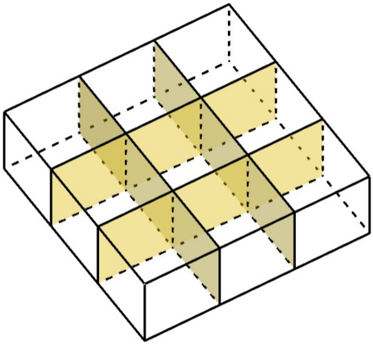
Вариант 1. Сколько всего граней у 27 кубиков остались белыми?
Вариант 2. На скольких гранях есть краска?

Решение. Рассмотрим куб $3 \times 3 \times 3$ до того, как Петя начал его раскрашивать, и понаблюдаем за процессом покраски. Пронумеруем грани большого куба от 1 до 6. Пусть Петя покрасил грань большого куба с номером 1. Разложим теперь куб на три слоя $3 \times 1 \times 1$, так, что верхний слой целиком содержит покрашенную грань куба (см. рисунок).

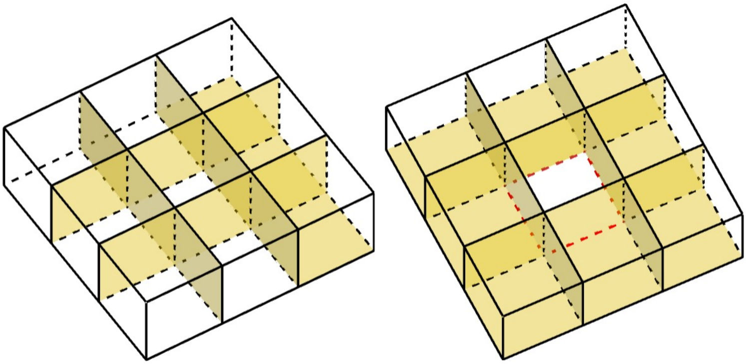


Так как пока окрашена только одна грань куба, которая целиком содержится в верхнем слое, то на среднем и нижнем слоях ни одна из граней маленьких кубиков не окрашена даже в результате затекания краски.

Будем наблюдать только за выделенным верхним слоем этого куба. Назовем его слоем, соответствующим грани с номером 1. На рисунке ниже изображен этот слой куба после окрашивания грани 1. Для удобства будем отмечать цветом только те грани, которые оказались жёлтыми исключительно в результате затекания краски.



Пусть теперь Петя покрасил ещё одну грань куба, соседнюю с уже покрашенной. Тогда в результате затекания краски на верхнем слое окажется ещё три окрашенные грани маленьких кубиков (см. рисунок слева). А после полного окрашивания куба верхний слой примет вид как на рисунке справа.



Заметим, что оказались окрашены все грани маленьких кубиков верхнего слоя, кроме одной (на рисунке отмечена красным цветом).

Отметим, что при повторении наблюдений для случаев, когда первой Петя раскрасил грань с любым другим номером, то вид слоя, соответствующего этому номеру, для каждого из случаев будет аналогичным. Откуда следует, что после полного окрашивания белыми остались только грани центрального кубика, а также по одной грани каждого из шести кубиков, которые соприкасались с центральным. Итого, суммарно белыми остались 12 граней маленьких кубиков. При этом всего у 27 кубиков $27 \cdot 6 = 162$ грани, 12 из которых остались белыми, значит, остальные 150 граней оказались в краске. □

Ответ:

Вариант 1. Белыми остались 12 граней.

Вариант 2. В краске оказались 150 граней.

Задача 2.1. Учительница дала Диме задание найти простые делители четырёхзначного числа $\overline{abcd}$. В какой-то момент у Димы в тетради была сделана запись как на картинке (разными буквами обозначены разные цифры, а делители за чертой справа написаны необязательно в порядке убывания). По этой записи восстановите число $\overline{abcd}$.

$$\begin{array}{r|l} \overline{abcd} & e \\ \overline{fcga} & n \\ \overline{abc} & c \\ 231 & \end{array}$$

Ответ: 6930.

Решение. Заметим, что после деления числа $\overline{abcd}$ на e и n получилось число $\overline{abc}$. Это значит, что $d = 0$ и $e \cdot n = 10$, то есть либо $e = 5$ и $n = 2$, либо $e = 2$ и $n = 5$.

Заметим, что если $c \geqslant 5$, то при умножении на него числа 231 не может получиться трёхзначного числа $\overline{abc}$. Тогда $c = 3$, так как по условию $c \neq e$ и $c \neq n$, то есть $c \neq 2$. Тогда $\overline{abc} = 231 \cdot 3 = 693$, откуда $n = 2$, $\overline{fcga} = 1386$, $e = 5$, а $\overline{abcd} = 6930$. $\square$

Задача 2.2. Учительница дала Диме задание найти простые делители четырёхзначного числа $\overline{abcd}$. В какой-то момент у Димы в тетради была сделана запись как на картинке (разными буквами обозначены разные цифры, а делители за чертой справа написаны необязательно в порядке убывания). По этой записи восстановите число $\overline{abcd}$.

$$\begin{array}{r|l} \overline{abcd} & e \\ \overline{fanb} & n \\ \overline{abc} & c \\ 321 & \end{array}$$

Ответ: 9630.

Задача 3.1. Машины А и Б одновременно выехали из одного города в одну сторону по дороге, а машина В выехала из того же города, но позже на полчаса. Машина В догнала машину А через 4 часа после своего выезда. При этом через 6 часов после выезда машины В расстояние между В и Б только увеличилось в 4 раза по сравнению с моментом выезда В. Во сколько раз скорость машины Б больше скорости машины А (все машины ехали с фиксированными скоростями)?

Ответ: 1,5.

Решение. Пусть скорость машины В равна x км/ч. Машина В проехала за 4 часа такое же расстояние, как машина А за 4,5 часа, то есть скорость машины А равна $\frac{4x}{4{,}5} = \frac{8x}{9}$ км/ч. Если машина Б за полчаса проезжает s км, то за 6 часов она проезжает $12s$ км, за это же время машина В проехала $9s$ км, то есть скорость машины Б равна $\frac{12x}{9} = \frac{4x}{3}$. Таким образом, скорость машины Б больше скорости машины А в $\frac{4x}{3} : \frac{8x}{9} = \frac{36}{24} = 1{,}5$ раза. $\square$

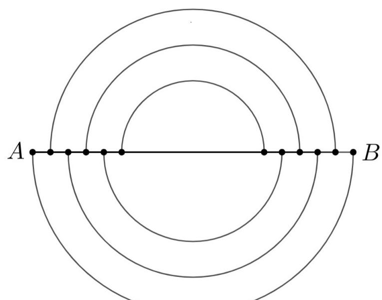
Задача 3.2. Машины А и Б одновременно выехали из одного города в одну сторону по дороге, а машина В выехала из того же города, но позже на полчаса. Машина В догнала машину А через 3 часа после своего выезда. При этом через 9 часов после выезда машины В расстояние между В и Б только увеличилось в 9 раз по сравнению с моментом выезда В. Во сколько раз скорость машины Б больше скорости машины А (все машины ехали с фиксированными скоростями)?

Ответ: 2,1.

Задача 3.3. Машины А и Б одновременно выехали из одного города в одну сторону по дороге, а машина В выехала из того же города, но позже на полчаса. Машина В догнала машину А через 5 часов после своего выезда. При этом через 7 часов после выезда машины В расстояние между В и Б только увеличилось в 4 раза по сравнению с моментом выезда В. Во сколько раз скорость машины Б больше скорости машины А (все машины ехали с фиксированными скоростями)?

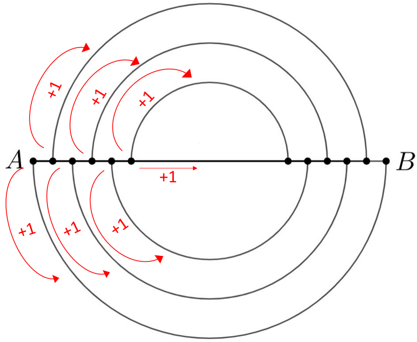
Ответ: 1,4.

Задача 4.1. Сколько существует различных несамопересекающихся путей из точки A в точку B?



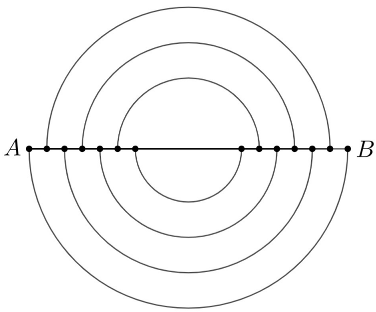
Ответ: 7.

Решение. Заметим, что на каждом из перекрёстков, находящихся ближе к точке A, есть два варианта направления движения: двигаться вдоль отрезка AB или повернуть на полуокружность, а на каждом из перекрёстков, находящихся ближе к точке B, есть только один вариант направления движения: вдоль отрезка AB, иначе не будет выполняться условие отсутствия самопересечения. Также заметим, что, свернув на полуокружность, мы сразу попадаем на перекрёстки, находящиеся ближе к точке B. То есть поворот на полуокружность добавляет только один способ добраться от точки A в точку B. Также есть 1 вариант пути без поворотов на полуокружности. Так как на рисунке полуокружностей 6, то всего $6 + 1 = 7$ способов добраться от точки A в точку B.



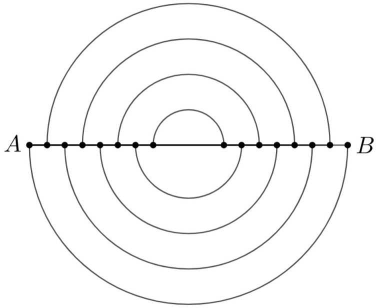
$\square$

Задача 4.2. Сколько существует различных несамопересекающихся путей из точки A в точку B?



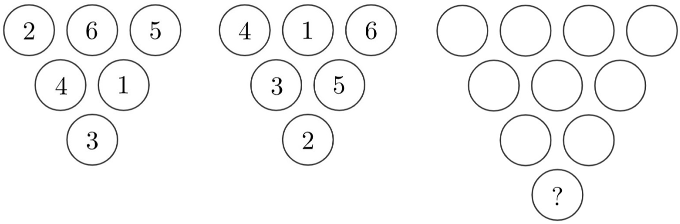
Ответ: 8.

Задача 4.3. Сколько существует различных несамопересекающихся путей из точки A в точку B?



Ответ: 9.

Задача 5. На рисунке показаны примеры того, как можно расставить числа от 1 до 6 в треугольник так, что каждое из чисел написано ровно один раз, а разность любых двух чисел по горизонтали находится точно под ними. Вася аналогичным образом решил расставлять числа от 1 до 10. Какое наибольшее число у него могло получиться в нижнем кружочке?



Ответ: 4.

Решение. Заметим, что число 10 может стоять только в верхней строке, так как его нельзя получить в виде разности никакой из пар среди чисел от 1 до 9. Отсюда следует, что ни 10, ни 9, ни 8 не могут стоять в нижнем кружочке. Также отметим, что число 9 не может стоять ниже второй сверху строки, так как его можно получить только разностью 10 и 1.

Проверим, что числа 7, 6 и 5 также не могли стоять в нижнем кружочке:

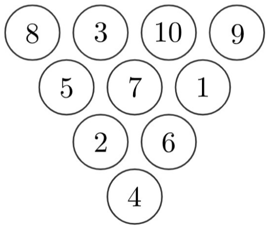
1) Пусть в нижнем кружочке написано число 7. Его можно получить несколькими способами: $7 = 10 - 3 = 9 - 2 = 8 - 1$. Так как на второй снизу строке не может стоять ни 10, ни 9, то остаётся рассмотреть вариант, когда в предпоследней строке стоят 8 и 1. Число 8 может быть получено как $8 = 10 - 2 = 9 - 1$. Число 10 на вторую строку поставить не можем. Оставшийся вариант также не подходит, так как число 1 не может быть написано повторно.

2) Пусть в нижнем кружочке стоит число 6. Без использования чисел 10 и 9 его можно получить как $6 = 8 - 2 = 7 - 1$. Рассмотрим первый из этих вариантов, с числом 8. Над числом 8 в этом случае не могут находиться 10 и 2. Тогда над

ним написаны 9 и 1. Но над 9 не может быть написано 10 и 1, так как число 1 не может повторяться. Отметим, что отсюда следует, что число 8 не может стоять в предпоследней строке.

3) Пусть в нижнем кружочке написано число 5. Без использования чисел 8, 9 и 10 его можно получить как $5 = 7 - 2 = 6 - 1$. Рассмотрим вариант с числом 7. Во избежание повторов над числом 7 в этом случае не могут находиться 9 и 2. Тогда над ним написаны числа 8 и 1. Но тогда над числом 8 не могут находиться ни 10 и 2, ни 9 и 1, так как числа 1 и 2 уже использованы и повторяться не могут. Осталось рассмотреть случай, когда над 5 написаны 6 и 1. Число 6 можно получить как $6 = 10 - 4 = 9 - 3 = 8 - 2 = 7 - 1$. Пара 10 и 4 быть написана не может, так как число 10 не можем поставить в эту строку. Ни 7 и 1, ни 9 и 3, ни 8 и 2 также написаны быть не могут, так как числа не могут повторяться.

Приведём пример, когда в нижнем кружочке написано число 4:



□

Задача 6.1. Гриша и Паша играют в игру. Гриша загадывает натуральное число от 1 до 15. Своим ходом Паша называет любое число. Если оно совпадает с числом Гриши, то Паша победил. Если же нет, то Гриша прибавляет к своему числу 333. За какое наименьшее число вопросов Паша может гарантированно победить?

Ответ: 15.

Решение. Покажем, что Паша может победить за 15 вопросов: сначала он спрашивает 1, потом 2+333, потом $3 + 2 \cdot 333$, ..., $15 + 14 \cdot 333$.

Докажем, что за меньшее количество вопросов справиться нельзя. Напишем все числа от 1 до 15, а после каждого вопроса будем одновременно ко всем числам прибавлять 333. Если Паша будем называть одно из написанных чисел, то вычёркиваем его из списка (за каждый ход вычёркивается не больше одного числа). Если количество вопросов будет меньше 15, то хотя бы одно из чисел останется не зачёркнутым, а значит существует изначальный вариант, при котором Паша не победит. □

Задача 6.2. Гриша и Паша играют в игру. Гриша загадывает натуральное число от 1 до 23. Своим ходом Паша называет любое число. Если оно совпадает с числом Гриши, то Паша победил. Если же нет, то Гриша прибавляет к своему числу 137. За какое наименьшее число вопросов Паша может гарантированно победить?

Ответ: 23.

Задача 6.3. Гриша и Паша играют в игру. Гриша загадывает натуральное число от 1 до 17. Своим ходом Паша называет любое число. Если оно совпадает с числом Гриши, то Паша победил. Если же нет, то Гриша прибавляет к своему числу 176. За какое наименьшее число вопросов Паша может гарантированно победить?

Ответ: 17.

8-9 классы.

Задача 1.1.
Точки А и Б являются противоположными вершинами прямоугольника 3×4 на бесконечной клетчатой плоскости, где длина стороны клеток равна 1. Улитка ползёт по линиям сетки из точки А в точку Б, при этом поворачивать она может только в узлах сетки. Сколько существует способов построить маршрут улитки длины 9?

Ответ: 1134.

Решение. Будем считать, что улитка находится в точке (0,0) и ей нужно проползти в точку (4,3). Есть две группы способов движения улитки таких, чтобы длина её маршрута из точки А в точку Б оказалась длины 9:

1) Весь маршрут состоит из четырёх отрезков вправо, четырёх вверх и одного вниз в любом порядке. Количество таких способов равно $C_9^4 \cdot C_5^1 = 630$;

2) Весь маршрут состоит из пяти отрезков вправо, одного влево и трёх вверх в любом порядке. Количество таких способов равно $C_9^5 \cdot C_4^1 = 504$.

Складывая данные числа, получаем 1134 способа. □

Задача 1.2.
Точки А и Б являются противоположными вершинами прямоугольника 2×5 на бесконечной клетчатой плоскости, где длина стороны клеток равна 1. Улитка ползёт по линиям сетки из точки А в точку Б, при этом поворачивать она может только в узлах сетки. Сколько существует способов построить маршрут улитки длины 9?

Ответ: 756.

Задача 1.3.
Точки А и Б являются противоположными вершинами прямоугольника 4×5 на бесконечной клетчатой плоскости, где длина стороны клеток равна 1. Улитка ползёт по линиям сетки из точки А в точку Б, при этом поворачивать она может только в узлах сетки. Сколько существует способов построить маршрут улитки длины 11?

Ответ: 5082.

Задача 2.1.
Учительница написала на доске число. Вася разделил его на 15, а Петя – на 35. Аня заметила, что у Васи получился куб некоторого натурального числа, а у Пети – пятая степень некоторого натурального числа. Напишите наименьшее такое число, куб которого мог получиться у Васи.

Ответ: 1323.

Решение. Пусть учительница написала на доске число A. Тогда пусть у Васи получилось число $A : 15 = a^3$, а у Пети – $A : 35 = b^5$, где a, b – натуральные числа. Откуда, выражая число A, получаем равенство: $a^3 \cdot 3 \cdot 5 = b^5 \cdot 5 \cdot 7$, то есть $a^3 \cdot 3 = b^5 \cdot 7$.

Так как числа 3 и 7 взаимно простые и a, b – натуральные, то, чтобы равенство выполнялось, a и b имеют вид: $a = 7x$ и $b = 3y$, где x, y – натуральные числа. Преобразуем полученное выражение: $3 \cdot 7^3 \cdot x^3 = 7 \cdot 3^5 \cdot y^5$, то есть $7^2 \cdot x^3 = 3^4 \cdot y^5$.

Откуда получим, что x, y имеют вид: $x = 7 \cdot 3^3 \cdot l$ и $y = 7 \cdot 3 \cdot k$, где k, l – натуральные числа, а тогда $a = 7 \cdot x = 7^2 \cdot 3^3 \cdot l$. Тогда полученное выше равенство преобразуется в $7^5 \cdot 3^9 \cdot l^3 = 3^9 \cdot 7^5 \cdot k^5$, то есть $l^3 = k^5$.

Так как a должно быть наименьшим, то $l = k = 1$, $a = 7^2 \cdot 3^3 = 1323$. □

Задача 2.2.
Учительница написала на доске число. Вася разделил его на 21, а Петя – на 15. Аня заметила, что у Васи получился куб некоторого натурального числа, а у Пети – пятая степень некоторого натурального числа. Напишите наименьшее такое число, куб которого мог получиться у Васи.

Ответ: 8575.

Задача 2.3.
Учительница написала на доске число. Вася разделил его на 15, а Петя – на 21. Аня заметила, что у Васи получился куб некоторого натурального числа, а у Пети – пятая степень некоторого натурального числа. Напишите наименьшее такое число, куб которого мог получиться у Васи.

Ответ: 6125.

Задача 3.1.
В треугольнике ABC с целочисленными сторонами $AC = 2024$. Биссектриса $\angle BAC$ пересекает сторону BC в точке D. Оказалось, что $AB = CD$. Найдите длину стороны BC.

Ответ: 1518.

Решение. Введём обозначения: пусть $AB = CD = x$ и $BD = y$. Тогда по свойству биссектрисы: $\frac{x}{y} = \frac{2024}{x}$, то есть $x^2 = 2024y = 2^3 \cdot 11 \cdot 23y$.

Так как по условию длины сторон треугольника – целые числа, то $AB = x$ – целое и $BC = x + y$ – целое, откуда y – тоже целое. Получаем, что число $2^3 \cdot 11 \cdot 23y$ является квадратом некоторого целого числа. Тогда $y = 2 \cdot 11 \cdot 23 \cdot z^2 = 506z^2$, где z – целое число. Откуда получаем, что $AB = x = 1012z$, $BC = x + y = 1012z + 506z^2$, $AC = 2024$.

Заметим, что при $z \geqslant 2$ не выполняется неравенство треугольника, то есть что $1012z + 2024 > 1012z + 506z^2$.

Таким образом, $z = 1$, а тогда $BC = 1012z + 506z^2 = 1518$. $\square$

Задача 3.2.
В треугольнике ABC с целочисленными сторонами $AC = 2584$. Биссектриса $\angle BAC$ пересекает сторону BC в точке D. Оказалось, что $AB = CD$. Найдите длину стороны BC.

Ответ: 1938.

Задача 4.1.
Заяц поставил фишку на какую-то клетку доски 11×11. За один ход Заяц передвигает фишку на соседнюю по стороне клетку, но при этом нельзя делать два одинаковых хода подряд (например, нельзя двигать вправо 2 раза подряд). Какое наибольшее количество клеток Заяц может посетить такими ходами, если нельзя наступать на одну клетку дважды?

Ответ: 103.

Решение. Докажем, что Заяц не сможет посетить больше 103 клеток. Раскрасим клетки в шахматную раскраску так, чтобы угловые клетки были чёрными. Чёрные клетки таблицы разделим на два типа: те, которые находятся в строчках с нечётным номером, и те, которые находятся в строчках с чётным номером. Заметим, что фишка чередует на своем пути чёрные и белые клетки, а также типы чёрных клеток чередуются между собой. Количество чёрных клеток второго типа равняется 25, а значит всего чёрных клеток на пути будет не больше 51, тогда белых клеток — не больше 52.

На рисунке ниже приведён пример, в котором Заяц посетил ровно 103 клетки.

2	3	6	7	10	11	14	15	18	19	
1	4	5	8	9	12	13	16	17	20	21
	39	38	35	34	31	30	27	26	23	22
41	40	37	36	33	32	29	28	25	24	
42	43	46	47	50	51	54	55	58	59	
	44	45	48	49	52	53	56	57	60	61
	79	78	75	74	71	70	67	66	63	62
81	80	77	76	73	72	69	68	65	64	
82	83	86	87	90	91	94	95	98	99	
	84	85	88	89	92	93	96	97	100	101
									103	102

$\square$

Задача 4.2.
Заяц поставил фишку на какую-то клетку доски 13×13. За один ход Заяц передвигает фишку на соседнюю по стороне клетку, но при этом нельзя делать два одинаковых хода подряд (например, нельзя двигать вправо 2 раза подряд). Какое наибольшее количество клеток Заяц может посетить такими ходами, если нельзя наступать на одну клетку дважды?

Ответ: 147.

Задача 4.3.
Заяц поставил фишку на какую-то клетку доски 9×9. За один ход Заяц передвигает фишку на соседнюю по стороне клетку, но при этом нельзя делать два одинаковых хода подряд (например, нельзя двигать вправо 2 раза подряд). Какое наибольшее количество клеток Заяц может посетить такими ходами, если нельзя наступать на одну клетку дважды?

Ответ: 67.

Задача 5.1.
В треугольнике ABC: $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$. Пусть точки D, E и F – середины сторон AB, BC и CA соответственно. Точка $X \neq E$ – пересечение окружностей, описанных вокруг $\triangle BDE$ и $\triangle CEF$. Чему равна сумма $XA + XB + XC$?

Ответ: 24,375.

Решение. Заметим, что точка O — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности, лежит на окружности, проходящей через точки B, D, E, так как $\angle ODB + \angle OEB = 180°$. Аналогично, точка O лежит на окружности, проходящей через точки C, E, F. Значит, точки X и O совпадают и искомая сумма равна $3R$, где R – радиус описанной около $\triangle ABC$ окружности.

Используя формулу Герона и формулу площади треугольника через радиус описанной окружности, получим равенство:

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{abc}{4R},$$

откуда

$$3R = \frac{3abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Подставляя соответствующие значения сторон и полупериметра, получим, что $3R = 24{,}375$. $\square$

Задача 5.2.
В треугольнике ABC: $AB = 9$, $BC = 10$, $AC = 17$. Пусть точки D, E и F – середины сторон AB, BC и CA соответственно. Точка $X \neq E$ – пересечение окружностей, описанных вокруг $\triangle BDE$ и $\triangle CEF$. Чему равна сумма $XA + XB + XC$?

Ответ: 31,875.

Задача 5.3.
В треугольнике ABC: $AB = 11$, $BC = 13$, $AC = 20$. Пусть точки D, E и F – середины сторон AB, BC и CA соответственно. Точка $X \neq E$ – пересечение окружностей, описанных вокруг $\triangle BDE$ и $\triangle CEF$. Чему равна сумма $XA + XB + XC$?

Ответ: 32,5

Задача 6.1.
200 учеников писали тест из 11 задач. Каждая задача была верно решена хотя бы 91 участником. При каком наибольшем k можно гарантировать, что найдётся ученик, который верно решил хотя бы k задач?

Ответ: 6.

Решение. Заметим, что всего правильных решений было хотя бы $91 \cdot 11 = 1001$, а значит по принципу Дирихле найдётся ученик, который решил хотя бы $\frac{1001}{200} > 5$ задач, то есть хотя бы 6. При этом существует пример, в котором все ученики решили не больше 6 задач: 100 учеников решили задачи с номерами 1-6, а другие 100 учеников решили задачи с номерами 7-11. $\square$

Задача 6.2.
200 учеников писали тест из 9 задач. Каждая задача была верно решена хотя бы 89 участниками. При каком наибольшем k можно гарантировать, что найдётся ученик, который верно решил хотя бы k задач?

Ответ: 5.

Задача 6.3.
140 учеников писали тест из 13 задач. Каждая задача была верно решена хотя бы 97 участниками. При каком наибольшем k можно гарантировать, что найдётся ученик, который верно решил хотя бы k задач?

Ответ: 10.

10-11 классы.

Задача 1.1.

Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^y = 2^{2^{2^2}}$?

Ответ: 17.

Решение. Перепишем уравнение в виде $x^y = 2^{2^{16}}$. Число x является степенью двойки. Пусть $x = 2^k$, тогда $y = \frac{2^{16}}{k}$, то есть k является делителем числа 2^{16}, а тогда существует ровно 17 вариантов, при этом x и y однозначно определяются значением k. Таким образом, количество решений равно 17. $\square$

Задача 1.2.

Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^y = 3^{3^{3^3}}$?

Ответ: 28.

Задача 1.3.

Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x^y = 7^{5^{3^2}}$?

Ответ: 10.

Задача 2.1.

По шоссе едет легковой автомобиль со скоростью x км/ч. На расстоянии 100 метров перед ним едет грузовой автомобиль со скоростью 60 км/ч. Легковой автомобиль собирается совершить обгон в момент, когда по встречной полосе на расстоянии 1 км от него едет мотоциклист со скоростью 120 км/ч. С какой наименьшей скоростью x, где x – целое число, нужно ехать легковому автомобилю, чтобы безопасно совершить обгон грузового автомобиля, если для этого необходимо на момент завершения манёвра находиться не менее чем в 60 метрах от грузового автомобиля и не менее чем в 120 метрах от мотоциклиста?

Ответ: 100.

Решение. Пусть t ч — время, которое потребовалось легковому автомобилю для совершения манёвра. Запишем условия, при которых обгон будет считаться безопасным:

1) К моменту совершения манёвра легковой автомобиль пройдёт расстояние $xt = 0{,}1 + 60t + y$, где $y \geqslant 0{,}06$ км — расстояние, на которое легковой автомомбиль опередил грузовой. Таким образом, $xt - 60t = 0{,}1 + y \geqslant 0{,}16$. Откуда $t \geqslant \frac{0{,}16}{x-60}$.

2) Так как на момент совершения обгона легковой автомобиль должен находиться не менее, чем в 120 метрах от мотоциклиста, то $(x + 120)t \leqslant 0{,}88$. Тогда,

учитывая полученное неравенство в пункте (1): $0{,}16 \cdot (x+120) \leqslant 0{,}88 \cdot (x-60)$. После преобразований получим, что $x \geqslant 100$.

Таким образом, $x = 100$ км/ч — искомая скорость. $\square$

Задача 2.2.
По шоссе едет легковой автомобиль со скоростью x км/ч. На расстоянии 100 метров перед ним едет грузовой автомобиль со скоростью 70 км/ч. Легковой автомобиль собирается совершить обгон в момент, когда по встречной полосе на расстоянии 1 км от него едет мотоциклист со скоростью 110 км/ч. С какой наименьшей скоростью x, где x – целое число, нужно ехать легковому автомобилю, чтобы безопасно совершить обгон грузового автомобиля, если для этого необходимо на момент завершения манёвра находиться не менее чем в 70 метрах от грузового автомобиля и не менее чем в 110 метрах от мотоциклиста?

Ответ: 113.

Задача 3.1.
Сколько существует способов выбрать два различных натуральных делителя числа 10^7 так, чтобы их сумма была кратна трём?

Ответ: 1024.

Решение. Любой делитель числа 10^7 имеет вид $2^x \cdot 5^y$, где $0 \leqslant x \leqslant 7, 0 \leqslant y \leqslant 7$. При этом $2^x \cdot 5^y \underset{3}{\equiv} (-1)^{x+y}$. Тогда для того, чтобы сумма двух делителей была кратна трём, у этих делителей должна быть разная чётность $x+y$. Количество способов выбрать пару чисел (x, y) одной чётности равно $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$, разной чётности — также $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$, тогда искомое число способов равно $32^2 = 1024$. $\square$

Задача 3.2.
Сколько существует способов выбрать два различных натуральных делителя числа 2500000 так, чтобы их сумма была кратна трём?

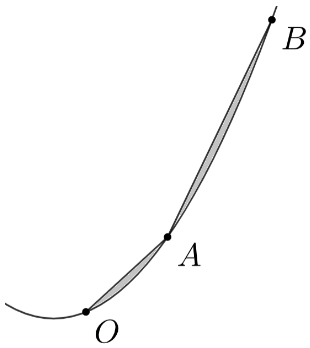
Ответ: 576.

Задача 3.3.
Сколько существует способов выбрать два различных натуральных делителя числа 1600000 так, чтобы их сумма была кратна трём?

Ответ: 900.

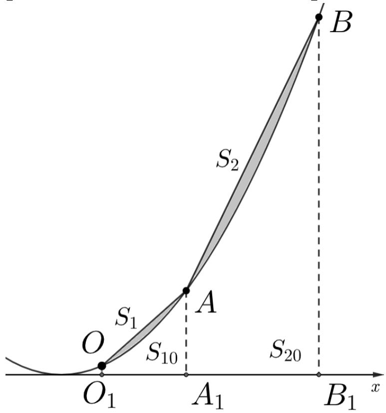
Задача 4.1.
На параболе $y = x^2$ отмечены точки $O(1, 1)$ и $B(11, 121)$. Найдите абсциссу

такой точки A на этой параболе, что сумма обозначенных на рисунке площадей наименьшая.



Ответ: 6.

Решение. Опустим перпендикуляры OO_1, AA_1 и BB_1 на ось x. Обозначим искомые площади как S_1 и S_2 (см. рисунок). Также обозначим за S_{10} площадь, ограниченную осью x, прямыми OO_1 и AA_1 и параболой, и за S_{20} площадь, ограниченную осью x, прямыми AA_1 и BB_1 и параболой.



Тогда искомая сумма равна $S_1+S_2 = S_{O_1OAA_1}+S_{A_1ABB_1}-(S_{10}+S_{20})$. Заметим, что при заданных координатах точек O и B сумма $S_{10}+S_{20}$ не зависит от положения точки A. Тогда для того, что сумма S_1+S_2 была наименьшей, нужно, чтобы сумма $S_{O_1OAA_1}+S_{A_1ABB_1}$ была наименьшей.

Пусть точка A имеет координаты (a, a^2). Выражая сумму площадей трапеций O_1OAA_1 и A_1ABB_1, получим:

$$S_{O_1OAA_1}+S_{A_1ABB_1} = \frac{1}{2}(OO_1+AA_1)\cdot O_1A_1 + \frac{1}{2}(AA_1+BB_1)\cdot A_1B_1 =$$

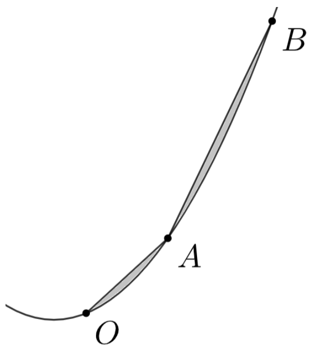
$$= \frac{1}{2}(1+a^2)\cdot(a-1) + \frac{1}{2}(a^2+121)\cdot(11-a) =$$

$$= \frac{1}{2}(a + a^3 - 1 - a^2 + 11a^2 + 11^3 - a^3 - 11^2 a) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2(11-1) - a(11^2-1) + 11^3 - 1\right).$$

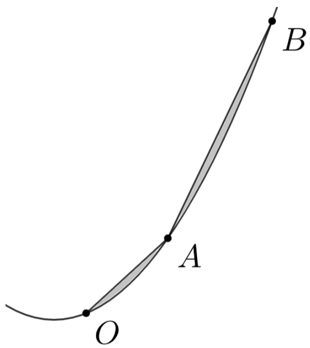
Полученное выражение описывает параболу с ветвями, направленными вверх. Таким образом, наименьшее значение принимается в точке $a = \frac{11^2-1}{2\cdot(11-1)} = 6$. $\square$

Задача 4.2.
На параболе $y = x^2$ отмечены точки $O(1,1)$ и $B(17,289)$. Найдите абсциссу такой точки A на этой параболе, что сумма обозначенных на рисунке площадей наименьшая.



Ответ: 9.

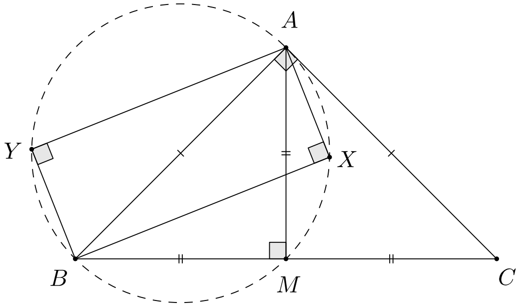
Задача 4.3.
На параболе $y = x^2$ отмечены точки $O(1,1)$ и $B(21,441)$. Найдите абсциссу такой точки A на этой параболе, что сумма обозначенных на рисунке площадей наименьшая.



Ответ: 11.

Задача 5.1.
Пусть ABC – равнобедренный прямоугольный треугольник, в котором $AB = AC$, точка M – середина стороны BC. Построим прямоугольник $AXBY$ такой, что X лежит внутри $\triangle ABC$ и $YM = 8\sqrt{2}$. Найдите площадь четырехугольника $AXBC$, если известно, что $AY^3 + BY^3 = 12^3$.

Ответ: 54.



Решение. Поскольку $\triangle ABC$ – равнобедренный с основанием BC, то медиана AM также является высотой. Тогда $\angle AYB = \angle AMB = 90°$, откуда четырехугольник $AMBY$ — вписанный. Введём обозначения: $AY = a$, $BY = b$. Тогда по теореме Птолемея для вписанного четырёхугольника $AMBY$:

$$AB \cdot YM = AM \cdot b + BM \cdot a.$$

Так как AM – медиана прямоугольного $\triangle ABC$, опущенная на гипотенузу, то $AM = BM$. Тогда $\triangle AMB$ также является прямоугольным равнобедренным, откуда по теореме Пифагора $AB = AM\sqrt{2}$. С другой стороны, $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$ по теореме Пифагора для $\triangle AYB$.

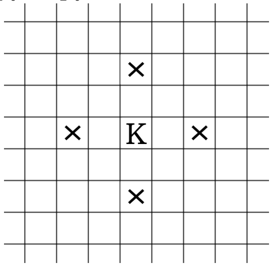
Таким образом, равенство, полученное из теоремы Птолемея, можно переписать в виде $AM\sqrt{2} \cdot YM = AM \cdot b + AM \cdot a$, откуда $\sqrt{2}YM = a + b$ и, подставляя $YM = 8\sqrt{2}$, $a+b = 16$. Также из условия задачи $a^3+b^3 = (a+b)(a^2+b^2-ab) = 12^3$. Откуда $16 \cdot (a^2 + b^2 - ab) = 12^3$.

Тогда искомая площадь равна $S_{AXBC} = S_{ABC} - S_{AXB} = \frac{a^2+b^2-ab}{2} = 54$. □

Задача 5.2. Пусть ABC – равнобедренный прямоугольный треугольник, в котором $AB = AC$, точка M – середина стороны BC. Построим прямоугольник $AXBY$ такой, что X лежит внутри $\triangle ABC$ и $YM = 16\sqrt{2}$. Найдите площадь четырехугольника $AXBC$, если известно, что $AY^3 + BY^3 = 28^3$.

Ответ: 343.

Задача 6.1.
Фигура «крот» бьёт все клетки ровно через одну по горизонтали или вертикали (см. рисунок). Какое наибольшее число кротов можно расставить на доске 16×16 так, чтобы они не били друг друга?

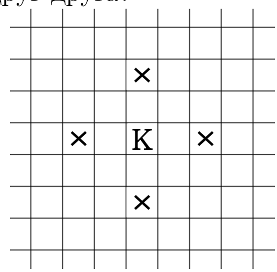


Ответ: 128.

Решение. Покажем, что на доску можно поставить 128 не бьющих друг друга кротов. Разобьём всю доску на квадраты 2×2 и покрасим эти квадраты в шахматную раскраску. После чего поставим кротов только в квадраты белого цвета. Нетрудно убедиться, что при такой растановке кроты не бьют друг друга.

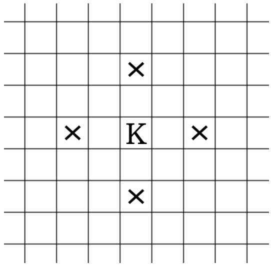
Докажем, что кроты не могут занимать больше половины клеток доски. Для этого разобьём всю доску на 64 прямоугольника 1×4. Тогда в каждом таком прямоугольнике может находиться не более двух кротов. $\square$

Задача 6.2.
Фигура «крот» бьёт все клетки ровно через одну по горизонтали или вертикали (см. рисунок). Какое наибольшее число кротов можно расставить на доске 12×12 так, чтобы они не били друг друга?



Ответ: 72.

Задача 6.3.
Фигура «крот» бьёт все клетки ровно через одну по горизонтали или вертикали (см. рисунок). Какое наибольшее число кротов можно расставить на доске 20×20 так, чтобы они не били друг друга?



Ответ: 200.