Решения заданий первого этапа 2023-24 гг
Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике
11 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

11.1. Четыре клетки на клетчатой бумаге называются *квартетом*, если их центры образуют прямоугольник, стороны которого параллельны линиям сетки. Какое максимальное количество квартетов можно разместить в квадрате 5 на 5? Никакие два разных квартета не могут содержать общих клеток.

Ответ. 5 квартетов.

Решение. Каждая строка квадрата 5 на 5 пересекается с любым квартетом либо по паре клеток, либо по нулю клеток, то есть по чётному числу клеток. Следовательно, каждая строка содержит чётное число клеток, лежащих в квартетах. Всего в строке 5 клеток, поэтому хотя бы одна клетка каждой строки квадрата остаётся свободной. В квадрате 5 строк, значит, квадрат содержит не менее 5 свободных клеток, и не более 20 клеток, занятых квартетами. Следовательно, в квадрате 5 на 5 нельзя разместить более 5 непересекающихся квартетов.

Пример размещения 5 квартетов выглядит так: обозначим вертикали квадрата 5 на 5 как в шахматах, буквами a,b,c,d,e, а горизонтали – цифрами от 1 до 5. Первый квартет содержит 4 угловых клетки квадрата a1,a5,e1,e5, второй – a2,a3,b2,b3, третий –b4,b5,c4,c5, четвёртый – d3,d4,e3,e4, пятый – c1,c2,d1,d2. Свободными остаются клетки a4,b1,c3,d5,e2, лежащие в разных строках и разных столбцах доски.

Замечание. Есть много различных примеров размещения 5 квартетов на доске 5 на 5. Можно доказать, что для любой выборки пяти клеток, находящихся в разных строках и разных столбцах, существует размещение пяти непересекающихся квартетов, занимающих все остальные клетки доски.

Критерии оценивания. (●) Доказано, что разместить можно не более 5 квартетов: 4 балла. (●) Приведён пример размещения 5 квартетов: 3 балла.

11.2. а) Найти все значения параметра a, при которых разрешима система уравнений $x+y^2+z^2=a, x^2+y+z^2=a, x^2+y^2+z=a$. б) Решить систему при каждом из этих a.

Ответ. Условием разрешимости системы будет неравенство $a\ge -\frac{1}{8}$**.** При этом количество решений будет следующим:

1) При $a=-\frac{1}{8}$ решение единственно: $x=y=z=-\frac{1}{4}$

2) При $-\frac{1}{8}\le a<\frac{7}{8}$ решения будет два $x=y=z=\frac{-1\pm\sqrt{1+8a}}{4}$.

3) При $a=\frac{7}{8}$ решений будет пять: $x=y=z=\frac{-1\pm\sqrt{8}}{4}$ и $x=\frac{1}{4}, y=\frac{3}{4}, z=\frac{1}{4}$, $x=\frac{3}{4}, y=\frac{1}{4}, z=\frac{1}{4}$ и $x=\frac{1}{4}, y=\frac{1}{4}, z=\frac{3}{4}$.

4) При $a\ge\frac{7}{8}$ и $a\ne 1$ будут восемь решений: $x=y=z=\frac{-1\pm\sqrt{1+8a}}{4}$ и

$(\frac{1\pm\sqrt{8a-7}}{4}, \frac{3\mp\sqrt{8a-7}}{4}, \frac{1\pm\sqrt{8a-7}}{4})$, $(\frac{1\pm\sqrt{8a-7}}{4}, \frac{1\pm\sqrt{8a-7}}{4}, \frac{3\mp\sqrt{8a-7}}{4})$ и

$(\frac{3\mp\sqrt{8a-7}}{4},\frac{1\pm\sqrt{8a-7}}{4},\frac{1\pm\sqrt{8a-7}}{4})$ с согласованным выбором знаков + и – в каждом случае.

5) При $a=1$ будет пять решений $(-1,-1,-1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}),(0,1,0),(0,0,1),(1,0,0)$.

Решение. Приведём сначала решение только пункта а), не приводящее к решению пункта б). Сложим все уравнения системы и представим результат как сумму значений квадратичной функции $f(t)=2t^2+t$ при $t=x$, $t=y$ и $t=z$ соответственно: $2x^2+x+2y^2+y+2z^2+z=3a$. Минимум функции $f(t)=2t^2+t$ достигается при $t_0=-\frac{1}{4}$ и равен $t_0=-\frac{1}{8}$, поэтому неравенство $a\ge-\frac{1}{8}$ является необходимым условием разрешимости системы. С другой стороны, если $a\ge-\frac{1}{8}$, то уравнение $2t^2+t=a$ имеет хотя бы одно решение t_1, тогда тройка (t_1,t_1,t_1) будет решением системы.

Критерии оценивания данного решения пункта а). (●) Получено необходимое условие $a\ge-\frac{1}{8}$: 2 балла. (●) Доказана достаточность этого условия: 1 балл.

Теперь приведём полное решение задачи. Вычтем первое уравнение системы из второго, получим $x^2-x+y-y^2=0\Leftrightarrow(x-y)(x+y-1)=0$, откуда либо $x=y$, либо $x=1-y$. Аналогично, вычитая второе уравнение из третьего, получим либо $y=z$, либо $y=1-z$, а, вычитая третье уравнение из первого, что либо $z=x$, либо $z=1-x$. Для каждой из трёх пар переменный выполнено равенство одного их двух типов, значит в двух парах типы равенств совпадают. Если это два равенства первого типа, то все переменные равны и являются одним из решений уравнения $2t^2+t=a$ с корнями $t_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8a}}{4}$. Необходимым и достаточным условием существования решения системы в данном случае является неотрицательность дискриминанта полученного квадратного уравнения, то есть условие $a\ge-\frac{1}{8}$.

Если общими являются два равенства второго типа, например, $x=1-y$ и $y=1-z$, то $y=1-x$ и $z=1-y=x$, подставляем в систему: $x+(1-x)^2+x^2=a\Leftrightarrow 2x^2-x+1-a=0$. Тогда $x=\frac{1\pm\sqrt{1-8+8a}}{4}=\frac{1\pm\sqrt{8a-7}}{4}$, условием разрешимости системы в данном случае является неравенство $a\ge\frac{7}{8}$, которое сильнее первого неравенства $a\ge-\frac{1}{8}$. Следовательно, условием разрешимости всей системы, то есть существования хоть одного решения, является более слабое из этих неравенств, то есть $a\ge-\frac{1}{8}$. Второе неравенство даёт при $a\ge\frac{7}{8}$ серии решений с несовпадающими значениями переменных, которых не может быть при $-\frac{1}{8}\le a<\frac{7}{8}$. С учётом того, что равными в этом случае можно считать любую из трёх пар переменных, мы получим здесь три пары решений $(\frac{1\pm\sqrt{8a-7}}{4},\frac{3\mp\sqrt{8a-7}}{4},\frac{1\pm\sqrt{8a-7}}{4})$, $(\frac{1\pm\sqrt{8a-7}}{4},\frac{1\pm\sqrt{8a-7}}{4},\frac{3\mp\sqrt{8a-7}}{4})$ и

$(\frac{3\mp\sqrt{8a-7}}{4},\frac{1\pm\sqrt{8a-7}}{4},\frac{1\pm\sqrt{8a-7}}{4})$ с согласованным выбором знаков + и – в каждом случае, назовём их *плюсовыми* и *минусовыми* решениями соответственно..
Однако есть ещё одна тонкость, шесть последних решений очевидно отличаются от двух ранее найденных, если в них не все переменные равны. Проверим, всегда ли это так.

а) В сериях со знаком «плюс» $\frac{1+\sqrt{8a-7}}{4}=\frac{3-\sqrt{8a-7}}{4}\Leftrightarrow\sqrt{8a-7}=1\Leftrightarrow a=1$. Тогда сами эти решения равны $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ (вся серия из трёх плюсовых решений склеилась в одно) и $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,0)$ (3 минусовых решения). В первых двух сериях с равными переменными при $a=1$ получим решения $(-1,-1,-1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, второе из которых уже есть в плюсовой серии.

б) В сериях со знаком «минус» $\frac{1-\sqrt{8a-7}}{4}=\frac{3+\sqrt{8a-7}}{4}\Leftrightarrow\sqrt{8a-7}=-1$, что невозможно, поэтому минусовые серии не склеиваются между собой и отличны от первых двух серий..

Следовательно, при $a=1$ получим пять решений $(-1,-1,-1),(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,0,0)$.

И в последнем случае, когда $a=\frac{7}{8}$, решений будет пять: $x=y=z=\frac{-1\pm\sqrt{8}}{4}$ и $x=\frac{1}{4},y=\frac{3}{4},z=\frac{1}{4}$, $x=\frac{3}{4},y=\frac{1}{4},z=\frac{1}{4}$ и $x=\frac{1}{4},y=\frac{1}{4},z=\frac{3}{4}$ - каждая из трёх пар плюсовых и минусовых решений склеится в одно.

Критерии оценивания. (●) Доказано, что необходимое условие разрешимости $a\geq-\frac{1}{8}$: 2 балла. (●) Найдены только первые две серии решений с равными переменными: 1 балл. (●) Найдены шесть серий решений с неравными переменными: 2 балла. (●) Показано, что других решений нет: 1 балл.(●) Доказано, что в исключительном случае $a=1$ часть решений склеиваются и получается всего пять решений: 1 балл. (●) Не разобран отдельно случай $a=\frac{7}{8}$: снимаем 1 балл.

11.3. Окружность с центром O на стороне AD параллелограмма ABCD проходит через его вершины A, B и C. Прямые AD, CD и BO снова пересекают окружность в точках K, M, N соответственно. Докажите, что длины отрезков NK, NM и ND равны между собой.

Доказательство. Параллельные прямые AK и BC высекают на окружности равные дуги, поэтому CD=AB=CK, следовательно треугольник CDK равнобедренный. Угол BCN опирается на диаметр BN окружности с центром O, поэтому является прямым. Значит, отрезок CN перпендикулярен BC и параллельному ему AK, следовательно CN является высотой из вершины C в равнобедренном треугольнике CDK, то есть серединным перпендикуляром к основанию DK. Тогда точка N равноудалена от D и K, поэтому NK= ND.

Равенство второй пары отрезков NM и ND доказывается аналогично, здесь угол BAN опирается на диаметр BN окружности с центром O, поэтому является прямым. Значит, отрезок AN перпендикулярен AB и параллельному ему CM, следовательно AN является высотой из вершины A в равнобедренном треугольнике AMD, то есть серединным перпендикуляром к отрезку MD, поэтому N равноудалена от D и M, поэтому NM= ND, что и завершает доказательство.

Критерии оценивания. (●) Доказано равенство только одной пары отрезков. скажем NK= ND: 5 баллов**.**

11.4. Найдите все тройки (a,b,c) натуральных чисел $a>b>c$ такие, что числа a^2+3b, b^2+3c, c^2+3a являются квадратами натуральных чисел.

Ответ. $a=37, b=25, c=17$.

Решение. Следующими после квадрата a^2 являются квадраты $(a+1)^2=a^2+2a+1$ и $(a+2)^2=a^2+4a+4>a^2+3a>a^2+3b$, поэтому a^2+3b должно совпадать с $(a+1)^2=a^2+2a+1$, откуда $3b=2a+1$. Аналогично, $3c=2b+1$. Из нечётности $2b+1$ следует нечётность c, тогда $c=2k+1, b=3k+1$. Из нечётности $2a+1$ следует нечётность $b=3k+1$, откуда уже следует чётность k. Тогда $k=2t, b=6t+1, c=4t+1, a=9t+1$. Подставляем эти выражения в c^2+3a, получаем, что $(4t+1)^2+3(9t+1)=16t^2+35t+4$ должно быть точным квадратом. Смотрим квадраты, следующие за $16t^2+16t+4=(4t+2)^2<16t^2+35t+4$, это будут $16t^2+24t+9=(4t+3)^2$, $16t^2+32t+16=(4t+4)^2$ и $16t^2+40t+25=(4t+5)^2$, что уже больше $16t^2+35t+4$. Следовательно, $16t^2+35t+4$ должно совпадать с $16t^2+24t+9=(4t+3)^2$ либо с $16t^2+32t+16=(4t+4)^2$. В первом случае $11t=5$, что невозможно, во втором случае получаем $t=4$, что даёт единственное решение задачи $a=37, b=25, c=17$.

Критерии оценивания. (●) Найдены с обоснованием соотношения $3b=2a+1$, $3c=2b+1$: по 1 баллу за каждое (●) Проведены рассуждения с чётностями/нечётностями чисел, получены соотношения $k=2t, b=6t+1, c=4t+1, a=9t+1$: 2 балла. **.** (●) Доказано, что $t=4$: 3 балла. (●) Каким-то образом только угадано решение $a=37, b=25, c=17$ с проверкой: 1 балл.

11.5. В бесконечный в две стороны ряд выставлены коробки, в одной из которых лежит единственный камень, а остальные пусты. Ещё есть очень большая куча камней. За один ход можно переложить в кучу камень из любой коробки *К*, в которой он есть, и положить из кучи по камню в две коробки, соседние с *К*. После некоторого ненулевого конечного числа таких ходов выяснилось, что в нескольких стоящих подряд n коробках оказалось по q камней в каждой, а остальные пусты. а) Докажите, что $q=1$. б) Найдите все возможные значения n.

Ответ. б) $n=5$**.**

Решение. А) Занумеруем все коробки по порядку слева направо целыми числами в естественном порядке. Считаем, что сначала единственный камень лежит в коробке с номером 1. В каждый момент времени будем рассматривать сумму S чисел камней в каждой из коробок с коэффициентом, который (1) равен 0, если номер коробки делится на 3, (2) равен 1, если остаток от деления номера коробки на 6 равен 1 или 2, (3) и равен –1, если этот остаток равен 4 или 5. То есть, знаки идут в таком порядке …0++0--… с периодом 6. Формально эта сумма содержит бесконечное количество слагаемых, однако ясно, что в каждый момент только конечное число из них отлично от нуля, поэтому данная сумма корректно определена. Заметим, что на каждом ходу эта сумма не меняется: если камень забирается из коробки с коэффициентом 0. то его исчезновение не замечается, а добавление по камню в две соседние коробки компенсируется их разными знаками. Если же камень забирается из коробки с ненулевым коэффициентом, то один из добавленных в соседние коробки камней компенсирует его пропажу, так как имеет тот же коэффициент, а второй – игнорируется. В начальный момент времени сумма S равна 1, а в момент, когда в нескольких стоящих подряд n коробках лежат по q камней в каждой, а в остальных камней нет, равна сумме нескольких слагаемых, каждое из которых равно $\pm q$ или 0, то есть делится на q. Следовательно, $q=1$.

Б) Докажем, что единственный ответ $n=5$. Вот как за 4 хода получаются пять идущих подряд единиц: $..0\bar{\bar{1}}0.. \to ..0\bar{\bar{1}}010.. \to .010\bar{\bar{1}}10. \to .010\bar{\bar{2}}010. \to .0111110.$

В данном пункте считаем для симметрии, что сначала единственный камень лежит в коробке с номером 0. Предположим, что после некоторой последовательности ходов получилось $n>1$ идущих подряд коробок, содержащих по одному камню каждая, а остальные пусты. Обозначим номер самой левой из этих коробок за a, а самой правой – за $b>a$, при этом $n=b-a+1$. За один ход общее количество камней в коробках увеличивается на один, следовательно, всего был сделан $n-1$ ход.

1) Сначала докажем, что все ходы были сделаны только в коробки с номерами из интервала от $a+1$ до $b-1$. Пусть самая левая коробка изо всех, в которые был сделан хотя бы один ход, имела номер k и в неё было сделано $p\ge 1$ ходов. Тогда коробка с номером $k-1$ в итоге будет содержать p камней, забрать которые можно было бы только ходами в эту коробку, но таковых у нас не было. Следовательно, $k-1\ge a$, то есть $k\ge a+1$. Аналогично, номер l самой правой коробки изо всех, в которые был сделан хоть один ход, удовлетворяет неравенству $l+1\le b$, то есть $l\le b-1$. Таким образом, мы доказали, что $n-1$ ходов были сделаны не более, чем в $n-2$ коробки. Учитывая, что в коробку с номером 1 был сделан самый первый ход, справедливы неравенства $a\le -1, b\ge 1$

2) Докажем, что в каждую из коробок с номерами от $a+1$ до $b-1$ был сделан хотя бы один ход. Действительно, рассмотрим самую левую коробку из этого интервала, в которую не было сделано ни одного хода, пусть она имеет номер $x\ge a+1$. Не умаляя общности, в силу симметрии можно считать, что $x\le -1$. Ввиду наличия камня в коробке a следует, что в коробку $a+1$ был сделан ход и $x\ge a+2$. Рассмотрим самый первый по номеру ход X, который был сделан в коробку с номером, меньшим x. Для этого в ней должен был уже содержаться хотя бы один камень, чего быть не могло, так как коробка с отрицательным номером не может содержать начальный камень, и камень не мог там появиться ранее, так как появиться он может только ходом в коробку с номером, не большим x. Последнее невозможно, так как в коробку x ходов не было вообще, а в коробки с меньшими номерами не было ходов, предшествующих X. Следовательно, в каждую из коробок с номерами от $a+1$ до 0 был сделан хотя бы один ход. Аналогично, в каждую из коробок с номерами от 2 до $b-1$ тоже был сделан хотя бы один ход. В коробку с номером 1 был сделан самый первый ход. Таким образом, мы показали, что во все, кроме одной, из $n-2$ коробок с номерами от $a+1$ до $b-1$ был сделан ровно один ход, а в одну из них – два хода. Если это не одна из крайних коробок с номерами $a+1$ до $b-1$. то в ней в результате ходов в соседние с ней коробки должно добавиться 2 камня и убавиться в результате ходов в неё 2 камня. В итоге в ней должно остаться 1 камень, значит это начальная коробка с номером 0. Если это одна из крайних коробок, то в ней должно убавиться 2 камня и добавиться всего один. Даже если бы это была коробка с номером 1, то в результате в ней не оказалось бы камней – противоречие. Следовательно, два хода были сделаны в начальную коробку с номером 0.

3. Теперь посмотрим на три самых левых коробки с номерами $a, a+1, a+2$, где в итоге окажется по 1 камню. Если $a\le -3$, то в коробки с номерами $a+1, a+2$ были сделаны по одному ходу, значит в коробке номером $a+1$ в итоге останутся 0 камней, что противоречит условию. Следовательно, $a\ge -2$. Аналогично, $b\le 2$, а $n\le 5$, и всего было сделано не более 4 ходов. Окончание решения делается перебором тех расположений камней, которые можно получить из исходного за не более, чем 4 хода. С точностью до симметрии, за два хода можно получить только одно

расположение $..0\overset{=}{1}0.. \to ..0\overset{=}{1}010.. \to .010110$. Из него можно получить за один ход три расположения 0101110,011020,0102010, а из них за один ход расположения 01011110,0110210,0102020,01012010,0102020,020120,01111010,01012010,0111110 с точностью до симметрии. Среди них только одно расположение пяти камней в ряд отвечает условию задачи. Следовательно, ответом является единственное значение $n=5$.

Критерии оценивания. (●) Пункт а): 2 балла. (●) Указан пример для $n=5$: 1 балл. (●) Доказано, что все ходы были сделаны только в коробки с номерами из интервала от $a+1$ до $b-1$: 1 балл . (●) Доказано, что в каждую из коробок с номерами от $a+1$ до $b-1$ был сделан хотя бы один ход. 1 балл. (●) Доказано, что $a \geq -2$.и $b \leq 2$, а $n \leq 5$: 1 балл. (●) Доказано, что за не более, чем 4 хода можно получить единственный ответ $n=5$: 1 балл.