

Генеральный партнер олимпиады — Сбербанк — приветствует участников! Сбер сегодня — это команда единомышленников, которые разрабатывают новые крутые технологии, чтобы сделать жизнь ярче и интереснее. Для нас твоё участие в состязаниях по профилю «Математика» означает, что ты не боишься принимать сложные вызовы, готов браться за сложные задачи и обладаешь великим даром доказательства недоказуемого :). Верим в тебя, искреннее желаем удачи на заключительном этапе!



Время выполнения заданий — 240 минут.

Баллы за верные обоснованные решения каждой задачи указаны в скобках. Максимальный балл за всю работу равен 100.

Задача 11.1. (15 баллов) Можно ли число 2024 представить в виде $a^5 + b^3$, где a и b — натуральные числа?

Задача 11.2. (15 баллов) В некотором числе 10 единиц, 100 двоек, 1000 троек, ..., 10^9 девяток, расположенных в некотором порядке. Каждую секунду в нём стирают последнюю цифру. Правда ли, что в какой-то момент после начального получится число, делящееся на 9?

Задача 11.3. (15 баллов) В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, в котором $AB = BC = CD$. Его диагонали AC и BD пересекаются в точке E . Описанная окружность треугольника ADE пересекает сторону AB в точке $P \neq A$ и продолжение стороны CD в точке $Q \neq D$. Докажите, что отрезки AP и DQ равны.

Задача 11.4. (15 баллов) Есть $4n$ отрезков длины x_1, x_2, \dots, x_{4n} , где $x_1 = 1, x_2 = 2$, а при $k > 2$ выполнено $x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$. Сколькими способами эти отрезки можно разбить на четвёрки так, чтобы из отрезков каждой четвёрки можно было составить четырёхугольник?

Задача 11.5. (20 баллов) Деревни некоторой языческой страны соединены дорогами так, что от любой деревни можно добраться до любой другой не проходя ни через какую деревню дважды, причём сделать это можно единственным способом. В каждой деревне живет свое племя туземцев. Каждое племя поклоняется одному из трёх идолов: Камню, Ножницам или Бумаге. Известно, что Камень сильнее Ножниц, Ножницы сильнее Бумаги, а Бумага сильнее Камня. Каждое племя желает, чтобы их идол был не слабее, чем идол любого из соседствующих с ними племен. С этой целью каждый вечер ровно в 20:24 каждое племя смотрит на своих соседей и, если обнаруживает соседа с более сильным идолом, меняет свои верования, начиная поклоняться этому более сильному идолу. Верно ли, что рано или поздно все племена начнут верить в одного и того же идола?

Задача 11.6. (20 баллов) Сфера касается всех рёбер пирамиды, в основании которой лежит выпуклый 2024-угольник. Покрасим в шахматном порядке углы между последовательными рёбрами при вершине вне многоугольника в синий и красный цвета. Докажите, что произведение синусов половинок синих углов равно произведению синусов половинок красных.