Математика. 2 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

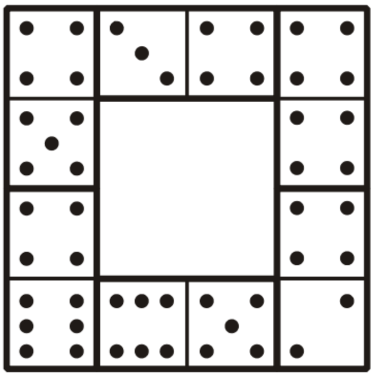
1. Уберите из символов ниже ровно одну цифру так, чтобы из оставшихся цифр и символов можно было составить три верных равенства. В каждом равенстве обязательно должны быть арифметические действия.

$$1\ 1\ 3\ 4\ 5\ 5\ 6\ 6\ 7\ 8\ +\ +\ \times\ =\ =\ =$$

Запишите эти равенства и цифру, которую убрали.

Пример. Из символов «$0\ 1\ 1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 7\ 7\ 9\ +\ +\ \times = = =$» можно убрать 0 и составить три равенства: $2 + 7 = 9$; $3 + 4 = 7$; $1 \times 1 = 1$.

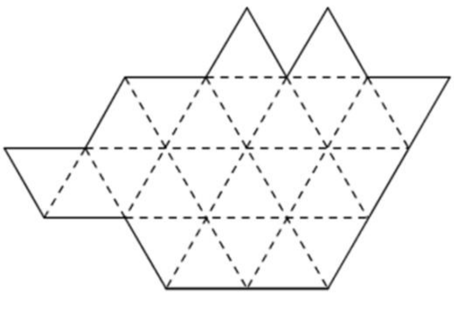
2. Переставьте кости домино на рисунке так, чтобы сумма точек на каждой стороне квадрата равнялась 17.



3. Вдоль беговой дорожки стоят красные и синие флажки. Флажков каждого цвета поровну. Лёня и Петя встретились у некоторого красного флажка, пошли в противоположные стороны и дошли до концов дорожки. Они считали количество флажков каждого цвета, начиная с красного, у которого встретились. Петя насчитал 10 красных и 5 синих. Лёня насчитал 7 красных и несколько синих. Сколько синих флажков насчитал Лёня?

4. В девяти мешках лежат соответственно $1, 3, 6, 2, 4, 8, 9, 5$ и 7 орехов. Бельчонок за одно действие может взять равное количество орехов из двух разных мешков и переложить их в другой мешок. Сможет ли бельчонок собрать все орехи в один мешок меньше чем за 7 действий?

5. Разрежьте фигуру снизу на 6 равных фигур по линиям сетки. *Не забудьте, что фигуру необходимо перерисовать и показать разрезание в бланке ответов.*



Математика. 2 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

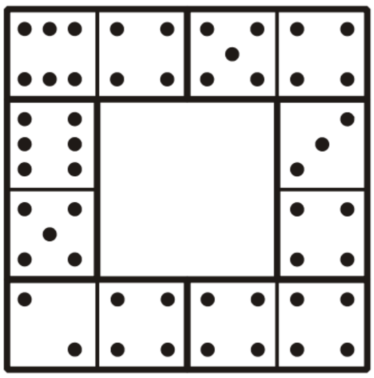
1. Уберите из символов ниже ровно одну цифру так, чтобы из оставшихся цифр и символов можно было составить три верных равенства. В каждом равенстве обязательно должны быть арифметические действия.

$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 7\ 7\ 9\ +\ +\ \times = = =$$

Запишите эти равенства и цифру, которую убрали.

Пример. Из символов «$0\ 1\ 1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 7\ 7\ 9\ +\ +\ \times = = =$» можно убрать 0 и составить три равенства: $2 + 7 = 9$; $3 + 4 = 7$; $1 \times 1 = 1$.

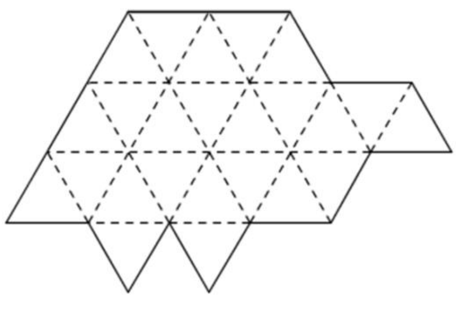
2. Переставьте кости домино на рисунке так, чтобы сумма точек на каждой стороне квадрата равнялась 17.



3. Вдоль беговой дорожки стоят красные и синие флажки. Флажков каждого цвета поровну. Митя и Рома встретились у некоторого красного флажка, пошли в противоположные стороны и дошли до концов дорожки. Они считали количество флажков каждого цвета, начиная с красного, у которого встретились. Рома насчитал 12 красных и 7 синих. Митя насчитал 9 красных и несколько синих. Сколько синих флажков насчитал Митя?

4. В девяти мешках лежат соответственно $8, 2, 9, 3, 1, 6, 4, 7$ и 5 орехов. Бельчонок за одно действие может взять равное количество орехов из двух разных мешков и переложить их в другой мешок. Бельчонок хочет собрать все орехи в один мешок. Сможет ли бельчонок собрать все орехи в один мешок меньше чем за 7 действий?

5. Разрежьте фигуру снизу на 6 равных фигур по линиям сетки. *Не забудьте, что фигуру необходимо перерисовать и показать разрезание в бланке ответов.*



Математика. 2 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

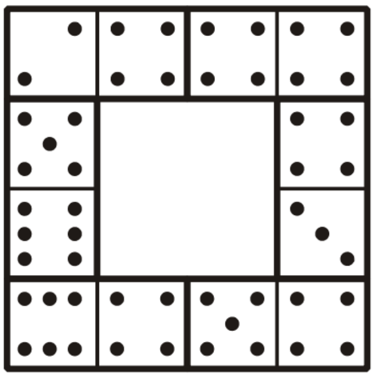
Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Уберите из символов ниже ровно одну цифру так, чтобы из оставшихся цифр и символов можно было составить три верных равенства. В каждом равенстве обязательно должны быть арифметические действия.

$$1\ 1\ 1\ 2\ 4\ 4\ 5\ 6\ 8\ 9\ +\ \times\ \times\ =\ =\ =$$

Запишите эти равенства и цифру, которую убрали.
Пример. Из символов «$0\ 1\ 1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 7\ 7\ 9\ +\ +\ \times = = =$» можно убрать 0 и составить три равенства: $2 + 7 = 9$; $3 + 4 = 7$; $1 \times 1 = 1$.

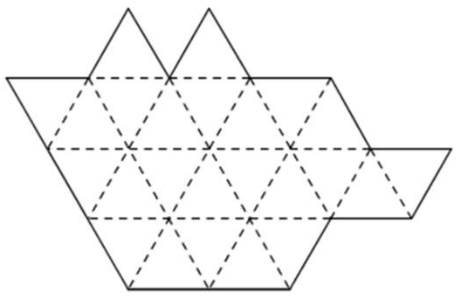
2. Переставьте кости домино на рисунке так, чтобы сумма точек на каждой стороне квадрата равнялась 17.



3. Вдоль беговой дорожки стоят красные и синие флажки. Флажков каждого цвета поровну. Саша и Федя встретились у некоторого красного флажка, пошли в противоположные стороны и дошли до концов дорожки. Они считали количество флажков каждого цвета, начиная с красного, у которого встретились. Федя насчитал 13 красных и 8 синих. Саша насчитал 10 красных и несколько синих. Сколько синих флажков насчитал Саша?

4. В девяти мешках лежат соответственно 5, 3, 9, 7, 2, 4, 1, 8 и 6 орехов. Бельчонок за одно действие может взять равное количество орехов из двух разных мешков и переложить их в другой мешок. Бельчонок хочет собрать все орехи в один мешок. Сможет ли бельчонок собрать все орехи в один мешок меньше чем за 7 действий?

5. Разрежьте фигуру снизу на 6 равных фигур по линиям сетки. *Не забудьте, что фигуру необходимо перерисовать и показать разрезание в бланке ответов.*



Математика. 3 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. 17 бельчат собирали грибы. Несколько бельчат нашли по одному грибу, трое нашли по 4 гриба, половина оставшихся нашла по 2 гриба, остальные ничего не нашли. Сколько всего грибов нашли бельчата?

2. У Деда Мороза в мешке много фруктовых, шоколадных и карамельных конфет. Дед Мороз даёт каждой девочке в хороводе по 2 конфеты. Он не глядя запускает руку в мешок и вынимает пригоршню конфет. Какое наименьшее число конфет ему надо достать, чтобы он наверняка мог дать Соне и Маше одинаковые наборы конфет (например, каждой карамельную и шоколадную, или каждой две фруктовых конфеты)?

3. Среди команд 3А, 3Б, 3В, 3Г, 3Д провели конкурс. Команды заняли места с 1-го по 5-е. Настя сказала: «Я думаю, на 1 месте 3А, потом 3Б, затем 3В, на четвертом месте 3Г, на последнем 3Д, в общем, АБВГД». Лиза сказала: «А я думаю, что порядок от 1-го места к 5-му такой – БГДАВ». Одна из девочек правильно назвала три места, а вторая – два. В каком порядке могли занять места команды?

4. Летела стая птиц. Шестеро детей стали угадывать, сколько птиц в стае. 1) Меньше 25. 2) Больше 35. 3) Меньше 30. 4) Больше 30. 5) Меньше 35. 6) Больше 25. Из шести этих высказываний ровно два верных. Сколько птиц могло быть в стае? (Укажите все возможные варианты).

5. Расположите на плоскости 11 одинаковых квадратов без наложения так, что при **любой** раскраске 11 квадратов в 3 разных цвета, обязательно найдутся два соседних квадрата одного цвета. (*Замечание. Каждый квадрат красят в один цвет. Квадраты считаются соседними, если у них есть общий отрезок стороны.)*

Математика. 3 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. 26 бельчат собирали в одну кучу шишки. Несколько бельчат принесли по две шишки, половина оставшихся принесла по 4 шишки, остальные ничего не принесли. Сколько всего шишек принесли бельчата?

2. В ящике лежат носки трёх разных цветов: белые, розовые, голубые. Мама не глядя запускает руку в ящик и вынимает несколько носков для своих трёх дочек. Какое наименьшее число носков ей надо достать, чтобы среди них наверняка были три пары носков одинакового цвета? У разных девочек могут быть носки и одного цвета, и разного, но у каждой должно быть два носка одного цвета.

3. Среди команд 3А, 3Б, 3В, 3Г, 3Д провели конкурс. Команды заняли места с 1-го по 5-е. Миша сказал: «Я думаю, на 1 месте 3Д, потом 3Г, затем 3В, на четвертом месте 3Б, на последнем 3А, в общем, ДГВБА». Олег сказал: «А я думаю, что порядок от 1-го места к 5-му такой – ГБАДВ». Один из мальчиков правильно назвал три места, а второй – два. В каком порядке могли занять места команды?

4. Путешественник встретил в лесу 6 гномов, и спросил каждого, сколько тут живет гномов. Первый ответил: «меньше 15». Второй: «больше 15». Третий: «меньше 30». Четвёртый: «больше 30». Пятый: «меньше 50». Шестой: «Больше 50». Из шести этих высказываний ровно два верных. Сколько гномов может жить в лесу? (Укажите все возможные варианты).

5. Квадрат 4×4 разделён на 16 одинаковых клеток. Все клетки квадрата надо раскрасить в несколько цветов, причем в каждом квадрате 2×2 должны быть хотя бы две клетки одного цвета. В какое наибольшее число разных цветов можно раскрасить клетки? *В ответе напишите это число и покажите на рисунке, как надо раскрасить клетки. Разные цвета обозначайте числами:* $1, 2, \ldots$.

Математика. 3 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. 15 детей катались на лыжах. Один упал 3 раза, несколько детей упали по 2 раза, половина оставшихся упала по 4 раза, остальные ни разу. Сколько всего было падений?

2. В пакете лежат детали конструктора, одинаковые по форме, но трёх разных цветов: белые, красные, синие, каждых по 10 штук. Артём не глядя запускает руку в пакет и вынимает несколько деталей. Какое наименьшее число деталей ему надо достать, чтобы среди них наверняка были две пары деталей одинакового цвета, например, 4 красные или 2 белые и 2 синие?

3. Среди команд 3А, 3Б, 3В, 3Г, 3Д провели конкурс. Команды заняли места с 1-го по 5-е. Таня сказала: «Я думаю, на 1 месте 3В, потом 3Б, затем 3А, на четвертом месте 3Г, на последнем 3Д, в общем, ВБАГД». Маша сказала: «А я думаю, что порядок от 1-го места к 5-му такой – БГДВА». Одна из девочек правильно назвала три места, а вторая – два. В каком порядке могли занять места команды?

4. Шестеро бельчат увидели кучу шишек. Первый сказал: «шишек в куче больше 40». Второй сказал: «тут меньше 20 шишек». Третий: «меньше 45». Четвёртый: «больше 20». Пятый: «меньше 40». Шестой: «больше 45». Из шести этих высказываний ровно два верных. Сколько шишек могло быть в куче? (Укажите все возможные варианты).

5. Квадрат 8×8 разделён на 64 одинаковые клетки. Все клетки квадрата надо раскрасить в несколько цветов, так, чтобы каждая клетка граничила по сторонам хотя бы с двумя клетками одного цвета. В какое наибольшее число разных цветов можно раскрасить клетки? *В ответе напишите это число и покажите на рисунке, как надо раскрасить клетки. Разные цвета обозначайте числами:* $1, 2, \dots$.

Математика. 4 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Найдите наибольшее натуральное число, которое составлено из цифр 2, 3, 4, 5, 7, 8, 0 и делится на 25. Цифры в записи числа не повторяются.

2. Вова поехал в школу на велосипеде со скоростью 12 км/ч. Когда он проехал треть пути, он понял, что так он успеет только к началу второго урока и поехал с удвоенной скоростью. Но когда Вова проехал $\frac{2}{3}$ всего пути, велосипед сломался, и дальше ему пришлось пойти пешком. В итоге он пришел в школу ровно к началу второго урока. С какой скоростью Вова шел пешком?

3. Бельчонок сидит в клетке с номером 1. Он умеет перепрыгивать только в соседнюю по стороне клетку и хочет построить маршрут посещения клеток с номерами 2, 3, 4, 5, 6, 7 в порядке возрастания так, чтобы не оказаться в одной клетке более одного раза. Постройте бельчонку нужный маршрут.

	7	2		6		
		4				
		1				
		3		5		

4. В тетради записаны по одному разу все натуральные числа от 154 до 257. Затем к каждому числу прибавили его сумму цифр, и 104 полученных результата записали на доску. Сколько чётных чисел записано на доске?

5. В некотором уезде 100 жителей: купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. У каждого жителя глаза одного из четырёх цветов: карие, голубые, зелёные или серые. Сначала всех спросили «У вас карие глаза?» и получили 26 ответов «да». Затем всех спросили «У вас голубые глаза?» и получили 30 ответов «да». Затем всех спросили «У вас зелёные глаза?» и получили 35 ответов «да». Наконец, всех спросили «У вас серые глаза?» и получили 47 ответов «да». Сколько разбойников в уезде?

Математика. 4 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Найдите наибольшее натуральное число, которое составлено из цифр 2, 3, 4, 5, 7, 9, 0 и делится на 25. Цифры в записи числа не повторяются.

2. Вова поехал в школу на велосипеде со скоростью 15 км/ч. Когда он проехал треть пути, он понял, что так он успеет только к началу второго урока и поехал с удвоенной скоростью. Но когда Вова проехал $\frac{2}{3}$ всего пути, велосипед сломался, и дальше ему пришлось пойти пешком. В итоге он пришел в школу ровно к началу второго урока. С какой скоростью Вова шел пешком?

3. Бельчонок сидит в клетке с номером 1. Он умеет перепрыгивать только в соседнюю по стороне клетку и хочет построить маршрут посещения клеток с номерами 2, 3, 4, 5, 6, 7 в порядке возрастания так, чтобы не оказаться в одной клетке более одного раза. Постройте бельчонку нужный маршрут.

		5		3		
				1		
				4		
		6		2	7	

4. В тетради записаны по одному разу все натуральные числа от 164 до 267. Затем к каждому числу прибавили его сумму цифр, и 104 полученных результата записали на доску. Сколько чётных чисел записано на доске?

5. В некотором уезде 90 жителей: купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. У каждого жителя глаза одного из четырёх цветов: карие, голубые, зелёные или серые. Сначала всех спросили «У вас карие глаза?» и получили 26 ответов «да». Затем всех спросили «У вас голубые глаза?» и получили 30 ответов «да». Затем всех спросили «У вас зелёные глаза?» и получили 35 ответов «да». Наконец, всех спросили «У вас серые глаза?» и получили 47 ответов «да». Сколько разбойников в уезде?

Математика. 4 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Найдите наибольшее натуральное число, которое составлено из цифр 2, 3, 4, 5, 8, 9, 0 и делится на 25. Цифры в записи числа не повторяются.

2. Вова поехал в школу на велосипеде со скоростью 18 км/ч. Когда он проехал треть пути, он понял, что так он успеет только к началу второго урока и поехал с удвоенной скоростью. Но когда Вова проехал $\frac{2}{3}$ всего пути, велосипед сломался, и дальше ему пришлось пойти пешком. В итоге он пришел в школу ровно к началу второго урока. С какой скоростью Вова шел пешком?

3. Бельчонок сидит в клетке с номером 1. Он умеет перепрыгивать только в соседнюю по стороне клетку и хочет построить маршрут посещения клеток с номерами 2, 3, 4, 5, 6, 7 в порядке возрастания так, чтобы не оказаться в одной клетке более одного раза. Постройте бельчонку нужный маршрут.

		6		2	7	
				4		
				1		
		5		3		

4. В тетради записаны по одному разу все натуральные числа от 174 до 277. Затем к каждому числу прибавили его сумму цифр, и 104 полученных результата записали на доску. Сколько чётных чисел записано на доске?

5. В некотором уезде 100 жителей: купцы и разбойники. Купцы всегда говорят правду, а разбойники всегда лгут. У каждого жителя глаза одного из четырёх цветов: карие, голубые, зелёные или серые. Сначала всех спросили «У вас карие глаза?» и получили 30 ответов «да». Затем всех спросили «У вас голубые глаза?» и получили 35 ответов «да». Затем всех спросили «У вас зелёные глаза?» и получили 37 ответов «да». Наконец, всех спросили «У вас серые глаза?» и получили 42 ответа «да». Сколько разбойников в уезде?

Математика. 5 класс

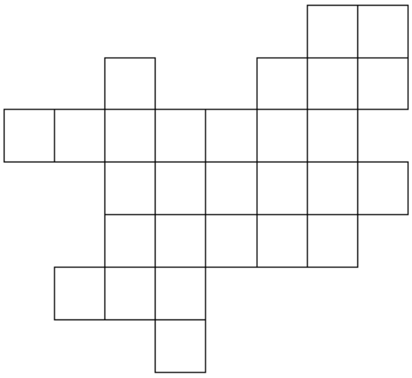
1 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Петя, Вася, Сережа и Миша катались с горки. Фамилия одного из мальчиков была Петров, другого Васильев, у остальных – Сергеев и Михайлов. Петя скатился с горки на два раза больше, чем Петров. Вася скатился с горки на два раза больше, чем Васильев, Сережа скатился с горки на два раза больше, чем Сергеев. Кто скатился с горки больше, и на сколько раз, Миша или Михайлов?

2. Фигура (см. рисунок) состоит из одинаковых квадратных клеток, плашка – прямоугольник 1×2, состоит из двух таких же клеток. Сколько плашек можно разместить в фигуре без наложения?



3. Запишите в каждую клетку одно из чисел 2, 3, 6, 7, 16, 73, а между клетками поставьте арифметические знаки. Расставьте, если потребуется, скобки, чтобы получилось верное равенство. Числа надо использовать все по разу, а из арифметических знаков $(+,\ -,\ \times,\ :)$ можно брать нужные сколько угодно раз.

$$\square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square = \boxed{677}$$

4. Аня, Боря и Ваня сосчитали, сколько у них карандашей.

Аня сказала: 1) У меня 8 карандашей. 2) У меня на 2 карандаша меньше, чем у Бори. 3) У меня на один карандаш больше, чем у Вани.

Боря сказал: 1) Число карандашей у Вани и меня отличается на 3. 2) Не у меня карандашей меньше всех. 3) У Вани 11 карандашей.

Ваня сказал: 1) У меня карандашей меньше, чем у Ани. 2) У Бори карандашей на 3 больше, чем у Ани. 3) У Ани 9 карандашей.

Каждый два раза сказал правду и один раз солгал. Сколько карандашей у каждого из них?

5. Бельчата Рыжик и Пух по очереди берут орехи из кучи. За один раз можно взять не больше половины оставшихся орехов. Орехи берут целиком, на части делить их нельзя. Тот, кто сможет взять последним, выиграет. Первым берет Рыжик. Кто из них может выиграть при любых действиях другого, если сначала в куче было 40 орехов? Напишите, как должен действовать победитель.

Математика. 5 класс

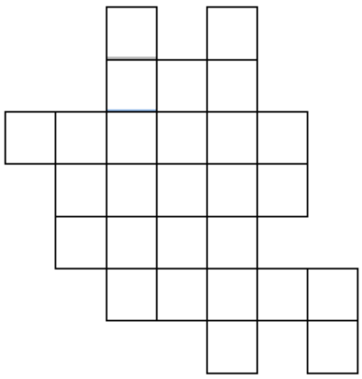
2 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. На арену цирка вышли четыре клоуна. Их звали Май, Бам, Зонг, Слон. На них были парики разного цвета – малиновый, белый, зелёный, синий. Каждый клоун кидал публике воздушные шарики. Май кинул на 2 шарика больше, чем клоун в малиновом парике. Бам кинул на 1 шарик больше, чем клоун в белом парике. Зонг кинул на 4 шарика больше, чем клоун в зелёном парике. Кто кинул больше шариков, и на сколько, Слон или клоун в синем парике?

2. Фигура (см. рисунок) состоит из одинаковых квадратных клеток, плашка – прямоугольник 1×2, состоит из двух таких же клеток. Сколько плашек можно разместить в фигуре без наложения?



3. Запишите в каждую клетку одно из чисел 3, 4, 4, 11, 13, 18, а между клетками поставьте арифметические знаки. Расставьте, если потребуется, скобки, чтобы получилось верное равенство. Числа надо использовать все по разу, а из арифметических знаков $(+,\ -,\ \times,\ :)$ можно брать нужные сколько угодно раз.

$\square\quad\square\quad\square\quad\square\quad\square\quad\square = \boxed{487}$

4. Галя, Дима и Женя сосчитали, сколько пятёрок по математике они получили за месяц.

Галя сказала: 1) У меня 7 пятёрок. 2) У меня на 4 пятёрки меньше, чем у Димы. 3) У меня на одну пятёрку больше, чем у Жени.

Дима сказал: 1) Число пятёрок у Жени и меня отличается на 5. 2) Не у меня пятёрок меньше всех. 3) У Жени 10 пятёрок.

Женя сказал: 1) У меня пятёрок меньше, чем у Гали. 2) У Димы пятёрок на 3 больше, чем у Гали. 3) У Гали 8 пятёрок.

Каждый два раза сказал правду и один раз солгал. Сколько пятёрок у каждого из них?

5. Бельчата Тоша и Кеша по очереди берут орехи из кучи. За один раз можно взять не больше половины оставшихся орехов. Орехи берут целиком, на части делить их нельзя. Тот, кто сможет взять последним, выиграет. Первым берет Тоша. Кто из них может выиграть при любых действиях другого, если сначала в куче было 50 орехов? Напишите, как должен действовать победитель.

Математика. 5 класс

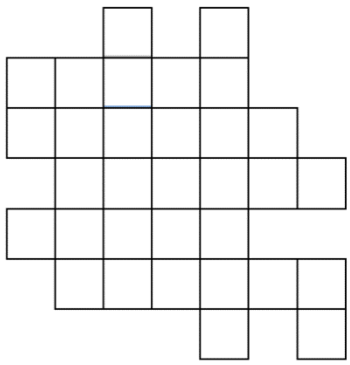
3 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Маша, Ира, Катя, Лена, Света делали соломенных куколок для школьной ярмарки. Фамилия одной из девочек была Матвеева, другой Иванова, у остальных – Кузнецова, Лапина и Соколова. Маша сделала на три куколки больше, чем Матвеева. Ира сделала на четыре куколки больше, чем Иванова. Катя сделала на одну куколку больше, чем Кузнецова. Света сделала на две куколки больше, чем Соколова. Кто сделал больше куколок, и на сколько, Лена или Лапина?

2. Фигура (см. рисунок) состоит из одинаковых квадратных клеток, плашка – прямоугольник 1×2, состоит из двух таких же клеток. Сколько плашек можно разместить в фигуре без наложения?



3. Запишите в каждую клетку одно из чисел $3,\ 6,\ 6,\ 12,\ 12,\ 100$, а между клетками поставьте арифметические знаки. Расставьте, если потребуется, скобки, чтобы получилось верное равенство. Числа надо использовать все по разу, а из арифметических знаков $(+,\ -,\ \times,\ :)$ можно брать нужные сколько угодно раз.

$$\square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square \quad \square = \boxed{309}$$

4. Три бельчонка, которых звали Ах, Бах и Вах, сосчитали найденные ими шишки.

Ах сказал: 1) У меня 6 шишек. 2) У меня на 2 шишки меньше, чем у Баха. 3) У меня на одну шишку больше, чем у Ваха.

Бах сказал: 1) Число шишек у Ваха и меня отличается на 3. 2) Не у меня шишек меньше всех. 3) У Ваха 10 шишек.

Вах сказал: 1) У меня шишек меньше, чем у Аха. 2) У Баха на три шишки больше, чем у Аха. 3) У Аха 8 шишек.

Каждый два раза сказал правду и один раз солгал. Сколько шишек у каждого бельчонка?

5. За один ход число, написанное на доске, заменяют на меньшее натуральное число, которое не меньше половины имеющегося числа. Например, если написано число 47, то можно заменить его на любое число от 24 до 46 включительно, а если записано число 42, то можно заменить его на любое число от 21 до 41 включительно. Старое число стирают. Вася и Петя делают ходы по очереди, начинает Вася. и записывает число 60. Тот, кто сможет сделать ход последним, выиграет. Кто из них может выиграть при любых действиях другого? Напишите, как должен действовать победитель.

Математика. 6 класс

1 вариант

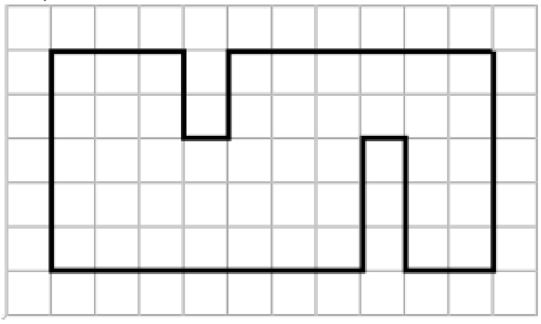
Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Бельчата Сёма и Юра побежали на день рождения к своему другу Тимоше. Тимоша позвал их к $12:00$, но бельчата перепутали. Сёма прибежал, когда до $14:00$ оставалось вдвое меньше, чем прошло после $12:00$. А Юра – когда до $14:00$ оставалось вдвое больше, чем прошло после $13:00$. Кто из бельчат пришел на день рождения раньше?

2. Лена загадала двузначное число, и сообщила своей подруге Маше, что это число делится на 2, 3, 5, 10 и 15. Однако Маша узнала, что из этих пяти утверждений ровно два неверны. Какие числа могла загадать Лена?

3. Разрежьте фигуру по линиям сетки на девять различных частей, состоящих из 5 клеток (части равны, если при наложении совпадают, их можно поворачивать и переворачивать).



4. В лесу живут бельчата в разноцветных шапочках. Однажды 100 бельчат встали в круг. Оказалось, что каждый бельчонок стоит рядом хотя бы с одним бельчонком в шапочке того же цвета. При этом 58 бельчат стоят между двумя бельчатами в шапочках того же цвета. Какое наибольшее количество бельчат в красных шапочках могли иметь соседа не в красной шапочке?

5. Однажды за большим круглым столом собрались 80 жителей уезда. Каждый из них либо купец, либо разбойник, либо торговец. Купцы всегда говорят правду, разбойники всегда лгут. Торговец говорит правду, если слева от него сидит разбойник; ложь, если слева от него сидит купец; все, что угодно, если слева от него торговец. Каждый сказал: «Справа от меня сидит разбойник». Сколько всего разбойников?

Математика. 6 класс

2 вариант

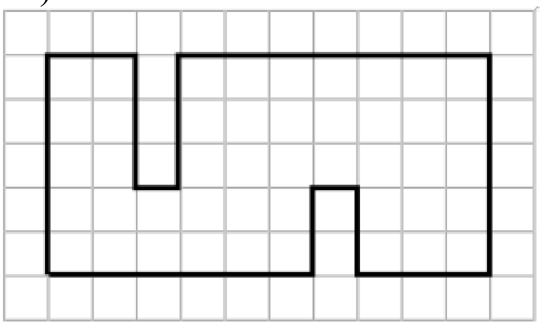
Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Бельчата Миша и Саша побежали на день рождения к своему другу Тимоше. Тимоша позвал их к $13:00$, но бельчата перепутали. Миша прибежал, когда до $15:00$ оставалось вдвое меньше, чем прошло после $13:00$. А Саша – когда до $15:00$ оставалось вдвое больше, чем прошло после $14:00$. Кто из бельчат пришел на день рождения раньше?

2. Катя загадала двузначное число, и сообщила своей подруге Насте, что это число делится на 2, 3, 4, 5 и 6. Однако Настя узнала, что из этих пяти утверждений ровно два неверны. Какие числа могла загадать Катя?

3. Разрежьте фигуру по линиям сетки на девять различных частей, состоящих из 5 клеток (части равны, если при наложении совпадают, их можно поворачивать и переворачивать).



4. В лесу живут бельчата в разноцветных шапочках. Однажды 95 бельчат встали в круг. Оказалось, что каждый бельчонок стоит рядом хотя бы с одним бельчонком в шапочке того же цвета. При этом 49 бельчат стоят между двумя бельчатами в шапочках того же цвета. Какое наибольшее количество бельчат в красных шапочках могли иметь соседа не в красной шапочке?

5. Однажды за большим круглым столом собрались 100 жителей уезда. Каждый из них либо купец, либо разбойник, либо торговец. Купцы всегда говорят правду, разбойники всегда лгут. Торговец говорит правду, если слева от него сидит разбойник; ложь, если слева от него сидит купец; все, что угодно, если слева от него торговец. Каждый сказал: «Справа от меня сидит разбойник». Сколько всего разбойников?

Математика. 6 класс

3 вариант

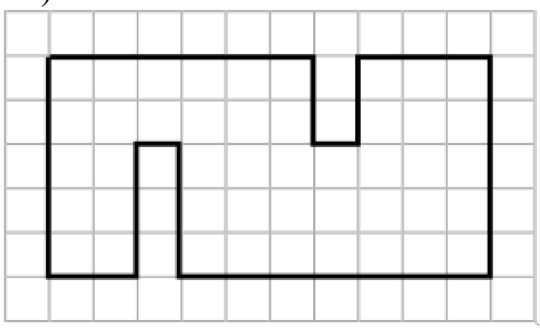
Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Бельчата Боря и Гена побежали на день рождения к своему другу Тимоше. Тимоша позвал их к $14:00$, но бельчата перепутали. Боря прибежал, когда до $16:00$ оставалось вдвое меньше, чем прошло после $14:00$. А Гена – когда до $16:00$ оставалось вдвое больше, чем прошло после $15:00$. Кто из бельчат пришел на день рождения раньше?

2. Даша загадала двузначное число, и сообщила своей подруге Оле, что это число делится на 2, 3, 5, 6 и 9. Однако Оля узнала, что из этих пяти утверждений ровно два неверны. Какие числа могла загадать Даша?

3. Разрежьте фигуру по линиям сетки на девять различных частей, состоящих из 5 клеток (части равны, если при наложении совпадают, их можно поворачивать и переворачивать).



4. В лесу живут бельчата в разноцветных шапочках. Однажды 105 бельчат встали в круг. Оказалось, что каждый бельчонок стоит рядом хотя бы с одним бельчонком в шапочке того же цвета. При этом 67 бельчат стоят между двумя бельчатами в шапочках того же цвета. Какое наибольшее количество бельчат в красных шапочках могли иметь соседа не в красной шапочке?

5. Однажды за большим круглым столом собрались 120 жителей уезда. Каждый из них либо купец, либо разбойник, либо торговец. Купцы всегда говорят правду, разбойники всегда лгут. Торговец говорит правду, если слева от него сидит разбойник; ложь, если слева от него сидит купец; все, что угодно, если слева от него торговец. Каждый сказал: «Справа от меня сидит разбойник». Сколько всего разбойников?

Математика. 7 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Кабина лифта вмещает или 15 гимнастов, или 12 борцов. Если в кабину зашли 8 борцов, сколько гимнастов может ещё зайти в кабину?

2. Артём, Боря и Саша красили забор. Если бы Боря выкрасил столько, сколько Артём и Саша вместе, они бы закончили в этот день. А так им осталось на завтра столько, сколько выкрасил Артём сегодня. Но всё-таки сегодня один из них выкрасил столько, сколько двое других вместе. Какую часть забора выкрасил каждый из них?

3. В равностороннем треугольнике ABC на стороне AB выбрали точку D, и из неё опустили перпендикуляр DE на сторону AC. На стороне AC выбрали точки M и N (M ближе к A) так, что $ME = EN$. Известно, что $BD = 4, AM = 1$. Найдите NC.

4. В деревне живёт несколько семей. У всех в каждой семье одинаковая фамилия, а в разных семьях фамилии разные. В каждой семье больше 3 человек. Для каждого жителя деревни есть 30 жителей, у которых другая фамилия. Например, для каждого Иванова или Ивановой есть 30 жителей, которые не Ивановы. Сколько разных фамилий может быть в этой деревне?

5. Лесные бельчата или честные (всегда говорят правду), или лжецы (всегда лгут). На поляне собрались 6 бельчат из одного леса и 6 бельчат из другого леса. Все бельчата из одного леса знают, кто из них лжец, а кто честный, а бельчата из разных лесов не знают друг про друга. Каждый бельчонок сказал про каждого из остальных одну фразу, то есть всего прозвучало $12 \cdot 11 = 132$ фразы. При этом каждый бельчонок каждый раз говорил одну из трёх фраз: 1) «Это честный бельчонок из нашего леса», 2) «Это лжец из нашего леса», 3) «Не знаю, кто он». Никакие два бельчонка не сказали друг про друга одинаковые фразы. Сколько раз могла прозвучать третья фраза?

Математика. 7 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. Бумажный пакет вмещает или 20 одинаковых яблок, или 16 одинаковых груш. Если в пакет положили 5 яблок, сколько груш можно ещё положить в пакет?

2. В роще живут серые и черные бельчата, $\frac{2}{5}$ всех бельчат черные, остальные серые. $\frac{1}{4}$ всех бельчат – путешественники (они любят далеко бегать). Доля путешественников среди чёрных бельчат в 2 раза превышает долю путешественников среди серых бельчат. Какая часть чёрных бельчат – путешественники?

3. В равностороннем треугольнике ABC на стороне AB выбрали точку D, и из неё опустили перпендикуляр DE на сторону AC. На стороне AC выбрали точки M и N (M ближе к A) так, что $ME = EN$. Известно, что $BD = 6, AM = 2$. Найдите NC.

4. 1 сентября школьники принесли в школу цветы, и составили из них общий букет. Среди цветов была хотя бы одна астра, и хотя бы один георгин, и для каждого цветка в букете было 10 цветков других видов (или одного другого вида). Например, для каждой астры в букете было 10 цветков, которые не являются астрами. Сколько цветков могло быть в букете?

5. Собрались однажды вместе 5 жителей одной деревни и 5 жителей другой деревни. Каждый житель или рыцарь (всегда говорит правду), или лжец (всегда лжёт). Все жители из одной деревни знают, кто из них лжец, а кто рыцарь, а жители из разных деревень не знают друг про друга. Каждый житель сказал про каждого из остальных одну фразу, то есть всего прозвучало $10 \cdot 9 = 90$ фраз. При этом каждый житель каждый раз говорил одну из трёх фраз: 1) «Это рыцарь из нашей деревни», 2) «Это лжец из нашей деревни», 3) «Не знаю, кто он». Никакие два жителя не сказали друг про друга одинаковые фразы. Сколько раз могла прозвучать третья фраза?

Математика. 7 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 120 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.

Напишите не только ответы, но и подробные объяснения, как эти ответы получены.

1. В библиотеку поступили книги «Маленький принц» и «Робинзон Крузо». Полка вмещает или 15 экземпляров книги «Робинзон Крузо», или 36 экземпляров книги «Маленький принц». Если на полку поставили 12 книг «Маленький принц», сколько книг «Робинзон Крузо» можно ещё туда поставить?

2. Среди бельчат, участвовавших в соревнованиях по прыжкам, $\frac{2}{7}$ были рыжими, остальные серыми. $\frac{1}{6}$ всех бельчат-прыгунов участвовала также в соревнованиях по бегу, назовём их «бегуны». Доля бегунов среди рыжих бельчат в 2 раза превышает долю бегунов среди серых бельчат. Какая часть рыжих бельчат – бегуны?

3. В равностороннем треугольнике ABC на стороне AB выбрали точку D, и из неё опустили перпендикуляр DE на сторону AC. На стороне AC выбрали точки M и N (M ближе к A) так, что $ME = EN$. Известно, что $BD = 10,\ AM = 3$. Найдите NC.

4. К празднику приготовили цветные шарики. Среди шариков был хотя бы один красный, и хотя бы один зелёный, и для каждого шарика было 15 шариков других цветов (или одного другого цвета). Например, для каждого красного шарика было 15 шариков, которые не красные. Сколько шариков могло быть?

5. Лесные гномы или честные (всегда говорят правду), или лжецы (всегда лгут). На поляне собрались 7 гномов из одного леса и 7 гномов из другого леса. Все гномы из одного леса знают, кто из них лжец, а кто честный, а гномы из разных лесов не знают друг про друга. Каждый гном сказал про каждого из остальных одну фразу, то есть всего прозвучало $14 \cdot 13 = 182$ фразы. При этом каждый гном каждый раз говорил одну из трёх фраз: 1) «Это честный гном из нашего леса», 2) «Это лжец из нашего леса», 3) «Не знаю, кто он». Никакие два гнома не сказали друг про друга одинаковые фразы. Сколько раз могла прозвучать третья фраза?

Математика. 8 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. На доске написаны числа $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14$. Вася стёр одно или несколько чисел так, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп с равной суммой. Найдите максимальное значение суммы чисел, которые остались на доске.

2. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), в котором проведена высота AH. Из точки M – середины стороны AB, опущен перпендикуляр MK на сторону AC. Найдите периметр треугольника, если известно, что $MK = AH$ и $AK = 10$.

3. Квадратная таблица размером 10×10 заполнена натуральными числами от 103 до 202. В каждой строке таблицы посчитали произведение чисел и получили набор $\{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$. Далее в каждом столбце также посчитали произведение чисел и получили набор $\{b_1, b_2, \dots, b_{10}\}$. Могут ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

4. В алфавите языка бельчат ровно 5 букв: А, Б, В, И, О, а в каждом слове ровно две гласные, они стоят не рядом, а согласных может быть сколько угодно, но не бывает тройки согласных подряд. Вождь бельчат повелел считать словами все строки букв, удовлетворяющих этим условиям, и выпустить полный словарь. Сколько в нём будет слов?

5. Натуральные числа x и y таковы, что $x^3 + y^3 + xy$ делится на $xy(x - y)$. Докажите, что наименьшее общее кратное чисел x и y является точным квадратом.

Математика. 8 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. На доске написаны числа $4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$. Петя стёр одно или несколько чисел так, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп с равной суммой. Найдите максимальное значение суммы чисел, которые остались на доске.

2. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), в котором проведена высота AH. Из точки M – середины стороны AB, опущен перпендикуляр MK на сторону AC. Найдите периметр треугольника, если известно, что $MK = AH$ и $AK = 12$.

3. Квадратная таблица размером 10×10 заполнена натуральными числами от 104 до 203. В каждой строке таблицы посчитали произведение чисел и получили набор $\{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$. Далее в каждом столбце также посчитали произведение чисел и получили набор $\{b_1, b_2, \dots, b_{10}\}$. Могут ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

4. В алфавите языка бельчат ровно 5 букв: Е, Г, Д, У, Ю, а в каждом слове ровно две гласные, они стоят не рядом, а согласных может быть сколько угодно, но не бывает тройки согласных подряд. Вождь бельчат повелел считать словами все строки букв, удовлетворяющих этим условиям, и выпустить полный словарь. Сколько в нём будет слов?

5. Целые числа k, m и n удовлетворяют равенству

$$(k-5)^2 + (m-12)^2 - (n-13)^2 = k^2 + m^2 - n^2.$$

Докажите, что обе части равенства являются точными квадратами.

Математика. 8 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. На доске написаны числа $7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17$. Саша стёр одно или несколько чисел так, что оставшиеся на доске числа нельзя разбить на несколько групп с равной суммой. Найдите максимальное значение суммы чисел, которые остались на доске.

2. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$), в котором проведена высота AH. Из точки M – середины стороны AB, опущен перпендикуляр MK на сторону AC. Найдите периметр треугольника, если известно, что $MK = AH$ и $AK = 14$.

3. Квадратная таблица размером 10×10 заполнена натуральными числами от 105 до 204. В каждой строке таблицы посчитали произведение чисел и получили набор $\{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$. Далее в каждом столбце также посчитали произведение чисел и получили набор $\{b_1, b_2, \dots, b_{10}\}$. Могут ли полученные наборы оказаться одинаковыми?

4. В алфавите языка бельчат ровно 5 букв: О, К, М, Е, Я, а в каждом слове ровно две гласные, они стоят не рядом, а согласных может быть сколько угодно, но не бывает тройки согласных подряд. Вождь бельчат повелел считать словами все строки букв, удовлетворяющих этим условиям, и выпустить полный словарь. Сколько в нём будет слов?

5. Целые числа k, m и n удовлетворяют равенству
$$(k+3)^2 + (m+4)^2 - (n+5)^2 = k^2 + m^2 - n^2.$$
Докажите, что обе части равенства являются точными квадратами.

Математика. 8 класс

4 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Две неубывающие последовательности неотрицательных целых чисел начинаются с разных чисел, и каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих. Десятые члены этих последовательностей совпадают. Найдите наименьшее возможное значение десятого члена.

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. На катете BC отмечены точки M и N так, что $\angle CAM = \angle MAN = \angle NAB$. Пусть E и F – точки пересечения прямой, проходящей через точку M и отрезков AN и AB соответственно. Найдите AB, если известно, что $AE = 10$, $\angle ANB = 130^\circ$ и $\angle BFM = 110^\circ$.

3. Вася придумал новую шахматную фигуру X, которая может бить фигуру, которая находится на растоянии 5 сантиметров от неё (расстояние между фигурами – это расстояние между центрами клеток, в которых находятся фигуры). Какое наибольшее количество не бьющих друг друга фигур X можно расставить на квадратной клетчатой доске 8×8 со стороной клетки, равной одному сантиметру?

4. На клетчатой доске 21×21 фишку двигали из одного угла в другой, делая ходы только вправо, вверх или право-вверх по диагонали. Ходов в каждом направлении было поровну. Найдите число возможных маршрутов, если известно, что фишку не могли двигать два хода подряд по диагонали.

5. Натуральные числа k, m и n таковы, что $(k - m)$ – простое число и $3n^2 = n(k + m) + km$. Докажите, что число $8n + 1$ является точным квадратом.

Математика. 9 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Для $x = \sqrt{7} + 1$ найдите значение выражения $x^5 - 5x^4 + 36x$.

2. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, $\angle ABD = \angle CBD$, $AB = BD = 5$, $BC = 9$. Найдите CD.

3. На ровной площадке сидят 8 бельчат, так, что каждому бельчонку видно ровно 6 бельчат. Все бельчата одинакового размера и могут смотреть во все стороны. Если бельчата сидят на одной прямой, то ближние бельчата заслоняют дальних, и бельчонок видит только ближайших к нему с обеих сторон. Нарисуйте, как могут сидеть бельчата (изображая их точками).

4. На плоскости поставили 70 точек так, что никакие три точки не лежат на одной прямой, и раскрасили их в 4 разных цвета. Все точки попарно соединили отрезками. Докажите, что найдется более 500 неравнобедренных треугольников, у которых вершины являются точками одного цвета.
Замечание. Равносторонний треугольник является равнобедренным.

5. Целое число n делится на 7 и может быть представлено в виде $n = 3a^2 + b^2$, где a, b – целые числа. Докажите, что существуют такие целые числа m и k, что $\frac{n}{7} = 3m^2 + k^2$.

Математика. 9 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Для $x = \sqrt{11} - 1$ найдите значение выражения $x^5 + 7x^4 + 100x$.

2. Внутри равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AB < CD = 10$ см, $BC = AD$) выбрана точка E, отстоящая от вершин A, B, C, D соответственно на $3, 4, 6, 5$ см. Найдите длину AB.

3. На ровной площадке сидят 6 бельчат, так, что каждому бельчонку видно ровно 4 бельчонка. Все бельчата одинакового размера и могут смотреть во все стороны. Если бельчата сидят на одной прямой, то ближние бельчата заслоняют дальних, и бельчонок видит только ближайших к нему с обеих сторон. Нарисуйте, как могут сидеть бельчата (изображая их точками).

4. На листе бумаги поставили 75 точек так, что никакие три точки не лежат на одной прямой, и раскрасили их в 4 разных цвета. Все точки попарно соединили отрезками. Докажите, что найдется более 620 неравнобедренных треугольников, у которых вершины являются точками одного цвета.
Замечание. Равносторонний треугольник является равнобедренным.

5. Целое число n делится на 19 и может быть представлено в виде $n = 3a^2 + b^2$, где a, b – целые числа. Докажите, что существуют такие целые числа m и k, что $\frac{n}{19} = 3m^2 + k^2$.

Математика. 9 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Для $x = \sqrt{6} + 1$ найдите значение выражения $2x^5 - 9x^4 + 50x$.

2. В треугольнике ABC точка D лежит на стороне AC, $\angle ABD = \angle CBD$, $AB = 5$, $BC = 16$. Докажите, что $BD < 9$.

3. На ровной площадке сидят 10 бельчат, так, что каждому бельчонку видно ровно 8 бельчат. Все бельчата одинакового размера и могут смотреть во все стороны. Если бельчата сидят на одной прямой, то ближние бельчата заслоняют дальних, и бельчонок видит только ближайших к нему с обеих сторон. Нарисуйте, как могут сидеть бельчата (изображая их точками).

4. На листе бумаги поставили 82 точки так, что никакие три точки не лежат на одной прямой, и раскрасили их в 4 разных цвета. Все точки попарно соединили отрезками. Докажите, что найдется более 900 неравнобедренных треугольников, у которых вершины являются точками одного цвета.
Замечание. Равносторонний треугольник является равнобедренным.

5. Целое число n делится на 67 и может быть представлено в виде $n = 3a^2 + b^2$, где a, b – целые числа. Докажите, что существуют такие целые числа m и k, что $\frac{n}{67} = 3m^2 + k^2$.

Математика. 9 класс

4 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Найдите значение выражения $S = (x^2 - 3x + 1)(2y^2 - 6y + 5)$, если известно, что $x^2 + y^2 = 8,\ x + y = 3$.

2. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ известно, что $\angle B = \angle C$, $\angle D = 90°$, $AB = 2CD$ Найдите угол между биссектрисой $\angle ACB$ и CD

3. Можно ли посадить на ровной площадке 8 бельчат так, что на каждом серединном перпендикуляре к отрезку, соединяющему двух бельчат, сидят не менее двух бельчат?

4. Записано 60 натуральных чисел, каждое из которых не больше 60. Сумма записанных чисел равна 120. Всегда ли можно разделить записанные числа на две группы с равной суммой?

5. Решите уравнение $(xy + 1)^2 = x^3 + y$ в натуральных числах.

Математика. 10 класс

1 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Последовательность задана условиями
$$a_1 = 20, \quad a_2 = 24, \quad a_n \cdot a_{n+2} = a_{n+1} + 1$$
при всех $n \geq 1$. Найдите a_{2024}.

2. На конкурсе сладкоежек 7 участников были награждены 20 одинаковыми пирожными и 2 одинаковыми тортами. Каждому досталась хотя бы одна сладость. Сколькими способами могли распределиться награды?

3. Положительные числа x, y, z таковы, что $xy + yz + xz = 5xyz$. Найдите наименьшее значение выражения $x + y + z$.

4. Дан равносторонний треугольник ABC, на сторонах AB и BC которого выбраны точки P и Q так, что $AP{:}PB = BQ{:}QC = 2{:}1$, K – точка пересечения отрезков AQ и CP. Найдите градусную меру угла AKB.

5. Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $4f(x + y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 12$.

Математика. 10 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 20, \quad a_2 = 25, \quad a_n \cdot a_{n+2} = a_{n+1} + 1$$

при всех $n \geq 1$. Найдите a_{2025}.

2. На конкурсе сладкоежек 8 участников были награждены 20 одинаковыми пирожными и 2 одинаковыми тортами. Каждому досталась хотя бы одна сладость. Сколькими способами могли распределиться награды?

3. Положительные числа x, y, z таковы, что $xy + yz + xz = 6xyz$. Найдите наименьшее значение выражения $(x+y)(y+z)(x+z)$.

4. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, на гипотенузе AB которого отмечены точки K и L, что $AK : KL : LB = 1 : 2 : \sqrt{3}$. Найдите градусную меру угла KCL.

5. Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $3f(x+y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 12$.

Математика. 10 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Последовательность задана условиями
$$a_1 = 20, \;\; a_2 = 26, \;\; a_n \cdot a_{n+2} = a_{n+1} + 1$$
при всех $n \geq 1$. Найдите a_{2024}.

2. На конкурсе сладкоежек 9 участников были награждены 20 одинаковыми пирожными и 2 одинаковыми тортами. Каждому досталась хотя бы одна сладость. Сколькими способами могли распределиться награды?

3. Положительные числа x, y, z таковы, что $x + y + z = 27xyz$. Найдите наименьшее значение выражения $(x + y)(y + z)(x + z)$.

4. Дан треугольник ABC, в котором $\angle A = 2\angle B$. Внутри этого треугольника выбрана точка P так, что $PA = PB$, $PC = AC$.

Найдите градусную меру угла CBP.

5. Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $5f(x + y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 10$.

Математика. 10 класс

4 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Последовательность чисел a_1, a_2, …, a_{2024} такова, что:
$a_1 = a_{2024}$ и $a_n + a_{n+1} - 1 = a_{n+1}^2$ при всех целых n от 1 до 2023.
Найдите a_{2000}.

2. Найдите количество строк из 6 натуральных чисел, произведение которых равно 6!

3. Для положительных чисел x, y, z и t найдите минимальное значение выражения

$$N = \left(x + \frac{1}{y}\right)^3 + \left(y + \frac{1}{z}\right)^3 + \left(z + \frac{1}{t}\right)^3 + \left(t + \frac{1}{x}\right)^3.$$

4. Пусть BC – наибольшая сторона в треугольнике ABC, в котором проведены высоты AA_1 и BB_1. Биссектриса $\angle C$ пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке L, высоту AA_1 в точке P, BB_1 – в точке Q. Найдите градусную меру угла ACB, если известно, что $AP = LQ$.

5. Существует ли функция f, заданная на множестве всех действительных чисел и принимающая действительные значения, и действительное число α, такие, что $f(\alpha) = -2$ и $f(f(x)) = xf(x) + 2x$ для любого действительного x?

Математика. 11 класс

1 вариант

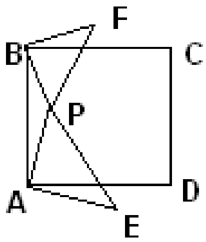
Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Если сегодня плохая погода, то завтра с вероятностью 1 будет хорошая погода. Если сегодня хорошая погода, то завтра хорошая погода будет с вероятностью 0,5. Какова вероятность, что 14 марта будет хорошая погода, если 10 марта плохая и хорошая погоды равновероятны? (Погода одинаковая весь день и может быть только плохой или хорошей).

2. Многочлен $P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 3$ имеет корни a, b, c, d. Многочлен $Q(x) = x^6 + 2x^5 - 4x^4 - 6x^3 + x^2 - 2x + 7$. Найдите $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d)$.

3. Сколько трёхзначных натуральных чисел нельзя представить в виде суммы двух палиндромов? *Палиндром – число, читающееся одинаково слева направо и справа налево. Однозначные числа* $0, 1, \ldots, 9$ *также считаются палиндромами. Многозначные палиндромы не могут начинаться с* 0.

4. Внутри квадрата $ABCD$ произвольно выбрана точка P, и построены равнобедренные прямоугольные треугольники PAE и PBF, $\angle PAE = \angle PBF = 90°$ (см. рисунок). Прямые ED и FC пересекаются в точке G. Докажите, что GP перпендикулярно AB.



5. Найдите множество всех целых значений суммы $\frac{x}{y} + \frac{y}{2} + \frac{2}{x}$, где x и y – произвольные натуральные числа.

Математика. 11 класс

2 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Если сегодня плохая погода, то завтра с вероятностью 1 будет хорошая погода. Если сегодня хорошая погода, то завтра хорошая погода будет с вероятностью 0,4. Какова вероятность, что 7 марта будет хорошая погода, если 3 марта плохая и хорошая погоды равновероятны? (Погода одинаковая весь день и может быть только плохой или хорошей).

2. Многочлен $P(x) = x^4 - x^3 - x^2 - 1$ имеет корни a, b, c, d. Многочлен $Q(x) = x^6 - x^5 - 2x^4 + x^3 + x^2 - x + 3$. Найдите $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d)$.

3. Сколько двузначных натуральных чисел нельзя представить в виде суммы двух палиндромов? *Палиндром – число, читающееся одинаково слева направо и справа налево. Однозначные числа* $0, 1, \ldots, 9$ *также считаются палиндромами. Многозначные палиндромы не могут начинаться с* 0.

4. Окружности w_1 и w_2 пересекаются в точках A и B. Прямая l расположена ближе к A, чем к B, и является общей касательной окружностей w_1 и $w_2,$ касаясь их соответственно в точках T и R. Через точку A проведена параллельно касательной l прямая, пересекающая w_1 в точке C, w_2 в точке D. Прямые TC и RD пересекаются в точке E, прямые TB и CD пересекаются в точке M; прямые RB и CD пересекаются в точке N. Докажите, что $TBRE$ вписанный четырехугольник.

5. Найдите множество всех целых значений суммы $\frac{x}{y} + \frac{y}{3} + \frac{3}{x}$, где x и y – произвольные натуральные числа.

Математика. 11 класс

3 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Если сегодня плохая погода, то завтра с вероятностью 1 будет хорошая погода. Если сегодня хорошая погода, то завтра хорошая погода будет с вероятностью 0,8. Какова вероятность, что 5 марта будет хорошая погода, если 1 марта плохая и хорошая погоды равновероятны? (Погода одинаковая весь день и может быть только плохой или хорошей).

2. Многочлен $P(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 1$ имеет корни $a, b, c, d.$ Многочлен $Q(x) = x^6 - 3x^5 + 2x^4 + 12x^3 - 6x^2 - 4.$ Найдите $Q(a) + Q(b) + Q(c) + Q(d).$

3. Сколько среди натуральных чисел от 50 до 250 включительно таких, которые нельзя представить в виде суммы двух палиндромов? *Палиндром – число, читающееся одинаково слева направо и справа налево. Однозначные числа* $0, 1, \dots, 9$ *также считаются палиндромами. Многозначные палиндромы не могут начинаться с* 0.

4. Окружности w_1 и w_2 пересекаются в точках A и B. Прямая l расположена ближе к A, чем к B, и является общей касательной окружностей w_1 и $w_2,$ касаясь их соответственно в точках T и R. Через точку A проведена параллельно касательной l прямая, пересекающая w_1 в точке C, w_2 в точке D. Прямые TC и RD пересекаются в точке E. Докажите, что BE – биссектриса угла CBD.

5. Найдите множество всех целых значений суммы $\frac{x}{y} + \frac{y}{5} + \frac{5}{x}$, где x и y – произвольные натуральные числа.

Математика. 11 класс

4 вариант

Работа рассчитана на 240 минут.
Максимальная оценка за каждую задачу – 20 баллов.
Все решения должны быть полными и обоснованными.

1. Три человека независимо задумали по одному целому числу от 1 до 9. Какова вероятность, что произведение этих трёх чисел делится на 10?

2. Известно, что числа a, b, c, $\frac{ab}{c}+\frac{ac}{b}+\frac{bc}{a}$ – целые. Обязательно ли являются целыми все три числа $\frac{ab}{c}, \frac{ac}{b}, \frac{bc}{a}$?

3. По кругу растёт шесть деревьев. Утром на каждом дереве сидел один бельчонок. Вечером опять на каждом дереве сидел один из тех же шести бельчат, но ни один бельчонок не сидел на том же самом дереве, и не сидел на дереве, которое было соседним с тем, которое он занимал утром. Сколькими способами это можно было сделать?

4. На окружности по часовой стрелке поставлены точки $A, B, C, D, E.$ Известно, что $AE = DE.$ Пересечение отрезков AC и BD обозначим P. На продолжении отрезка AB за точку A выбрали точку Q так, что $AQ = DP$. На продолжении отрезка CD за точку D выбрали точку R так, что $AP = DR$. Докажите, что прямые PE и QR перпендикулярны.

5. Найдите все пары (a, b) натуральных чисел, для которых

$$27ab + (1 - a + b)^3 = 0.$$