

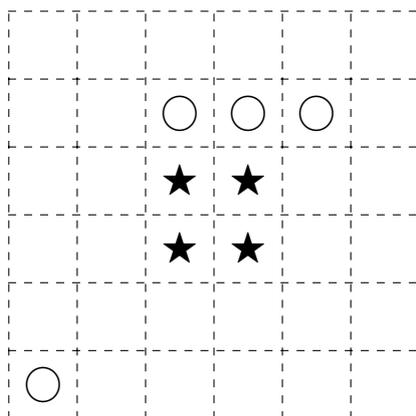
7.1. В верном числовом равенстве одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, а разные — разными. Известно, что получилось

$$\text{Я} + \text{ДЕД} = \text{ТЫ} + \text{НЕТ}.$$

Приведите вариант исходного равенства. (Достаточно привести один пример.)

7.2. Из Новосибирска в Павлодар выехал автобус с программистами. Когда он проехал 70 км, по тому же маршруту из Новосибирска отправился на машине Павел Викторович, который догнал программистов в Карасуке. После этого Павел проехал ещё 40 км, а автобус за то же время — всего 20 км. Найдите расстояние от Новосибирска до Карасука, если и машина, и автобус ехали с постоянными скоростями. (Приведите полное решение, а не только ответ.)

7.3. Разрежьте данный квадрат 6×6 по линиям сетки на четыре равные части таким образом, чтобы каждая из них содержала ровно один кружок и ровно одну звёздочку. (Достаточно привести один пример. Напомним, что фигуры являются равными, если их можно совместить наложением.)

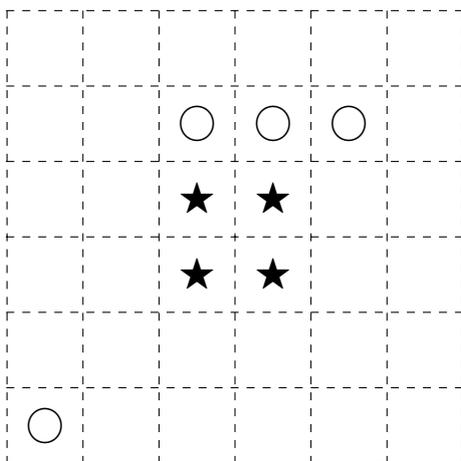


7.4. На некотором острове живёт 2022 человека, каждый из которых является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда врёт. Однажды все жители этого острова встали в круг, и им по очереди был задан вопрос «Является ли лжецом твой сосед слева?», на который суммарно было получено 2 ответа «Да» и 2020 ответов «Нет». После этого всем был задан вопрос «Является ли лжецом твой сосед справа через одного?», на которой тоже было получено 2 ответа «Да» и 2020 ответов «Нет». Сколько ответов «Да» будет получено, если всех спросить «Является ли лжецом человек, стоящий в круге напротив тебя?»? (Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.)

7.5. Дана пустая клетчатая доска 3×3 . За один ход разрешается выбрать любые три клетки, образующие уголок (повёрнутый как угодно), и положить в них по одной шашке. Может ли через несколько ходов оказаться, что во всех клетках лежит одинаковое (ненулевое) количество шашек? (Обоснуйте свой ответ.)

8.1. Из Новосибирска в Павлодар выехал автобус с программистами. Когда он проехал 70 км, по тому же маршруту из Новосибирска отправился на машине Павел Викторович, который догнал программистов в Карасуке. После этого Павел проехал ещё 40 км, а автобус за то же время — всего 20 км. Найдите расстояние от Новосибирска до Карасука, если и машина, и автобус ехали с постоянными скоростями.

8.2. Разрежьте данный квадрат 6×6 по линиям сетки на четыре равные части таким образом, чтобы каждая из них содержала ровно один кружок и ровно одну звёздочку.



8.3. Антон, Боря, Вова, Гриша и Дима соревновались в поедании бууз, хинкалей и пельменей. В каждом из трёх состязаний первое место занял мальчик в серых штанах, второе — в бурых, третье — в малиновых (все носят ровно одни штаны). Кроме того, известно, что меньше всего бууз съел Антон, хинкалей — Дима, пельменей — Вова. Могут ли у Бори и Гриши быть штаны одинакового цвета?

8.4. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена такая точка D , что $BC = CD$. Найдите AD , если известно, что $BD = 13$, а угол CAB в три раза меньше угла CBA .

8.5. Вася выписал на доску набор различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 2023. Оказалось, что для любых двух написанных a и b число $a + b$ не делится нацело на число $a - b$. Какое наибольшее количество чисел мог выписать Вася?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2022-2023 гг

Первый этап

9 класс

*Время написания работы 4 астрономических часа
оценивается в 7 баллов*

Каждая задача

9.1. В течение 100 дней каждый из шести друзей посетил бассейн ровно 75 раз, не более одного раза в день. Обозначим за n количество дней, в которые бассейн посетили не менее пяти из них. Определить максимальное и минимальное возможные значения числа n .

9.2. Вася поменял местами цифры трехзначного числа A так, что ни одна цифра нового трехзначного числа B не совпала с цифрой числа A , стоящей в том же разряде. Оказалось, что разность $A-B$ - двузначное число, являющееся полным квадратом. Чему может быть равно число A ? Найдите все возможные варианты.

9.3. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны точки K и M соответственно. Докажите, что, если угол AMK больше угла BMK , то угол CKM меньше угла BKM .

9.4. У Викентия есть две банки, красная и синяя, а также кучка из 20 камешков. Изначально обе банки пусты. Ход в игре Викентия состоит в том, чтобы переложить камешек из кучки в одну из банок или вернуть камешек из одной из банок в кучку. Количество камешков в банках определяет позицию игры. После каждого хода число камешков в красной банке всегда не меньше числа камешков в синей банке; и в ходе игры ни одна позиция не может повториться. Какое максимальное количество ходов может сделать Викентий?

9.5. Может ли в некоторой компании у каждого быть ровно 5 друзей, а у каждого двух – ровно 2 общих друга?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2022-2023 гг.

Первый этап

10 класс

Время написания работы 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Найти все решения в неотрицательных действительных числах системы уравнений $a(a + b) = b(b + c) = c(c + a)$.

10.2. Пусть A — множество из десяти различных положительных чисел (не обязательно натуральных). Определить максимально возможное количество арифметических прогрессий, состоящих из трёх различных чисел множества A .

10.3. Дана окружность Ω с центром O и окружность Ω' , которая проходит через O и пересекает Ω в точках A и B . На окружности Ω' выберем точку C , отличную от O , лежащую внутри Ω . Прямая AC ещё раз пересекает окружность Ω в точке D , а прямая BC ещё раз пересекает окружность Ω в точке E . Докажите, что треугольники ABC и CDE равны.

10.4. Рассмотрим все $7!$ семизначных чисел, получающихся из числа 1234567 всевозможными перестановками цифр. Сколько из них дают остаток 5 при делении на 7?

10.5. Сколько клеток нужно отметить на клетчатой доске 8 на 8 так, чтобы каждая клетка доски, включая отмеченные, была соседней по стороне с некоторой отмеченной клеткой? Найдите все возможные ответы. Считаем, что клетка не является соседней сама с собой.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2022-2023 гг

Первый этап

11 класс

Время написания работы 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Михаил выезжает из Бердска в Черепаново в 8:00 утра; В тот же день, в то же время и по той же дороге ему навстречу из Черепаново в Бердск выезжают Харитон и Николай. В 9:30 утра Харитон находился ровно на полпути между Михаилом и Николаем; в 10:00 утра Михаил находился ровно на полпути между Харитоном и Николаем. Определите, в какое время встретились Михаил и Харитон, и в какое время встретились Михаил и Николай, если все они двигались с постоянными скоростями?

11.2. Найти все четвёрки действительных чисел (a, b, c, d) таких, что $a(b+c) = b(c+d) = c(d+a) = d(a+b)$.

11.3. Доказать, что для любых трёх положительных действительных чисел x, y, z выполнено неравенство $(x^2 + y^2)^2 \geq (x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)(y + z - x)$. Указать все тройки x, y, z , для которых в нём достигается равенство.

11.4. Неправильный шестиугольник ABCDEF, у которого стороны AB, CD и EF равны, вписан в окружность с центром O, вершины располагаются на окружности по часовой стрелке в алфавитном порядке. Обозначим точку пересечения диагоналей AC и BD за M, диагоналей CE и DF - за N, а диагоналей AE и BF - за K. Докажите, что треугольники ACE и MNK подобны.

11.5. В одной из вершин куба сидят N бабочек, остальные семь вершин пусты. Каждую минуту с одной из вершин куба по одной бабочке перелетают в каждую из трёх соседних с данной по ребру вершин куба, одна – в противоположную (относительно центра) вершину, и ещё одна – улетает вдаль и больше не возвращается. Найти все значения N , при которых через некоторое время в каждой вершине куба может оказаться одинаковое число бабочек.