Всесибирская открытая олимпиада школьников 2022-2023 г.г. по математике
Отборочный этап
7 класс
Решения

7.1. В верном числовом равенстве одинаковые цифры заменили одинаковыми буквами, а разные — разными. Известно, что получилось

$$\text{Я} + \text{ДЕД} = \text{ТЫ} + \text{НЕТ}.$$

Приведите вариант исходного равенства. *(Достаточно привести один пример.)*

Решение. Например, подходит

$$3 + 202 = 96 + 109$$

Критерии. Любой верный пример — 7 баллов.

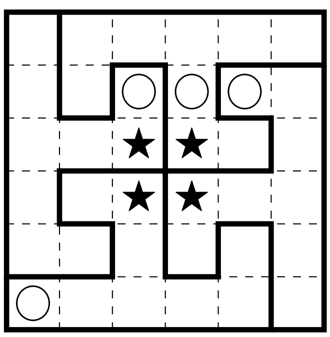
7.2. Из Новосибирска в Павлодар выехал автобус с программистами. Когда он проехал 70 км, по тому же маршруту из Новосибирска отправился на машине Павел Викторович, который догнал программистов в Карасуке. После этого Павел проехал ещё 40 км, а автобус за то же время — всего 20 км. Найдите расстояние от Новосибирска до Карасука, если и машина, и автобус ехали с постоянными скоростями. *(Приведите полное решение, а не только ответ.)*

Решение. Так как за то время, пока машина проехала 40 км, автобус проехал в два раза меньше, его скорость в точности в два раза меньше скорости машины. Но тогда, когда автобус проедет 70 км после выезда машины, та проедет 140 и как раз догонит автобус. По условию это произошло в Карасуке, значит, 140 км и есть ответ.

Критерии. Только ответ — 1 балл.
Ответ с проверкой (например, для конкретных скоростей) — 2 балла.
Доказано, что скорость машины в два раза больше скорости автобуса — 3 балла.

7.3. Разрежьте данный квадрат 6×6 по линиям сетки на четыре равные части таким образом, чтобы каждая из них содержала ровно один кружок и ровно одну звёздочку. *(Достаточно привести один пример. Напомним, что фигуры являются равными, если их можно совместить наложением.)*

Решение. Пример разрезания изображён ниже.



Критерии. Любое верное разрезание — 7 баллов (хотя есть подозрение, что приведённое разрезание является единственно возможным).

7.4. На некотором острове живёт 2022 человека, каждый из которых является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда врёт. Однажды все жители этого острова встали в круг, и им по очереди был задан вопрос «Является ли лжецом твой сосед слева?», на который суммарно было получено 2 ответа «Да» и 2020 ответов «Нет». После этого всем был задан вопрос «Является ли лжецом твой сосед справа через одного?», на которой тоже было получено 2 ответа «Да» и 2020 ответов «Нет». Сколько ответов «Да» будет получено, если всех спросить «Является ли лжецом человек, стоящий в круге напротив тебя?»? *(Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.)*

Решение. Будем обозначать рыцарей и лжецов через Р и Л соответственно. Заметим, что в паре соседних РР или ЛЛ правый человек не может сказать, что слева стоит лжец. Значит, на первый вопрос положительно могли ответить только в парах РЛ и ЛР. Но это значит, так как ответов «Да» было два, что весь круг представляет одну группу подряд идущих лжецов и одно группу подряд идущих рыцарей (а на двух стыках этих групп и прозвучало «Да»).
Рассмотрим теперь второй вопрос. Нам уже понятно, что и рыцарей, и лжецов есть хотя бы по одному человеку. Предположим, что и рыцарей, и лжецов хотя бы два. Тогда «Да» скажут два самых правых рыцаря и два самых правых лжеца. То есть, ответов будет уже четыре, что противоречит условию. Значит, либо рыцарей, либо лжецов всего один человек.
На третий вопрос «Да» ответят только рыцарь и лжец, стоящие друг напротив друга. Но из предыдущего абзаца мы уже знаем, что такая пара только одна, поэтому ответов «Да» опять будет два.

Критерии. Только ответ — 0 баллов.
Только ответ с примером конкретной расстановки — 1 балл.
Доказательство первого абзаца — 3 балла.
Доказательство второго абзаца — ещё 3 балла.

7.5. Дана пустая клетчатая доска 3×3. За один ход разрешается выбрать любые три клетки, образующие уголок (повёрнутый как угодно), и положить в них по одной шашке. Может ли через несколько ходов оказаться, что во всех клетках лежит одинаковое (ненулевое) количество шашек? *(Обоснуйте свой ответ.)*

Решение. Предположим, это возможно, и через несколько ходов в каждой клетке будет лежать по n шашек. Тогда всего на доске их $9n$, а так как на каждом ходу их добавляется по три штуки, сделано было $3n$ ходов. Но заметим, что в каждую из четырёх угловых клеток мы можем класть шашки только отдельными ходами, так как никакой уголок не содержит сразу двух из них. Значит, в каждый из углов было положено n раз отдельными ходами, то есть, всего было сделано хотя бы $4n$ ходов, что противоречит предыдущим рассуждениям. Значит, предположение неверно, и указанная ситуация невозможна.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2022-2023 г.г. по математике
Отборочный этап
8 класс
Решения

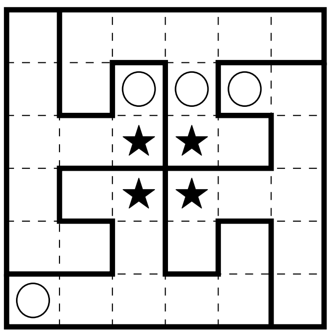
8.1. Из Новосибирска в Павлодар выехал автобус с программистами. Когда он проехал 70 км, по тому же маршруту из Новосибирска отправился на машине Павел Викторович, который догнал программистов в Карасуке. После этого Павел проехал ещё 40 км, а автобус за то же время — всего 20 км. Найдите расстояние от Новосибирска до Карасука, если и машина, и автобус ехали с постоянными скоростями.

Решение. Так как за то время, пока машина проехала 40 км, автобус проехал в два раза меньше, его скорость в точности в два раза меньше скорости машины. Но тогда, когда автобус проедет 70 км после выезда машины, та проедет 140 и как раз догонит автобус. По условию это произошло в Карасуке, значит, 140 км и есть ответ.

Критерии. Только ответ — 1 балл.
Ответ с проверкой (например, для конкретных скоростей) — 2 балла.
Доказано, что скорость машины в два раза больше скорости автобуса — 3 балла.

8.2. Разрежьте данный квадрат 6×6 по линиям сетки на четыре равные части таким образом, чтобы каждая из них содержала ровно один кружок и ровно одну звёздочку.

Решение. Пример разрезания изображён ниже.



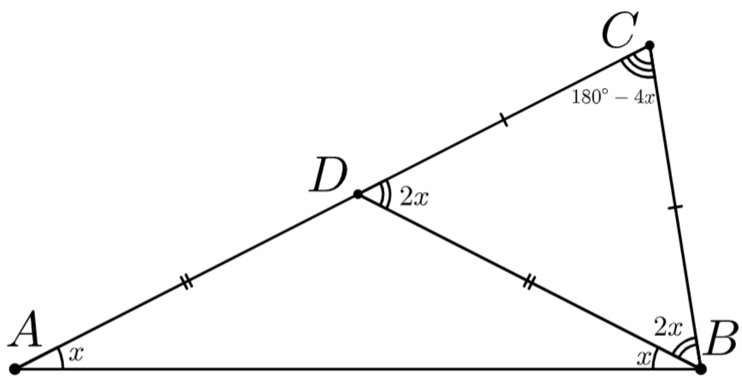
Критерии. Любое верное разрезание — 7 баллов (хотя есть подозрение, что приведённое разрезание является единственно возможным).

8.3. Антон, Боря, Вова, Гриша и Дима соревновались в поедании бууз, хинкалей и пельменей. В каждом из трёх состязаний первое место занял мальчик в серых штанах, второе — в бурых, третье — в малиновых (все носят ровно одни штаны). Кроме того, известно, что меньше всего бууз съел Антон, хинкалей — Дима, пельменей — Вова. Могут ли у Бори и Гриши быть штаны одинакового цвета?

Решение. Заметим, что мальчиков пять, а рассматриваемых цветов три. Значит, какой-то из них точно встречается не больше одного раза. Пусть это серый цвет (другие случаи рассматриваются аналогично). Предположим, штаны серого цвета у Антона. Но тогда в соревновании по поеданию бууз не мог победить мальчик в серых штанах. Аналогично, серые штаны не у Димы и не у Вовы. Значит, они у Бори или у Гриши. Но такие штаны всего одни, значит, одинаковые штаны у этих двоих быть не могут.

Критерии. Замечено, что один из цветов встречается ровно 1 раз — 2 балла.

8.4. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена такая точка D, что $BC = CD$. Найдите AD, если известно, что $BD = 13$, а угол CAB в три раза меньше угла CBA.



Решение. Пусть $\angle CAB = x$. Тогда $\angle CBA = 3x$ и $\angle ACB = 180° - 4x$. По условию треугольник BCD равнобедренный, поэтому $\angle CDB = \angle CBD = (180° - \angle BCD)/2 = 2x$. Следовательно, $\angle DBA = \angle ABC - \angle DBC = 3x - 2x = x = \angle DAB$. Значит, треугольник ABD равнобедренный, и $AD = BD = 13$.

8.5. Вася выписал на доску набор различных натуральных чисел, каждое из которых не превосходит 2023. Оказалось, что для любых двух написанных a и b число $a + b$ не делится нацело на число $a - b$. Какое наибольшее количество чисел мог выписать Вася?

Решение. Докажем, что ответ равен $\lceil \frac{2023}{3} \rceil = 675$.
Оценка. Докажем, что больше 675 чисел Вася написать не мог. Для этого рассмотрим три любых подряд идущих числа a, $b = a + 1$ и $c = a + 2$. Заметим, что соседние числа выписаны быть не могут (иначе их разница равна единице, а любое число делится на 1). Поэтому максимум могут быть выписаны только a и c. Но если они выписаны, то их сумма равна $a + (a + 2) = 2(a + 1)$, что делится на разность $(a + 2) - a = 2$. Подводя итог, из любых трёх последовательных чисел может быть выписано максимум одно. Но тогда на доске может быть максимум одно число из 1, 2 и 3; максимум одно из 4, 5 и 6; $\ldots$; максимум одно из 2020, 2021 и 2022. То есть, из первых 2022 чисел может быть выписано максимум 674 плюс число 2023, итого 675.
Пример. Приведём пример набора из 675 чисел. Пусть Вася выписал все числа вида $3n + 1$ для n от 0 до 674, то есть, 1, 4, 7, $\ldots$, 2020, 2023. Заметим, что сумма двух таких чисел имеет вид $(3n + 1) + (3m + 1) = 3(n + m) + 2$, что не делится на 3, а разность равна $(3n + 1) - (3m + 1) = 3(n - m)$, что кратно трём. Но число, не делящееся на 3, не может делиться на число, которое на 3 делится. Поэтому условия задачи выполнены, и этот набор из 675 чисел подходит.

Критерии. Только оценка — 3 балла.
Только пример с доказательством, что он подходит — 3 балла.

Решения заданий первого этапа
Всесибирской олимпиады школьников по математике

9 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

9.1. В течение 100 дней каждый из шести друзей посетил бассейн ровно 75 раз, не более одного раза в день. Обозначим за *n* количество дней, в которые бассейн посетили не менее пяти из них. Определить максимальное и минимальное возможные значения числа *n*.

Ответ. 90 и 25 соответственно.

Решение. Общее число посещений бассейна за 100 дней шестью друзьями равно $75\cdot 6=450$, следовательно, количество дней, в которые бассейн посетили не менее пяти из них не больше $\frac{450}{5}=90$. С другой стороны, если количество таких дней равно *n*, то общее число посещений друзьями бассейна, равное 450, не превосходит $6n+4(100-n)=400+2n$, откуда $n\geq 25$.

Осталось привести примеры, когда эти значения достигаются. Для этого запишем их фамилии по порядку: первый, второй,.., шестой, и так 45 раз подряд. Затем сначала поделим их на 90 пятёрок, идущих подряд, эти пятёрки посетят бассейн в первые 90 дней. В оставшиеся 10 дней в этом примере в бассейн не пойдёт никто.

Во втором случае в первые 25 дней в бассейн сходят первые 25 шестёрок последовательных друзей, а в оставшиеся 75 дней – 75 оставшихся последовательных четвёрок.

Критерии оценивания. (●) Оценки $n\geq 25$ и $n\leq 90$ - по 2 балла каждая, (●) примеры для $n=25$ и $n=90$ по 1 баллу за каждый. (●) Если сделано всё: 7 баллов.

9.2. Вася поменял местами цифры трехзначного числа *A* так, что ни одна цифра нового трёхзначного числа *B* не совпала с цифрой числа А, стоящей в том же разряде. Оказалось, что разность *A*- *B* - двузначное число, являющееся полным квадратом. Чему может быть равно число *A*? Найдите все возможные варианты.

Ответ. Всего 20 решений: $A=218,329$, $A=213,..,879$, $A=706,817,928$, $A=201,312,..,978$.

Решение. Обозначим $A=\overline{abc}$, где $a,b,c-$цифры его сотен, десятков и единиц соответственно. Из принципа Дирихле и условия следует, что все они различны, так как нельзя рассадить минимум 4 кроликов (две пары одинаковых цифр в А и В) по 3 клеткам (разрядам), чтобы каждому досталось отдельное жильё. По условию либо $B=\overline{bca}$, либо $B=\overline{cab}$.

Кроме того, разность А и В двузначна, следовательно первая цифра А больше первой цифры В на 1 (как мы заметили, первые цифры этих чисел не могут быть равны).

Рассмотрим оба случая.

1) $B=\overline{bca}$. Тогда $A-B=\overline{abc}-\overline{bca}=99a-90b-9c$ - двузначное число, делящееся на 9 и являющееся точным квадратом, то есть 36 или 81. В первом случае $11a-10b-c=4$ и $a=b+1$, то $b+7=c$, откуда $b=1,2$ и $A=218,329$ - два решения. Во втором случае $11a-10b-c=9$ и $a=b+1$, значит $b+2=c$, откуда $b=1,2,..,7$ и $A=213,..,879$ - семь решений.

2) $B=\overline{cab}$. Тогда $A-B=\overline{abc}-\overline{cab}=90a+9b-99c$ - двузначное число, делящееся на 9 и являющееся точным квадратом, то есть 36 или 81. В первом случае $10a+b-11c=4$ и $a=c+1$, тогда $c=b+6, a=b+7$, откуда $b=0,1,2$ и $A=706,817,928$ - три решения. Во втором случае $10a+b-11c=9$ и $a=c+1$, значит $c=b+1, a=b+2$, откуда $b=0,1,2,..,7$ и $A=201,312,..,978$ - восемь решений. Общее число решений равно 2+7+3+8=20.

Критерии оценивания. (●) Рассмотрен полностью только один из случаев для разности 36 или 81: 3 балла. (●) Не рассмотрена часть решений в одном из этих случаев: снимаем 1 балл в каждом случае.

9.3. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC выбраны точки K и M соответственно. Докажите что, если угол AMK больше угла BMK, то угол CKM меньше угла BKM.

Доказательство. Обозначим точку пересечения отрезков AM и CK за P. Заметим, что в треугольнике PMK сумма величин углов AMK и CKM равна 180 минус величину KPM, что равно 180 минус величину APC, и равно сумме величин углов PAC и PCA в треугольнике PAC. Величины PAC и PCA соответственно меньше величин углов BAC и BCA исходного треугольника ABC. Следовательно, сумма величин углов AMK и CKM меньше 180 минус величину ABC. Последняя разность равна сумме углов BKM и BMK в треугольнике BMK. Значит, сумма величин углов AMK и CKM меньше суммы величин углов BKM и BMK. Если бы и величина CKM была не меньше величины BKM, то по условию, сумма AMK и CKM была бы больше суммы BKM и BMK – противоречие.

Критерии оценивания. (●)

9.4. У Викентия есть две банки, красная и синяя, а также кучка из 20 камешков. Изначально обе банки пусты. Ход в игре Викентия состоит в том, чтобы переложить камешек из кучки в одну из банок или вернуть камешек из одной из банок в кучку. Количество камешков в банках определяет позицию игры. После каждого хода число камешков в красной банке всегда не меньше числа камешков в синей банке; и в ходе игры ни одна позиция не может повториться. Какое максимальное количество ходов может сделать Викентий?

Ответ. 110.

Решение. Позиция в игре Викентия однозначно задаётся парой неотрицательных целых чисел (x, y), и $x + y \leq 20$, где $0 \leq y \leq x \leq 20$ - числа камешков в синей и красной банках соответственно. Всего в игре Викентия возможна 21+19+17…+1=121 позиция. Назовём позицию *чётной*, если сумма её чисел камешков в банках чётна, и *нечётной* – в противоположном случае. Всего в игре 11+10+…+1=66 чётных позиций и 121-66=55 нечётных. Каждый ход в игре меняет чётность позиции, поэтому всего игра не может содержать более, чем 55 чётных и 56 нечётных позиций (с учётом того, что начинается она с чётной позиции (0,0)), всего 111 позиций. и состоять из не более, чем 111-1=110 ходов.

Приведём пример игры, когда Викентий сможет сделать 110 ходов. При этом он делает единственно возможный первый ход с (0,0) на (1,0), затем все позиции (x, y) с нечётным $x = 1,3,5,..,9$ проходит последовательно от $(x,0)$ до (x, x), после чего переходит к $(x+1, x)$, а все позиции с чётным $x = 2,4,..,10$ проходит последовательно от $(x, x-1)$ до $(x,0)$, после чего переходит к $(x+1,0)$. После всего указанного он оказывается в позиции (11,0), после чего его стратегия слегка меняется. все позиции (x, y) с нечётным $x = 11,13,15,.17$ проходит последовательно от $(x,0)$ до $(x,19-x)$, после чего переходит к $(x+1,19-x)$, а все позиции с чётным $x = 12,14,..,18$ проходит последовательно от $(x,20-x)$ до $(x,0)$, после чего переходит к $(x+1,0)$. В итоге он оказывается в позиции (19,0) и совершает последний ход в (20,0). Не пройденными остались позиции (2,2),(4,4),…,(10,10),(11,9),(13,7),...,(19,1) – ровно 10 штук, то есть пройденными в точности 121-10=111 позиций. Совершено как раз 110 ходов.

Критерии оценивания. (●) Доказано, что число ходов не больше 110: 3 балла. (●) Построение примера на 110 ходов с точным обоснованием: 4 балла. (●) Отсутствие точного обоснования примера: минус 2 балла.

9.5. Может ли в некоторой компании у каждого быть ровно 5 друзей, а у каждых двух – ровно 2 общих друга?

Ответ. Нет, не может.

Решение. Пусть A - один из членов этой компании, у него 5 друзей. У каждого члена компании, кроме A, есть два общих друга, являющимися двумя из пяти друзей A. Допустим, что пары общих друзей у A и B, а также у A и C совпадают, обозначим их за D и E. Тогда у D и E не меньше трёх общих друзей, среди которых как минимум A, B и C. что противоречит условию. Следовательно всего в компании, кроме A, людей не может быть больше, чем количество различных пар среди пяти друзей A, то есть не больше десяти. С другой стороны, для каждой такой пары X и Y у них есть ровно два общих друга, один из которых A., а другой Z, отличный от A. По условию, этот Z для разных пар X и Y тоже разный. Значит, всего в компании, кроме A, людей не может быть меньше, чем количество различных пар среди пяти друзей A, то есть не меньше десяти. Следовательно, всего в компании 11 человек. Тогда общее число дружб в компании равно $\frac{11 \cdot 5}{2}$ - число нецелое. Полученное противоречие доказывает, что приведённая в условии ситуация невозможна.

Критерии оценивания. (●) Доказательство, что число людей в компании не больше 11: 3 балла. (●) Доказательство, что число людей в компании не меньше 11: 3 балла. (●) Доказательство, что число людей в компании не может равняться 11: 1 балл.

Решения заданий первого этапа
Всесибирской олимпиады школьников по математике
10 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

10.1. Найти все решения в неотрицательных действительных числах системы уравнений $a(a+b)=b(b+c)=c(c+a)$.

Ответ. Все тройки равных чисел (a,a,a) для произвольного неотрицательного a.

Решение. 1) Тройки чисел (a,a,a) при любом a, очевидно, являются решениями системы из условия.

2) Если ровно одно из переменных равно 0, например $a=0, b\neq 0, c\neq 0$, то и $c+a=0$, откуда и $c=0$ - противоречие. Если ровно два из переменных равны 0, например $a=0, b=0, c\neq 0$, то и $c^2=0$, откуда и $c=0$ - снова противоречие.

3) Если все числа не равны нулю и среди них есть два равных, например $a=b$, то из первого равенства $a+b=b+c$, откуда и $a=c$ - все три числа равны.

4) Далее считаем все числа положительными и различными. В таком случае произведение суммы двух меньших из них на одно из этих меньших, будет меньше произведения двух больших из них на одно из больших. Следовательно, рассматриваемые тройки не являются решениями системы из условия.

Критерии оценивания. (●) Замечено, что все тройки равных чисел (a,a,a) являются решениями: 1 балл. (●) Разбор случая 2): 2 балла, (●) Разбор случая 3): 1 балл. (●) Разбор случая 4): 3 балла.

10.2. Пусть *A* — множество из десяти различных положительных чисел (не обязательно натуральных). Определить максимально возможное количество арифметических прогрессий, состоящих из трёх различных чисел множества *A*.

Ответ. 20.

Решение. Обозначим элементы множества *A* за $a_1<a_2<\ldots<a_{10}$. Три числа $a_k<a_l<a_m$ образуют трёхчленную арифметическую прогрессию тогда и только тогда $a_l-a_k=a_m-a_l$. Посмотрим, какое максимальное количество раз каждый из элементов *A* может быть средним членом a_l такой прогрессии. Несложно видеть, что к элементу $a_l, l=2,3,4,5$ можно подобрать первый элемент a_k не более, чем $l-1$ различными способами – это может быть только $a_1,a_2,\ldots,a_{l-1}$. Следовательно, искомых прогрессий со средним членом $a_l, l=2,3,4,5$ может быть не более 1+2+3+4=10. Аналогично, к элементу $a_l, l=6,7,8,9$ можно подобрать третий элемент a_m не более, чем $10-l$ различными способами - это может быть только $a_{l+1},a_{l+2},\ldots,a_{10}$. Следовательно, искомых прогрессий со средним членом $a_l, l=6,7,8,9$ может быть не более 4+3+2+1=10. Любая искомая трёхчленная прогрессия должна быть одного из этих двух типов, следовательно, общее число таких способов не может превосходить 1+2+3+4+4+3+2+1=20.

В качестве примера множества *A* из 10 элементов, когда значение 20 достигается, можно взять множество всех натуральных чисел от 1 до 10 включительно.

Критерии оценивания. (●) Доказано, что число прогрессий не больше 20: 5 баллов. (●) Пример с 20 прогрессиями: 2 балла.

10.3. Дана окружность Ω с центром O и окружность Ω', которая проходит через O и пересекает Ω в точках A и B. На окружности Ω' выберем точку C, отличную от O, лежащую внутри Ω. Прямая AC ещё раз пересекает окружность Ω в точке D, а прямая BC ещё раз пересекает окружность Ω в точке E. Докажите, что треугольники ABC и CDE равны.

Доказательство. Углы ACB и DCE равны как вертикальные, поэтому для равенства треугольников ABC и CDE достаточно равенства отрезков CB=CD и CA=CE. Докажем первое из них. Обозначим величину угла AOB за x. Тогда и величина BCA, вписанного в окружность Ω' и опирающегося там на хорду AB тоже равна x, а величина смежного с ним угла BCD равна $180 - x$. С другой стороны, вписанный в окружность Ω угол ADB равен половине её центрального угла AOB, то есть $\frac{x}{2}$. В таком случае в треугольнике BCD углы BCD и CDB равны $180^0 - x$ и $\frac{x}{2}$ соответственно, следовательно, третий угол CBD тоже равен $\frac{x}{2}$, поэтому треугольник BCD является равнобедренным и CB=CD, что и требовалось доказать. Равенство CA=CE доказывается аналогично.

Критерии оценивания. (●) Доказано, что CB=CD или CA=CE: по 3 балла за каждое равенство. **.** (●) Замечание, что для равенства треугольников ABC и CDE достаточно равенства CB=CD и CA=CE: 1 балл.

10.4. Рассмотрим все 7! семизначных чисел, получающихся из числа 1234567 всевозможными перестановками цифр. Сколько из них дают остаток 5 при делении на 7?

Ответ. 6!.

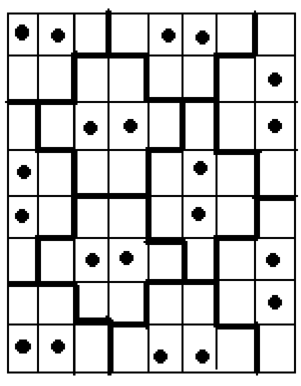
Решение. Обозначим за $A_n, n = 0,1,...,6$ множества тех из рассматриваемых чисел, которые при делении на 7 дают остатки 0,1,2,…6 соответственно. Докажем, что каждое из этих множеств содержит одинаково количество чисел, равное 7!/7=6!. Заметим, что число 1111111 при делении на 7 даёт остаток 1. С каждым из рассматриваемых чисел a проделаем следующее: прибавим к каждой цифре a единицу, если при этом в некотором разряде получается цифра 8, заменим её на цифру на 1, дающую тот же остаток от деления на 7. Остаток от деления полученного числа на 7 равен остатку от деления на 7 числа $a + 1111111$, то есть на 1 больше, чем остаток от деления на 7 числа a. Следовательно, данное отображение однозначно переводит каждое число множества A_n в некоторое число множества A_{n+1}, для всех $n = 0,1,...,6$, причём разные числа из A_n переходят в разные числа из A_{n+1}. Значит, количество чисел в A_1 не меньше, чем в A_0, количество чисел в A_2 не меньше, чем в A_1, и так далее,…. количество чисел в A_0 не меньше, чем в A_6, поэтому все множества $A_n, n = 0,1,...,6$ содержат одинаковое количество чисел, равное 7!/7=6!.

Критерии оценивания. (●) Идея прибавления 1 во всех разрядах: 2 балла. **.** (●) Доказательство, что такая операция переводит множества $A_n, n = 0,1,...,6$ друг в друга: 3 балла. **.** (●) Доказательство равномощности этих множеств: 2 балла.

10.5. Сколько клеток нужно отметить на клетчатой доске 8 на 8 так, чтобы каждая клетка доски, включая отмеченные, была соседней по стороне с некоторой отмеченной клеткой? Найдите все возможные ответы. Считаем, что клетка не является соседней сама с собой.

Ответ. 20.

Решение. Сначала соберёмся с силами и отметим на доске 8 на 8 двадцать клеток, как того требует условие. Например, так, как это показано на рисунке. При этом доска естественным образом разбивается на 10 частей, как это показано жирными линиями на рисунке. Каждая часть состоит из клеток, соседних с данной парой отмеченных.



Теперь, используя построенный пример, докажем, что единственным ответом задачи являются именно 20 клеток. Рассмотрим разбиение доски на 10 частей, указанных в примере. Дальше везде будем называть *фигурами* именно эти части данного примера.. Назовём *центральными* клетками каждой фигуры те, что отмечены в примере на рисунке. Вспомним, что шахматная доска имеет естественную раскраску клеток в шахматном порядке и рассмотрим в каждой фигуре её чёрную и белую части, состоящие из чёрных и белых клеток этой фигуры соответственно. Заметим, что белая центральная клетка фигуры соседствует только с чёрными клетками только этой фигуры, причём со всеми, и чёрная центральная клетка фигуры соседствует только с белыми клетками только этой фигуры, причём со всеми.

Рассмотрим теперь произвольную разметку клеток на доске, удовлетворяющую условию задачи, и докажем, что каждая фигура содержит ровно две отмеченные клетки, откуда будет следовать ответ задачи. Действительно, если некоторая фигура содержит не меньше трёх отмеченных клеток, то она содержит не меньше двух белых отмеченных, либо не меньше двух чёрных отмеченных, тогда центральная клетка противоположного цвета этой фигуры будет соседней не менее, чем с двумя отмеченными, что противоречит условию. А если некоторая фигура содержит не больше одной отмеченной клетки, то в ней либо не будет белых отмеченных клеток, либо не будет чёрных отмеченных клеток, тогда центральная клетка противоположного цвета этой фигуры вообще не будет соседней ни с какой отмеченной клеткой, что тоже противоречит условию. Следовательно, каждая фигура содержит по две отмеченных клетки, поэтому любой пример содержит ровно 20 отмеченных клеток.

Заметим, что построенный в данном решении пример не единственный, и мы доказывали совсем не то, что отмеченные клетки любого примера совпадают с отмеченными нами. Можно повернуть доску на 90 градусов и получится новый пример, отличный от рассмотренного, но всё равно, любая фигура содержит по две отмеченных клетки из нового примера.

Замечание. Оценку для 20 можно делать и по-другому, доказав сначала, что число крайних отмеченных клеток не меньше 9 и т.д. Это длинный и опасный путь с перебором частных случаев. При оценивании заявленных решений такого типа нужно очень тщательно оценивать в них каждый шаг, и, если такое решение содержит нерассмотренные случаи или проколы в подсчётах, то оценочная часть решения оценивается не выше, чем в 1 балл.

Критерии оценивания. (●) Построен пример на 20 клеток: 3 балла. (●) Доказано, что число отмеченных клеток всегда равно 20: 4 балла. (●) Идея рассмотрения фигур из решения на доске для оценивания (без особых продвижений): 1 балл.

Решения заданий первого этапа
Всесибирской олимпиады школьников по математике

11 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красивости, оценивается в 7 баллов

11.1. Михаил выезжает из Бердска в Черепаново в 8:00 утра; В тот же день, в то же время и по той же дороге ему навстречу из Черепаново в Бердск выезжают Харитон и Николай. В 9:30 утра Харитон находился ровно на полпути между Михаилом и Николаем; в 10:00 утра Михаил находился ровно на полпути между Харитоном и Николаем. Определите, в какое время встретились Михаил и Харитон, и в какое время встретились Михаил и Николай, если все они двигались с постоянными скоростями?

Ответ. Михаил и Харитон встретились в 9:48 утра**,** Михаил и Николай - в 10:15 утра**.**

Решение. Обозначим за S расстояние между Бердском и Черепаново, и за x, y, z скорости Михаила, Харитона и Николая соответственно. Из того, что в 9:30 утра Харитон находился ровно на полпути между Михаилом и Николаем следует, что $y > z$ и $(S-\frac{3}{2}y)-\frac{3}{2}x=\frac{3}{2}y-\frac{3}{2}z$, что равносильно $x+2y-z=\frac{2}{3}S$. Из того, что в 10:00 утра Михаил находился ровно на полпути между Харитоном и Николаем следует, $2x-(S-2y)=S-2x-2z$, что равносильно $2x+y+z=S$.

Время, необходимое для встречи Михаила и Харитона, равно $\frac{S}{x+y}=\frac{3S}{(x+2y-z)+(2x+y+z)}=\frac{3S}{\frac{2S}{3}+S}=\frac{9S}{5S}=\frac{9}{5}$ часа, что равно 1 час 48 минут, следовательно, произошла эта встреча в 9:48 утра.

Время, необходимое для встречи Михаила и Николая, равно $\frac{S}{x+z}=\frac{3S}{-(x+2y-z)+2(2x+y+z)}=\frac{3S}{-\frac{2S}{3}+2S}=\frac{9S}{4S}=\frac{9}{4}$ часа, что равно 2 часа 15 минут, следовательно, произошла эта встреча в 10:15 утра.

Критерии оценивания. (●) Правильно составлена система уравнений для S, x, y, z: 3 балла. (●) Вычисление каждого из ответов: по 2 балла.

11.2. Найти все четвёрки действительных чисел (a,b,c,d) таких, что $a(b+c)=b(c+d)=c(d+a)=d(a+b)$.

Ответ. 8 бесконечных серий решений, получающихся умножением каждого из чисел $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(1,-1\pm\sqrt{2},-1,1\mp\sqrt{2})$ на любое действительное число.

Решение. Вычитая первое выражение из третьего, получим $ab=cd$, вычитая четвёртое выражение из второго, получим $ad=bc$.

1. Если одно из переменных, скажем a, равно 0, то одно из c,d равно 0 и одно из b,c равно 0. В случае $c\neq 0$ будет $b=d=0$ и тогда все четыре выражения в условии равны 0 и между собой. Если же $c=0$, то $bd=0$ и одно из b,d равно 0, то есть снова три из переменных равны 0. Аналогично, все четвёрки, в которых три переменных равны 0, а четвёртое произвольно, являются решениями задачи.

2. Далее все a,b,c,d не равны 0. Тогда, перемножив равенства $ab=cd$ и $ad=bc$ и сократив на db, получим $a^2=c^2$. то есть $a=\pm c$. Обозначим $c=\varepsilon a, \varepsilon=\pm 1$, тогда и $d=\varepsilon b$. Подставим полученные выражения в равенства из условия, получим

$a(b+\varepsilon a)=b(\varepsilon a+\varepsilon b)=\varepsilon a(\varepsilon b+a)=\varepsilon b(a+b)$, из которых второе и третье следуют из первого $a(b+\varepsilon a)=b(\varepsilon a+\varepsilon b)$.

3. Если $\varepsilon=1$, то $a^2=b^2$ и $b=\delta a, \delta=\pm 1$. В этом случае получаем четвёрку чисел $(a,\delta a,a,\delta a)$ - решение, когда либо все числа a,b,c,d равны (при $\delta=1$), либо четвёрку $(a,-a,a,-a)$, когда каждая из сумм $b+c, c+d, d+a, a+b$ равна 0 (при $\delta=-1$).

4. Если $\varepsilon=-1$, то $a(b-a)=b(-a-b)\Leftrightarrow (a+b)^2=2a^2 \Leftrightarrow b=(-1\pm\sqrt{2})a$. В этом случае получаем две четвёрки решений: $(a,(-1+\sqrt{2})a,-a,(1-\sqrt{2})a)$ и $(a,(-1-\sqrt{2})a,-a,(1+\sqrt{2})a)$.

В итоге, система уравнений из условия имеет 8 бесконечных серий решений, получающихся умножением каждого из чисел $(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1),(1,1,1,1),(1,-1,1,-1),(1,-1\pm\sqrt{2},-1,1\mp\sqrt{2})$ на любое действительное число.

Критерии оценивания. (●) Угаданы с проверкой первые 5 серий: 1 балл.
(●) Угаданы с проверкой первые 6 серий: 2 балла. (●) Рассуждения пунктов 1, 2 и 3: по 1 баллу. (●) Рассуждения пункта 4:3 балла.

11.3. Доказать, что для любых трёх положительных действительных чисел x, y, z выполнено неравенство $(x^2+y^2)^2 \geq (x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(y+z-x)$**.** Указать все тройки x, y, z, для которых в нём достигается равенство.

Ответ. Все тройки положительных чисел x, y, z, являющихся длинами сторон равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами x, x, то есть тройки $x, x, x\sqrt{2}, x>0$.

Доказательство. 1. Заметим, что, если x, y, z являются длинами сторон некоторого треугольника, то есть когда каждая из трёх последних скобок произведения в правой части положительна, в правой части ввиду формулы Герона записано число $16S^2$, где S - площадь этого треугольника. Следовательно, в этом случае неравенство из условия эквивалентно неравенству $x^2+y^2\geq 4S$, где x, y- длины некоторых двух сторон треугольника. Последнее неравенство следует из того, что $x^2+y^2\geq 2xy\geq 4\cdot\frac{1}{2}xy\cdot Sin\alpha=4S$, где α - угол между сторонами длин x и y. Заметим, что знак равенства в неравенстве возможен, только когда $x^2+y^2=2xy\Leftrightarrow (x-y)^2=0\Leftrightarrow x=y$ и $2xy=4\cdot\frac{1}{2}xy\cdot Sin\alpha=4S\Leftrightarrow Sin\alpha=1\Leftrightarrow \alpha=90^0$, то есть когда x, y, z - длины сторон равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами $x, y=x$.

2. Пусть теперь положительные числа x, y, z не являются длинами сторон никакого треугольника, тогда ровно одна из скобок в произведении в правой части не положительна - та, которая соответствует вычитанию наибольшего из этих чисел. Следовательно, в этом случае произведение в правой части неравенства будет не положительно, а выражение в правой – положительно, поэтому неравенство выполняется и в этом случае. При этом $(x^2+y^2)^2>0$ и равенство не достигается.

Критерии оценивания. (●) Доказательство неравенства в случае, когда x, y, z являются длинами сторон некоторого треугольника: 4 балла**.** (●) Доказательство в случае 2.: 3 балла.

11.4. Неправильный шестиугольник ABCDEF, у которого стороны AB, CD и EF равны, вписан в окружность с центром O, вершины располагаются на окружности по часовой стрелке в алфавитном порядке. Обозначим точку пересечения диагоналей AC и BD за M, диагоналей CE и DF - за N, а диагоналей AE и BF - за K. Докажите, что треугольники ACE и MNK подобны.

Доказательство. 1. Из равенства сторон AB, CD и EF следует, что треугольник BDF получается из треугольника ACE поворотом относительно O, поэтому данные треугольники равны.

2. В четырёхугольнике ABMK углы KAM и KBM равны, как соответственные углы равных треугольников ACE и BDF, поэтому он является вписанным. Аналогично, вписанными являются и четырёхугольники MCDN и NEFK.

3. Обозначим величину угла AKM за x. Четырёхугольник ABMK вписанный, поэтому противоположный AKM угол ABM равен $180^0 - x$. Четырёхугольник ABCD тоже вписанный (в исходную окружность), поэтому углы ABM=ABD и ACD=MCD равны, как опирающиеся на общую хорду AD, поэтому угол MCD равен $180^0 - x$. Но и четырёхугольник MCDN вписанный, поэтому в нём угол MND, противоположный углу MCD, равен $180^0 - (180^0 - x) = x$. Отсюда следует равенство углов AKM и MND.

4. Обозначим величину угла EKN за y. Четырёхугольник NEFK вписанный, поэтому углы EKN и EFN равны y, как опирающиеся на общую хорду EN. Переходя ко вписанному в исходную окружность четырёхугольнику CDEF, получаем равенство y вписанных углов EFN=EFD и ECD, опирающихся на общую хорду ED. Наконец, во вписанном четырёхугольнике MCDN имеем равенство y вписанных углов NMD и NCD=ECD, опирающихся на общую хорду ND.

5. Из треугольника NMD следует, что величина угла MDN равна $180^0 - x - y$. С другой стороны, сумма углов EKN, MKN и AKM равна 180^0, и, как мы уже доказали, величины углов AKM и EKN равны x и y соответственно. Следовательно, величина угла MKN одноименного треугольника равна величине угла MDN=BDF треугольника BDF, что равно и углу ACE одноименного треугольника. Аналогично доказываются равенство углов KNM и CAE, и равенство углов KMN и AEC. Следовательно. треугольники ACE и MNK подобны по трём углам., что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. (●) Доказана вписанность некоторых или всех четырёхугольников ABMK, MCDN и NEFK: 2 балла.

11.5. В одной из вершин куба сидят N бабочек, остальные семь вершин пусты. Каждую минуту с одной из вершин куба по одной бабочке перелетают в каждую из трёх соседних с данной по ребру вершин куба, одна – в противоположную (относительно центра) его вершину, и ещё одна – улетает вдаль и больше не возвращается. Найти все значения N, при которых через некоторое время в каждой вершине куба может оказаться одинаковое число бабочек.

Ответ. Любое N, делящееся на 45.

Решение. 1. Покажем, что при любом $N = 45k, k \in N$ ситуация, когда через некоторое время в каждой вершине может оказаться одинаковое число бабочек, возможна. Занумеруем вершины куба, сначала вершины нижнего основания по часовой стрелке от 1 до 4, затем вершины верхнего основания по часовой стрелке от 5 до 8, так что пятая вершина расположена над первой, шестая над второй и т.д., а все бабочки сначала сидят на первой. Пусть за первые $9k$ минут бабочки перелетают только с первой вершины, после чего на вершинах 2,4,5,7 окажутся по $9k$ бабочек, а остальные вершины будут пусты. За следующие $4k$ минут с каждой из вершин 2,4,5,7 вылетают по k бабочек, после чего уже на каждой вершине куба окажутся по $4k$ бабочек, что и требовалось в условии.

2. Покажем что, если через некоторое время в каждой вершине куба может оказаться одинаковое число бабочек, то N делится на 45. то есть на 5 и 9. Назовём вершины куба 1,3,6,8 *синими*, а вершины 2,4,5,7 – *красными*. Далее за A обозначаем суммарное количество бабочек, сидящих в данный момент в синих вершинах, а за B - суммарное

количество бабочек, сидящих в красных вершинах, сначала A=N, B=0. Заметим, что каждую минуту из одной из вершин куба перелетает по одной бабочке в каждую из четырёх вершин противоположного цвета, а одна улетает прочь. Всего при этом одно из чисел A и B уменьшается на 5, а второе – увеличивается на 4. следовательно, разность A-B каждую минуту изменяется на 9 в большую или меньшую сторону. В начале процесса A-B=N, а в конце, когда на каждой вершине усядутся одинаковые количества бабочек и A станет равным B, разность A-B=0. Следовательно, N делится на 9.
Теперь рассмотрим разность M количества бабочек на вершинах 1 и 3.. При перелётах бабочек с красных вершин на каждой из вершин 1 и 3 добавляется по одной бабочке, поэтому M не меняется. При перелётах бабочек с синих вершин либо ровно одно из количеств бабочек в вершинах 1 и 3 уменьшается на 5, либо оба остаются неизменными. В этом случае M каждую минуту изменяется на 5 в большую или меньшую сторону. Сначала M тоже равна N, а в конце нулю, поэтому N должно делиться на 5.
Итак, доказано, что N делится на 5 и 9, то есть делится на 45.
Критерии оценивания. (●) Доказано, что при любом $N = 45k, k \in N$ ситуация, уравнивания возможна: 3 балла. (●) Доказано, что в случае, когда уравнивание возможно, N делится на 5: 2 балла. (●) Доказано, что в случае, когда уравнивание возможно, N делится на 9: 2 балла.