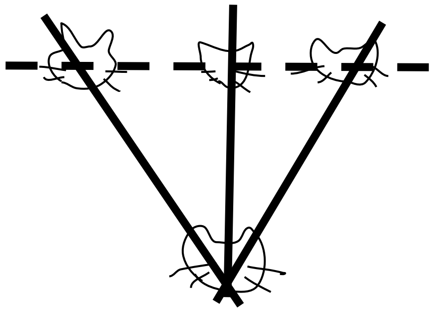
Всесибирская открытая олимпиада школьников 2021-2022 г.г. по математике
Основной отборочный этап
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
Время выполнения 4 астрономических часа.



7.1. На картинке 4 котёнка образуют один ряд, в котором 3 котёнка, и три ряда, в которых по два котёнка. Разместите 6 котят на плоскости так, чтобы получилось 3 ряда, в каждом из которых ровно по 3 котёнка, и 6 рядов, в каждом из которых ровно по 2 котёнка (считайте котят точками на плоскости). *(Достаточно привести один пример)*

7.2. Элли и Тотошка красили ромашки на поле. В первый день Элли покрасила четырнадцатую часть всего поля. Во второй день она покрасила в два раза больше, чем в первый, а в третий — в два раза больше, чем во второй. Тотошка же в итоге покрасил суммарно 7000 ромашек. Сколько всего ромашек на поле, если известно, что они все оказались покрашены? *(Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет)*

7.3. Три одиннадцатиклассницы играли в крестики-нолики против двух девятиклассниц (в каждом матче встречались одиннадцатиклассница и девятиклассница). Известно, что Вероника выиграла у Риты, затем Юля выиграла у Светланы, а Вероника - у Марии, и, наконец, Мария выиграла у Юли. Как звали одиннадцатиклассниц? *(Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет)*

7.4. Антону из деревни передали несколько кабачков, и он решил раздать их друзьям. Арине он отдал половину от полученного количества кабачков, а Вере — треть (тоже от полученного количества). Оказалось, что после этого у Арины количество кабачков стало выражаться квадратом некоторого натурального числа, а у Веры — кубом (до этого у них кабачков не было вообще). Найдите наименьшее возможное количество кабачков, которое мог получить Антон из деревни. *(Найдите ответ и докажите, что он минимален).*

7.5. На вечеринку пришло 20 человек. Известно, у каждого из них ровно 14 друзей среди пришедших (дружба взаимна). Кроме того, посреди вечеринки 10 людей вышли на балкон, и оказалось, что все они дружат друг с другом. Докажите, что всех пришедших на вечеринку людей можно разделить по двум комнатам таким образом, чтобы в каждой комнате все дружили со всеми.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2021-2022 г.г. по математике
Основной отборочный этап
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
Время выполнения 4 астрономических часа.

8.1. Разместите на плоскости 10 котят и 5 равных отрезков так, чтобы на каждом отрезке сидело по 4 котёнка (считайте котят точками на плоскости).

8.2. Известно, что 70% математиков, ушедших в IT, жалеют о своей смене деятельности. При этом из всех людей, ушедших в IT, о смене деятельности жалеет только 7%. Сколько процентов из ушедших в IT являются математиками, если только они жалеют о смене деятельности?

8.3. Даны два числа a и b. Известно, что из четырёх чисел ab, $a + b$, $a - b$, a/b ровно три равны между собой (b не равно 0). Найдите a и b.

8.4. Как-то раз в средневековой Англии за круглым столом собрались 2021 человек. Каждый из них был либо рыцарем, который всегда говорил правду, либо лжецом, который всегда лгал, причём среди присутствовавших имелся хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Кроме того, известно, что в этот день был сильный туман, и каждый человек видел только 12 ближайших соседей слева от себя и 12 ближайших соседей справа. Каждого сидящего за столом спросили: “Видишь ли ты среди других людей лжецов больше, чем рыцарей?”. Докажите, что кто-то ответил “да”.

8.5. На столе по кругу лежит $n > 3$ одинаковых монет, которые могут располагаться либо вверх орлом, либо вверх решкой. Если рядом с некоторой монетой лежат два орла или две решки, то эту монету можно перевернуть. Такую операцию разрешается проделать неограниченное число раз. При каких n можно вне зависимости от начального положения монет перевернуть их все одной стороной вверх?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2021-2022 гг

Первый этап **9 класс**

Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

9.1. Пусть числа x, y, u, v различны и выполнено соотношение $\frac{x+u}{x+v}=\frac{y+v}{y+u}$. Найдите все возможные значения суммы $x+y+u+v$.

9.2. Представить число 100 в виде суммы максимально возможного количества различных попарно взаимно простых натуральных чисел. Пояснение: условие означает, что наибольший общий делитель любых двух чисел, использованных в сумме, равен 1.

9.3. В выпуклом четырёхугольнике ABCD обозначим за P и R середины сторон AB и CD соответственно, а за Q и S - середины диагоналей BD и AC соответственно. Докажите, что, если отрезки PR и QS перпендикулярны, то длины сторон BC и AD четырёхугольника равны.

9.4. В окружности провели несколько различных хорд таким образом, что каждая из них проходит через середину хотя бы одной другой хорды. Докажите, что все проведённые хорды являются диаметрами окружности.

9.5. В какое наименьшее число цветов можно окрасить все клетки квадрата 6 на 6 так, чтобы в каждой горизонтали, вертикали и диагонали квадрата все клетки имели разный цвет? Пояснение: под диагональю квадрата понимаются все ряды из не менее, чем двух клеток, идущие диагонально от одного края квадрата до другого под углом 45° или 135° к горизонтали.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2021-2022 гг

Первый этап **9 класс**

Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

9.1. Пусть числа x, y, u, v различны и выполнено соотношение $\frac{x+u}{x+v}=\frac{y+v}{y+u}$. Найдите все возможные значения суммы $x+y+u+v$.

9.2. Представить число 100 в виде суммы максимально возможного количества различных попарно взаимно простых натуральных чисел. Пояснение: условие означает, что наибольший общий делитель любых двух чисел, использованных в сумме, равен 1.

9.3. В выпуклом четырёхугольнике ABCD обозначим за P и R середины сторон AB и CD соответственно, а за Q и S - середины диагоналей BD и AC соответственно. Докажите, что, если отрезки PR и QS перпендикулярны, то длины сторон BC и AD четырёхугольника равны.

9.4. В окружности провели несколько различных хорд таким образом, что каждая из них проходит через середину хотя бы одной другой хорды. Докажите, что все проведённые хорды являются диаметрами окружности.

9.5. В какое наименьшее число цветов можно окрасить все клетки квадрата 6 на 6 так, чтобы в каждой горизонтали, вертикали и диагонали квадрата все клетки имели разный цвет? Пояснение: под диагональю квадрата понимаются все ряды из не менее, чем двух клеток, идущие диагонально от одного края квадрата до другого под углом 45° или 135° к горизонтали.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2021-2022 гг

Первый этап **10 класс**

Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

10.1. Из Пахомово в Воробьёво шёл Иван. Ровно в полдень, когда он преодолел 4/9 всего пути, вдогонку ему из Пахомово выехал велосипедист Фома, а навстречу ему из Воробьёво вышел Ерёма. Фома обогнал Ивана в 13 часов, и встретил Ерёму в 13 часов 30 минут. Когда встретятся Иван и Ерёма?

10.2. Пусть x, y, z - действительные числа такие, что $(x+y+z)(xy+yz+xz)=xyz$. Докажите, что среди чисел x, y, z обязательно найдутся два, сумма которых равна нулю.

10.3. Набор из 35 прямоугольников, не являющихся квадратами, длины сторон которых являются целыми числами, таков, что из них можно составить 9 квадратов размера 10 см на 10 см. Докажите, что из прямоугольников этого набора можно составить два прямоугольника, площади которых различаются не более, чем 80 см². В обоих случаях используются все прямоугольники набора.

10.4. Собственным делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от 1 и самого числа. Найти все натуральные числа, у которых максимальный собственный делитель на 2 больше квадрата минимального собственного делителя.

10.5. Докажите, что для любой точки M внутри равностороннего треугольника ABC такой, что величина угла AMC равна 150º, из отрезков MA, MB и MC можно составить прямоугольный треугольник.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2021-2022 гг

Первый этап **10 класс**

Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

10.1. Из Пахомово в Воробьёво шёл Иван. Ровно в полдень, когда он преодолел 4/9 всего пути, вдогонку ему из Пахомово выехал велосипедист Фома, а навстречу ему из Воробьёво вышел Ерёма. Фома обогнал Ивана в 13 часов, и встретил Ерёму в 13 часов 30 минут. Когда встретятся Иван и Ерёма?

10.2. Пусть x, y, z - действительные числа такие, что $(x+y+z)(xy+yz+xz)=xyz$. Докажите, что среди чисел x, y, z обязательно найдутся два, сумма которых равна нулю.

10.3. Набор из 35 прямоугольников, не являющихся квадратами, длины сторон которых являются целыми числами, таков, что из них можно составить 9 квадратов размера 10 см на 10 см. Докажите, что из прямоугольников этого набора можно составить два прямоугольника, площади которых различаются не более, чем 80 см². В обоих случаях используются все прямоугольники набора.

10.4. Собственным делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от 1 и самого числа. Найти все натуральные числа, у которых максимальный собственный делитель на 2 больше квадрата минимального собственного делителя.

10.5. Докажите, что для любой точки M внутри равностороннего треугольника ABC такой, что величина угла AMC равна 150º, из отрезков MA, MB и MC можно составить прямоугольный треугольник.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2021-2022 гг

Первый этап **11 класс**

Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

11.1. Пусть x, y - действительные числа такие, что оба числа $x+\frac{1}{y}, y+\frac{1}{x}$ рациональны. Докажите, что тогда и число $x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}$ тоже рационально.

11.2. Последовательность действительных чисел $a_n, n=1,2,3,...$ такова, что $a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n+a_{n+1}}, n=1,2,3,...$ и $a_1=1$. Найдите явную формулу, выражающую число a_n через n.

11.3. В какое максимальное число цветов нужно окрасить все клетки квадрата 4 на 4 так, чтобы для каждой пары различных цветов нашлись две клетки этих цветов, находящиеся либо в одной строке, либо в одном столбце квадрата?

11.4. Обозначим за P основание высоты остроугольного треугольника ABC, опущенной из вершины B, а за M – точку, зеркально симметричную P относительно средней линии треугольника, параллельной его стороне BC. Доказать, что прямая BM проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

11.5. Найти все натуральные числа a такие, что произведение $n(n+a)$ не является квадратом натурального числа ни при каком натуральном n.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2021-2022 гг

Первый этап **11 класс**

Время написания работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

11.1. Пусть x, y - действительные числа такие, что оба числа $x+\frac{1}{y}, y+\frac{1}{x}$ рациональны. Докажите, что тогда и число $x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}$ тоже рационально.

11.2. Последовательность действительных чисел $a_n, n=1,2,3,...$ такова, что $a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n+a_{n+1}}, n=1,2,3,...$ и $a_1=1$. Найдите явную формулу, выражающую число a_n через n.

11.3. В какое максимальное число цветов нужно окрасить все клетки квадрата 4 на 4 так, чтобы для каждой пары различных цветов нашлись две клетки этих цветов, находящиеся либо в одной строке, либо в одном столбце квадрата?

11.4. Обозначим за P основание высоты остроугольного треугольника ABC, опущенной из вершины B, а за M – точку, зеркально симметричную P относительно средней линии треугольника, параллельной его стороне BC. Доказать, что прямая BM проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

11.5. Найти все натуральные числа a такие, что произведение $n(n+a)$ не является квадратом натурального числа ни при каком натуральном n.