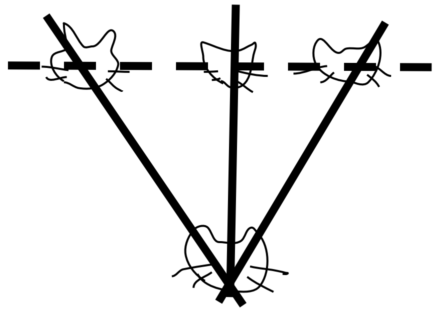
Всесибирская открытая олимпиада школьников 2021-2022 г.г. по математике
Основной отборочный этап
7 класс
Решения

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
Время выполнения 4 астрономических часа.



7.1. На картинке 4 котёнка образуют один ряд, в котором 3 котёнка, и три ряда, в которых по два котёнка. Разместите 6 котят на плоскости так, чтобы получилось 3 ряда, в каждом из которых ровно по 3 котёнка, и 6 рядов, в каждом из которых ровно по 2 котёнка (считайте котят точками на плоскости). *(Достаточно привести один пример)*

Решение. Посадим трёх котят в вершины произвольного треугольника, а остальных – в середины его сторон. Несложно понять, что условие задачи будет выполнено.

Критерии. Любой верный пример без объяснения – 7 баллов.

7.2. Элли и Тотошка красили ромашки на поле. В первый день Элли покрасила четырнадцатую часть всего поля. Во второй день она покрасила в два раза больше, чем в первый, а в третий — в два раза больше, чем во второй. Тотошка же в итоге покрасил суммарно 7000 ромашек. Сколько всего ромашек на поле, если известно, что они все оказались покрашены? *(Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет)*

Решение. Пусть на поле всего n ромашек. Тогда Элли покрасила $n/14 + 2n/14 + 4n/14 = 7n/14 = n/2$ ромашек всего. Значит, Тотошка тоже покрасил половину поля, откуда следует, что половина поля – это 7000 ромашек, а поле целиком – 14000.

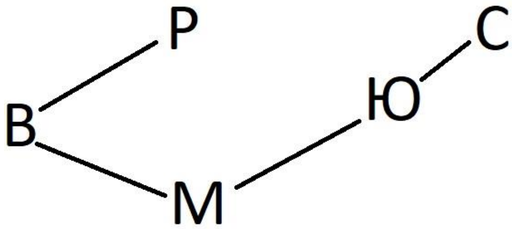
Критерии. Только ответ – 1 балл.
Только ответ с проверкой, что он верен – 2 балла.

7.3. Три одиннадцатиклассницы играли в крестики-нолики против двух девятиклассниц (в каждом матче встречались одиннадцатиклассница и девятиклассница). Известно, что Вероника выиграла у Риты, затем Юля выиграла у Светланы, а Вероника - у Марии, и, наконец, Мария выиграла у Юли. Как звали одиннадцатиклассниц? *(Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет)*

Решение. Вероника выиграла и у Риты, и у Марии. Значит, Рита и Мария из одного класса. Мария выиграла у Юли, значит, Юля не в одном классе с Марией, а значит, она с Вероникой. Аналогично, Юля выиграла у Светланы, поэтому Светлана тоже с Марией. Итого, получаем, что в одном классе Вероника и Юля, а в другом – Рита, Мария и Светлана. Так как одиннадцатиклассниц по условию три, это как раз Рита, Мария и Светлана.

Критерии. Только ответ – 1 балл.
Только ответ с проверкой, что он верен – 2 балла.

Решение 2. Нарисуем картинку, на которой соединим отрезками игравших друг с другом девочек. Понятно, что в этой цепочке классы девочек чередуются. Тогда Рита, Мария и Светлана из одного класса, а Вероника и Юля – из другого. Отсюда и находим одиннадцатиклассниц.



Критерии. (для решения с картинкой) Нарисована картинка – 3 балла.
Замечено, что две соседние девочки не могут быть одноклассницами, поэтому в этой цепочке классы чередуются – 2 балла.
Ответ – 2 балла.

7.4. Антону из деревни передали несколько кабачков, и он решил раздать их друзьям. Арине он отдал половину от полученного количества кабачков, а Вере — треть (тоже от полученного количества). Оказалось, что после этого у Арины количество кабачков стало выражаться квадратом некоторого натурального числа, а у Веры — кубом (до этого у них кабачков не было вообще). Найдите наименьшее возможное количество кабачков, которое мог получить Антон из деревни. *(Найдите ответ и докажите, что он минимален).*

Решение. Пусть Антон получил n кабачков. Так как и половина, и треть n – это целые числа, то n делится на 6, то есть $n = 6k$ для некоторого натурального k. Тогда известно, что $3k$ – это квадрат натурального числа, а $2k$ – куб. Пусть $k = 2^p 3^q m$. Другими словами, пусть p и q – это максимальные степени двойки и тройки, на которые делится k. Тогда $3k = 2^p 3^{q+1} m$, и, так как это квадрат, p и $q + 1$ – это чётные числа. С другой стороны, $2k = 2^{p+1} 3^q m$ – это куб, поэтому $p + 1$ и q делятся на 3. Заметим, что тогда p это хотя бы 2 (потому что $p + 1$ делится на 3), а q это хотя бы 3 (потому что q делится на 3 и $q \neq 0$ из условия чётности $q + 1$). Тогда k делится хотя бы на 4 и 27, откуда k это хотя бы 108, а n хотя бы 648. Очевидно, что $648 = 6 \times 4 \times 27$ подходит по построению.

Критерии. Только ответ – 1 балл.
Проверка, что ответ подходит – 1 балл (в данном решении эта проверка неявно следует из того, что мы ищем именно подходящие числа).
Доказано, что n делится на 6 – 1 балл.
Доказательство того, что k должно делиться на 4 и 27 (или что n делится на 8 и 81, что одно и то же) – по 2 балла за каждый факт.
Все вышестоящие баллы суммируются.
Ответ можно оставлять в форме произведения, за отсутствие явной записи баллы не снимать.

7.5. На вечеринку пришло 20 человек. Известно, у каждого из них ровно 14 друзей среди пришедших (дружба взаимна). Кроме того, посреди вечеринки 10 людей вышли на балкон, и оказалось, что все они дружат друг с другом. Докажите, что всех пришедших на вечеринку людей можно разделить по двум комнатам таким образом, чтобы в каждой комнате все дружили со всеми.

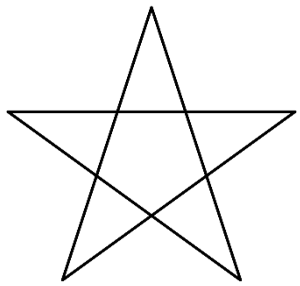
Решение. Пусть каждые два друга дадут по подзатыльнику друг другу. Зафиксируем десятерых, любые двое из которых друзья (те, кто вышел на балкон). Назовём их синими, а остальных десятерых – зелёными. Каждый из синих знаком с девятью синими и, стало быть, с пятью зелёными. Значит, всего синие дали зелёным 50 подзатыльников (следовательно, и зелёные синим тоже).
Поскольку в сумме зелёные дали $14 \times 10 = 140$ подзатыльников, 90 из них приходятся на подзатыльники, данные зелёными между собой. Так как каждый из зелёных мог дать подзатыльник только 9 зелёным (то есть, максимум $9*10$ подзатыльников всего), то зелёными были даны все возможные подзатыльники, то есть каждый из зелёных дружит с каждым, что и завершает доказательство.

Критерии. Только пример того, что такое возможно в конкретном случае – 0 баллов.
Доказано, что синие дали зелёным 50 подзатыльников – 2 балла.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2021-2022 г.г. по математике
Основной отборочный этап
8 класс
Решения

Каждая задача оценивается в 7 баллов.
Время выполнения 4 астрономических часа.

8.1. Разместите на плоскости 10 котят и 5 равных отрезков так, чтобы на каждом отрезке сидело по 4 котёнка (считайте котят точками на плоскости).



Решение. Посадим котят в вершины и узлы пентаграммы (фигура, образованная диагоналями правильного пятиугольника). Условие задачи будет выполнено.

Критерии. Любой верный пример без объяснения – 7 баллов.

8.2. Известно, что 70% математиков, ушедших в IT, жалеют о своей смене деятельности. При этом из всех людей, ушедших в IT, о смене деятельности жалеет только 7%. Сколько процентов из ушедших в IT являются математиками, если только они жалеют о смене деятельности?

Решение. Пусть всего в IT ушло x человек, а математиков из них y. По условию о смене деятельности, с одной стороны, жалеет $0.07x$ человек, а с другой – $0.7y$. Отсюда получаем, что $0.07x = 0.7y$, откуда $y/x = 0.1$, то есть, 10%.

Критерии. Только ответ – 1 балл.
Решение в частном случае (пусть есть 100 человек всего…) без ссылки на общий – не более 5 баллов.

8.3. Даны два числа a и b. Известно, что из четырёх чисел ab, $a + b$, $a - b$, a/b ровно три равны между собой (b не равно 0). Найдите a и b.

Решение. Очевидно, что $a + b \neq a - b$, поэтому именно одно из этих двух чисел отличается ото всех остальных. Тогда $ab = a/b$. Если $a = 0$, то числа из условия равны 0, b, $-b$, 0 соответственно, и условие выполнено быть не может. Тогда $a \neq 0$, и на него можно сократить, откуда $b = 1/b$, что равносильно $b = \pm 1$.
Если $b = 1$, то числа имеют вид a, $a + 1$, $a - 1$, a. Но первое число не может быть равно ни второму, ни третьему, значит, это вариант невозможен.
Если $b = -1$, то числа имеют вид $-a$, $a - 1$, $a + 1$, $-a$.

Если $-a = a - 1$, то $a = ½$.

Если $-a = a + 1$, то $a = -½$.

Отсюда получаем ответ: $a = \pm ½$, $b = -1$.

Критерии. Только полный верный ответ/ответ с проверкой (и больше ничего) – 1 балл.
Замечено, что $a + b \neq a - b$ – 2 балла.

Доказано, что $b = \pm 1$ (или, что то же самое, $b = 1/b$ или $b^2 = 1$) – 2 балла. При этом, если не рассмотрен случай $a = 0$, то один балл снимается.
Рассмотрен случай $b = 1$ – 1 балл.
Рассмотрен случай $b = -1$ – 2 балла. Все баллы суммируются (2 + 2 + 1 + 2 = 7)

8.4. Как-то раз в средневековой Англии за круглым столом собрались 2021 человек. Каждый из них был либо рыцарем, который всегда говорил правду, либо лжецом, который всегда лгал, причём среди присутствовавших имелся хотя бы один рыцарь и хотя бы один лжец. Кроме того, известно, что в этот день был сильный туман, и каждый человек видел только 12 ближайших соседей слева от себя и 12 ближайших соседей справа. Каждого сидящего за столом спросили: "Видишь ли ты среди других людей лжецов больше, чем рыцарей?". Докажите, что кто-то ответил "да".

Решение. Предположим, все люди ответили "нет". Найдём тогда соседних рыцаря и лжеца (например, можно взять рыцаря, который по условию есть, и сдвигаться по часовой стрелке, пока не найдётся лжец). Рассмотрим 26 человек $A_1,\ldots A_{26}$, у которых центральных – эти самые рыцарь A_{13} и лжец A_{14} (если они идут в другом порядке, перевернём нумерацию).
Так как рыцарь говорит "нет", то среди людей $A_1 \ldots A_{12}$ и $A_{14} \ldots A_{25}$ лжецов не больше, чем рыцарей. То есть, их там не более 12. Но A_{14} лжец, откуда следует, что среди $A_1 \ldots A_{12}$ и $A_{15} \ldots A_{25}$ лжецов не более 11.
Так как лжец говорит "нет", то среди людей $A_2 \ldots A_{13}$ и $A_{15} \ldots A_{26}$ лжецов больше, чем рыцарей. То есть, их там более 12. Но A_{13} рыцарь, поэтому среди $A_2 \ldots A_{12}$ и $A_{15} \ldots A_{26}$ лжецов более 12.
Последние два абзаца противоречат друг другу, так как новый лжец мог появиться только один – это человек A_{26}. А их количество должно увеличиться хотя бы на 2 – с числа не более 11 до числа больше 12. Противоречие с предположением, что все ответят "нет".

Критерии. Идея рассмотреть рыцаря и лжеца, которые являются соседями – 2 балла.
Потерян нестрогий знак неравенства в верном решении ("лжец говорит, что лжецов больше, значит, рыцарей больше") – снимать 2 балла.

8.5. На столе по кругу лежит $n > 3$ одинаковых монет, которые могут располагаться либо вверх орлом, либо вверх решкой. Если рядом с некоторой монетой лежат два орла или две решки, то эту монету можно перевернуть. Такую операцию разрешается проделать неограниченное число раз. При каких n можно вне зависимости от начального положения монет перевернуть их все одной стороной вверх?

Решение. Пусть n нечётно. Разделим весь круг на группы из одинаковых подряд идущих монет. Найдётся группа из нечётного числа монет (иначе общее количество монет в круге будет чётным как сумма чётных чисел). Рассмотрим эту группу. Перевернём в ней вторую, четвёртую и т.д. – все чётные монеты. После этого мы сможем перевернуть в ней первую, третью и т.д. – все нечётные монеты. В итоге количество групп в круге уменьшится, и мы сможем повторить все те же самые рассуждения. В конце концов группа останется только одна, но это и будет значить, что все монеты перевёрнуты одинаково.

Теперь пусть n чётно. Если n делится на 4, то в расстановке …ООРРООРР… нельзя сделать вообще ни одной операции. Если не делится, то рассмотрим расстановку …ООРРРРООРРООРР… – одна группа из четырёх решек, а остальные группы по 2 орла или 2 решки. Если мы перевернём вторую решку из этих четырёх, то после этого мы можем перевернуть только первую, и получить аналогичную расстановку, в которой 4 орла. Если перевернём третью, то затем только четвёртую, и снова 4 орла. Для этой расстановки аналогичными рассуждениями можно показать, что мы можем получить только расстановку, которая была изначально (или сдвинуть эту группу из 4 решек). Значит, перевернуть все монеты одной стороной не выйдет.

Критерии. Верно рассмотрен нечётный случай – 3 балла.
Верно рассмотрен случай, когда n делится на 4 – 1 балл.
Верно рассмотрен случай, когда n чётное, но не делится на 4 – 3 балла. При этом, если приведена только расстановка, но не доказано, почему она подходит – 2 балла из 3 за этот случай.
Все эти баллы суммируются.

Решения заданий первого этапа
Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2021-2022 гг.
Решения всех заданий оцениваются из 7 баллов
9 класс

9.1. Пусть числа x, y, u, v различны и выполнено соотношение $\frac{x+u}{x+v}=\frac{y+v}{y+u}$. Найдите все возможные значения суммы $x+y+u+v$.

Ответ. $x+y+u+v=0$.

Решение. Приведём разность левой и правой частей выражения из условия, равную нулю, к общему знаменателю и разложим числитель на множители:
$$\frac{x+u}{x+v}-\frac{y+v}{y+u}=\frac{xu+yu+u^2-yv-xv-v^2}{(x+v)(y+u)}=\frac{(x+y)(u-v)+(u+v)(u-v)}{(x+v)(y+u)}=\frac{(x+y+u+v)(u-v)}{(x+v)(y+u)}.$$
Следовательно, числитель дроби равен 0, а разность $u-v$ не равна 0 по условию, поэтому равна 0 первая скобка, то есть сумма $x+y+u+v$.

Критерии проверки. В рассуждениях не упомянуто явно, что разность $u-v$ не равна 0: минус 2 балла.

9.2. Представить число 100 в виде суммы максимально возможного количества различных попарно взаимно простых натуральных чисел. Пояснение: условие означает, что наибольший общий делитель любых двух чисел, использованных в сумме, равен 1.

Ответ. 100 является суммой всех девяти первых простых чисел от 2 до 23 включительно.

Решение. Действительно, $100=2+3+5+7+11+13+17+19+23$, количество слагаемых – 9 - при этом максимально возможное. Если бы сто являлось суммой не менее, чем десяти различных попарно взаимно простых натуральных чисел, то в силу попарной взаимной простоты простые множители у любых двух из них были бы различны. Оставив от каждого не равного 1 числа любой его простой делитель, мы бы получили десять или больше различных чисел, каждое из которых простое кроме, возможно одного, равного 1, сумма которых не превосходит 100. Последнее невозможно. поскольку сумма десяти наименьших простых чисел равна 2+3+5+7+11+13+17+19+23+29=129>100. а сумма 1 и девяти наименьших простых чисел равна 1+2+3+5+7+11+13+17+19+23=101>100.

Критерии проверки. Приведён пример 2+3+5+7+11+13+17+19+23=100: 3 балла.
Доказана максимальность примера: 4 балла. Итого 7 баллов.
При оценке не рассматривается случай, когда одно из чисел равно единице: минус 2 балла. Все ссылки на пример, как на «наилучший случай» при попытках обосновании максимальности: 0 баллов за обоснование.

9.3. В выпуклом четырёхугольнике ABCD обозначим за P и R середины сторон AB и CD соответственно, а за Q и S - середины диагоналей BD и AC соответственно. Докажите, что, если отрезки PR и QS перпендикулярны, то длины сторон BC и AD четырёхугольника равны.

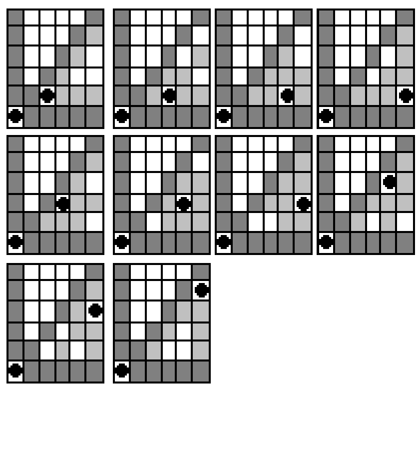
Доказательство. Отрезки PQ и RS являются средними линиями в треугольниках ABD и ACD соответственно, поэтому они параллельны стороне AD и между собой, а их длины равны половине длины AD. Аналогично, отрезки PS и QR являются средними линиями в треугольниках ABC и DBC соответственно, поэтому они параллельны стороне BC и между собой, а их длины равны половине длины BC. Следовательно, четырёхугольник PQRS является параллелограммом с перпендикулярными диагоналями PR и QS. Хорошо известно, что такой параллелограмм является ромбом, а все стороны ромба равны, поэтому стороны AD и BC исходного четырёхугольника ABCD равны удвоенным длинам сторон PQ и PS ромба, то есть равны между собой.

Критерии проверки. Показано, что PQRS является параллелограммом: 2 балла.
Доказывать, что параллелограмм с перпендикулярными диагоналями является ромбом в решении не обязательно.

9.4. В окружности провели несколько различных хорд таким образом, что каждая из них проходит через середину хотя бы одной другой хорды. Докажите, что все проведённые хорды являются диаметрами окружности.

Доказательство. Рассмотрим отрезки, соединяющие центр окружности О с серединой каждой хорды, по известному свойству они являются серединными перпендикулярами к хордам а их длины равны расстояниям от О до хорд. Последнее означает, что расстояние от О до любой точки хорды, отличной от её середины, будет больше длины такого отрезка.
Допустим, не все проведённые хорды являются диаметрами окружности. Рассмотрим l - любую из хорд, для которой расстояние от центра максимально среди всех таких расстояний, оно не равно 0 по предположению. По условию, l пересекает некоторую другую хорду m в её середине М. Если М отлична от середины хорды l.. то длина ОМ, равная расстоянию от О до m, больше расстояния от О до l, что противоречит выбору l.
Если середины хорд l и m совпадают, то совпадают и сами хорды, так как ОМ будет их общим серединным перпендикуляром – снова противоречит тому, что все хорды по условию различны. Именно здесь использовано предположение о том, что не все хорды. а конкретно l и m, являются диаметрами окружности, для них ОМ – отрезок, а не точка.
Критерии проверки. Идея рассмотрения самой удалённой от центра хорды l: 3 балла.
Доказательство того, что середины хорд l и m должны совпадать: 2 балла.
Доказательство того, что, если середины хорд l и m, не являющихся диаметрами, совпадают, то и сами хорды совпадают: 2 балла.
Если в рассуждениях нет явного пояснения, как использовано то, что рассматриваемые хорды – не диаметры: минус 1 балл.

9.5. В какое наименьшее число цветов можно окрасить все клетки квадрата 6 на 6 так, чтобы в каждой горизонтали, вертикали и диагонали квадрата все клетки имели разный цвет? Пояснение: под диагональю квадрата понимаются все ряды из не менее, чем двух клеток, идущие диагонально от одного края квадрата до другого под углом 45^{o} или 135^{o} к горизонтали.
Ответ. В 7 цветов.
Решение. Приведём пример раскраски в 7 цветов, удовлетворяющей условию задачи. Рассмотрим квадрат 7 на 7, и окрасим его требуемым образом в 7 цветов с помощью известного приёма: окраска каждой следующей горизонтали получается из раскраски предыдущей циклическим сдвигом на 2 клетки. Затем выберем в нём левый нижний угловой квадрат 6 на 6, это и будет требуемый пример.
Докажем минимальность 7 цветов. Каждая горизонталь квадрата содержит 6 клеток, поэтому для корректной раскраски потребуется не менее 6 цветов. Предположим, что нам удалось выкрасить квадрат в 6 цветов требуемым в условии образом, тогда клеток каждого цвета будет ровно 6 и располагаться они будут все в различных вертикалях и горизонталях квадрата. Назовём цвет, в который окрашена левая нижняя угловая клетка А квадрата чёрным, и покажем, что оставшиеся 5 чёрных клеток не могут располагаться в правом верхнем квадрате 5 на 5 в разных вертикалях и горизонталях и при этом не лежать на его главной диагонали, уже контролируемой клеткой А. В противном случае можно считать, что не меньше трёх из них располагались бы ниже главной диагонали в фигуре «лесенка» из 10 клеток, состоящей из 4 полосок по 4,3,2,1 клеток соответственно. Однако непосредственно проверяется, что для любой клетки «лесенки» клетки, не находящиеся с окрашенной в одной горизонтали, вертикали или горизонтали могут корректно содержать ещё не более одной чёрной клетки. Возможные положения этой второй чёрной клетки рассмотрены на рисунке. Клетки, контролируемые ей, окрашены светло-серым цветом.
Следовательно. раскрасить квадрат 6 на 6 требуемым образом в условии образом в 6 цветов невозможно.
Критерии проверки. Любой явный и правильный пример на 7 цветов: 3 балла. Его правильность при этом можно не доказывать.
Замечено, что цветов должно быть не меньше 6: 1 балл.
Доказано, что цветов должно быть не меньше 7: 4 балла.



10 класс

Решения всех заданий оцениваются из 7 баллов

10.1. Из Пахомово в Воробьёво шёл Иван. Ровно в полдень, когда он преодолел 4/9 всего пути, вдогонку ему из Пахомово выехал велосипедист Фома, а навстречу ему из Воробьёво вышел Ерёма. Фома обогнал Ивана в 13 часов, и встретил Ерёму в 13 часов 30 минут. Когда встретятся Иван и Ерёма?

Ответ. В 14 часов 30 минут

Решение. Обозначим расстояние от Пахомово до Воробьёво за Р, а скорости участников перфоманса за И, Ф и Е км в час соответственно, по первым буквам имён. Тогда по условию, Фома и Иван движутся в одном направлении, а Фома и Ерёма – навстречу, и в полдень их разделяют: первую пару 4/9 Р, а вторую – ровно Р. Составляем уравнения $\frac{4/9\cdot P}{\Phi - И} = 1$, $\frac{P}{\Phi + E} = \frac{3}{2}$, откуда $И + E = \frac{2P}{3} - \frac{4P}{9} = \frac{2P}{9}$ и время, за которое Иван и Ерёма преодолеют разделяющие их 5/9 Р, двигаясь навстречу, равно $\frac{5P/9}{2P/9} = \frac{5}{2}$. Значит, встретятся они в $12 + 2{,}5 = 14{,}5$ часов = 14 часов 30 минут.

Критерии проверки. Угадан ответ с проверкой: 1 балл. Выписана верная система уравнений (но не решена): 3 балла.

10.2. Пусть x, y, z - действительные числа такие, что $(x+y+z)(xy+yz+xz) = xyz$. Докажите, что среди чисел x, y, z обязательно найдутся два, сумма которых равна нулю.

Доказательство. Раскроем скобки в выражении из условия, получим $(x+y+z)(xy+yz+xz) = 3xyz + x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + z^2y + zy^2 = xyz$, откуда $2xyz + x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + z^2y + zy^2 = 0$.

Условие, что среди x, y, z обязательно найдутся два, сумма которых равна нулю эквивалентно равенству нулю произведения $(x+y)(y+z)(x+z)$. Раскрываем в нём скобки, получаем в точности полученное в предыдущем абзаце выражение $2xyz + x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + z^2y + zy^2$, равное нулю по условию.

Критерии проверки.

10.3. Набор из 35 прямоугольников, не являющихся квадратами, длины сторон которых являются целыми числами, таков, что из них можно составить 9 квадратов размера 10 см на 10 см. Докажите, что из прямоугольников этого набора можно составить два прямоугольника, площади которых различаются не более, чем 80 см². В обоих случаях используются все прямоугольники набора.

Доказательство. Прямоугольников в наборе всего 35, поэтому как минимум один из 9 квадратов 10 на 10 будет составлен не более, чем из трёх прямоугольников (и, по условию, не менее, чем из двух). Квадрат имеет 4 вершины, поэтому минимум две из них будут принадлежать одному из этих прямоугольников. значит длина одной из его сторон равна 10 см, а другая целочисленная и равна x, где $1 \le x \le 9$, так как этот прямоугольник меньше квадрата. Сложим из оставшихся прямоугольников два равных прямоугольника размера 10 см на 40 см (это по 4 квадрата 10 на 10, всего 8 штук), прямоугольник размера 10 на x приложим к одному из них, а остаток от квадрата, имеющий размер 10 на $10 - x$ - к другому. Разность их площадей равна $10(40 + x) - 10(40 + 10 - x) = 10(2x - 10)$. что по модулю не больше 80, так как $1 \le x \le 9$.

Критерии проверки. Показано, что как минимум один из 9 квадратов 10 на 10 будет составлен не более, чем из 3 прямоугольников: 1 балла.

Доказано, что найдётся прямоугольник со стороной 10 см: 2 балла.

Доказано, что вторая сторона этого прямоугольника имеет длину x, где $1 \le x \le 9$: 1 балл. Схема построения прямоугольников, площади которых различаются не более, чем 80 см²: 2 балла. Явное доказательство того, что при этой схеме разность площадей прямоугольников действительно не больше 80 см²: 1 балл.

10.4. Собственным делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от 1 и самого числа. Найти все натуральные числа, у которых максимальный собственный делитель на 2 больше квадрата минимального собственного делителя.
Ответ. $n = 12$ и $n = 33$.
Решение. Обозначим искомое число за n, а его минимальный собственный делитель, являющийся простым числом - за p. Наибольший собственный делитель n равен $\frac{n}{p}$, что по условию равно p^2+2, следовательно, n имеет вид $n = p(p^2+2)$, причём p - его минимальный собственный делитель. Последнее равносильно тому, что число p^2+2 не имеет собственных делителей меньших, чем p. Очевидно, это верно для $p = 2, n = 12$ и $p = 3, n = 33$. Любое простое число, большее 3, при делении на 3 даёт остаток 1 или 2, следовательно его квадрат при делении на 3 лаёт остаток 1, а после прибавления 2 делится на 3. Поэтому минимальным собственным делителем числа $n = p(p^2+2)$ при $p > 3$ будет 3, а не p, и оно не удовлетворяет условию задачи.
Критерии проверки. Замечено, что минимальный собственный делитель n является простым числом p: 1 балл.

Замечено, что максимальный собственный делитель n является числом $\frac{n}{p}$: 1 балл.

Нахождение формулы $n = p(p^2+2)$: 1 балл.

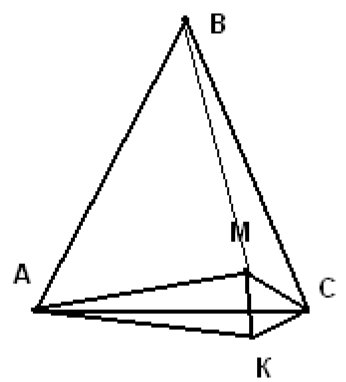
Указание ответа в виде $n = p(p^2+2)$, где p - произвольное простое число: 3 балла.

Если обнаружено, что не все простые p подходят и делаются попытки отбраковки, не доведённые до верного ответа: плюс ещё1 балл.

За каждый найденный подбором верный ответ с проверкой: по 1 баллу. Всего только за угаданные ответы 2 балла.

10.5. Докажите, что для любой точки M внутри равностороннего треугольника ABC такой, что величина угла AMC равна 150º, из отрезков MA, MB и MC можно составить прямоугольный треугольник.

Доказательство. Построим на отрезке CM равносторонний треугольник CMK так, чтобы его вершина K лежала ниже стороны AC. Углы ACB и MCK равны по 60º, поэтому равны углы ACK и BCM. Следовательно, треугольники ACK и BCM равны по парам равным парам сторон AC=BC и CM=CK и равным углам ACK и BCM между ними. Значит, в этих треугольниках равны и третьи соответствующие стороны AK и BM. Таким образом. в треугольнике AMK длины сторон AM, MK и AK равны соответственно длинам отрезков AM, MC и MB, а угол AMK равен разности углов AMC и KMC, то есть 150º-60º=90º. Требуемый в условии прямоугольный треугольник построен.



Критерии проверки. Идея построения треугольника KMC: 2 балла. Доказательство равенства треугольников ACK и BCM: 2 балла.

11 класс
Решения всех заданий оцениваются из 7 баллов

11.1. Пусть x, y - действительные числа такие, что оба числа $x+\frac{1}{y}, y+\frac{1}{x}$ рациональны. Докажите, что тогда и число $x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}$ тоже рационально.

Доказательство. По условию, оба числа $x+\frac{1}{y}, y+\frac{1}{x}$ рациональны, значит рационально и их произведение, равное $xy+2+\frac{1}{xy}$**, с**ледовательно, рациональна сумма $xy+\frac{1}{xy}$. Тогда рационален и её квадрат, равный $x^2y^2+2+\frac{1}{x^2y^2}$**,** а вместе с ним и требуемое в условии выражение $x^2y^2+\frac{1}{x^2y^2}$**.**

Критерии проверки. Установлена рациональность выражения $xy+\frac{1}{xy}$: 3 балла.

Если в решении заявляется о рациональности или целочисленности самих чисел x, y**: 0** баллов.

11.2. Последовательность действительных чисел $a_n, n=1,2,3,...$ такова, что $a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n+a_{n+1}}, n=1,2,3,...$ и $a_1=1$**.** Найдите явную формулу, выражающую число a_n через n**.**

Ответ. $a_n=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$**.**

Решение. Посчитаем первые члены последовательности $a_n, n=2,3$. Для a_2 имеем по условию $a_2=1+\sqrt{1+a_2}$, то есть $a_2{}^2-3a_2=0$ и $a_2>1$**,** откуда $a_2=3=1+2$**.** Для a_3 имеем тогда $a_3=3+\sqrt{3+a_3}$, то есть $a_3{}^2-7a_3+6=0$ и $a_3>3$, откуда $a_3=6=1+2+3$. Отсюда легко угадывается общая формула $a_n=1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$**.**

Докажем её по индукции. База уже доказана для $n=1,2,3$**.** Пусть формула верна для n**,** тогда для a_{n+1} имеем по условию $a_{n+1}=\frac{n(n+1)}{2}+\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}+a_{n+1}},$. то есть $a_{n+1}{}^2-(n^2+n+1)a_{n+1}+\frac{n^4+2n^3-n^2-2n}{4}=0$ и $a_{n+1}>\frac{n(n+1)}{2}$**.** Дискриминант этого квадратного уравнения равен $(n^2+n+1)^2-(n^4+2n^3-n^2-2n)=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$, откуда $a_{n+1}=\frac{(n^2+n+1)\pm(2n+1)}{2}=\frac{n^2+3n+2}{2},\frac{n^2-n}{2}$**.** С учётом ограничения $a_{n+1}>\frac{n(n+1)}{2}$ получаем $a_{n+1}=\frac{n^2+3n+2}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. Формула для a_n угадана верно и проверена для малых $n=2,3$: 1 балл**.** Формула для a_n найдена верно и полностью обоснована (с отбором нужных корней) для малых $n=2,3$, но не доказана в общем случае: 2 балла.

Есть доказательство формулы в общем случае, но нет пояснения отбору нужного корня: минус 2 балла.

11.3. В какое максимальное число цветов нужно окрасить все клетки квадрата 4 на 4 так, чтобы для каждой пары различных цветов нашлись две клетки этих цветов, находящиеся либо в одной строке, либо в одном столбце квадрата?

Ответ. В 8 цветов.

Решение. Если бы клетки были раскрашены в 9 и более цветов, то нашёлся бы цвет, в который окрашена всего одна клетка. Клеток, расположенных с ней в одной строке или столбце всего 6, поэтому других цветов, образующих с ней пару, требуемую в условии. не больше 6 – противоречие. Следовательно, клетки могут быть окрашены не более, чем в 8 цветов.

Приведём два существенно различных примера требуемой в условии окраски в 8 цветов, при этом в каждый цвет окрашены ровно по две клетки квадрата.

5	6	3	8
3	4	2	7
2	1	6	5
1	7	8	4

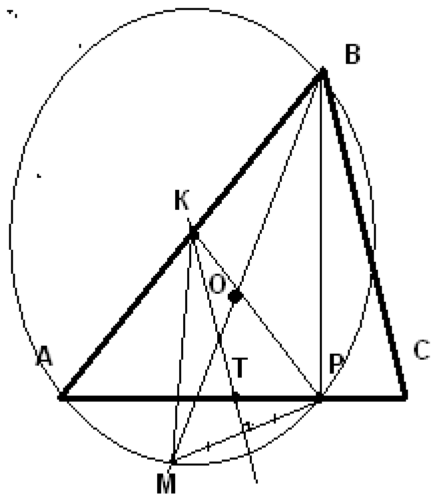
6	7	8	3
4	5	2	6
2	3	4	5
1	1	7	8

Критерии проверки. Доказано, что клетки не могут быть окрашены более, чем в 8 цветов (то есть сделана верхняя оценка числа цветов): 3 балла.

Явно приведён любой верный пример требуемой в условии окраски в 8 цветов: 3 балла. Обоснование его и описание идеи построения не требуются.

Есть и пример и оценка: 7 баллов.

11.4. Обозначим за P основание высоты остроугольного треугольника ABC, опущенной из вершины B, а за M – точку, зеркально симметричную P относительно средней линии треугольника, параллельной его стороне BC. Доказать, что прямая BM проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.



Доказательство. Обозначим за K и T середины сторон AB и AC соответственно. По построению, отрезки KP и KM симметричны, поэтому их длины равны. Точка K является серединой гипотенузы прямоугольного треугольника ABP, поэтому KA=KB=KP=KM и M лежит на описанной окружности треугольника ABP. Следовательно, равны вписанные углы ABM и APM, опирающиеся на общую дугу AM.

Подсчитаем величину угла APM: она равна величине BPM минус 90º, а величина BPM равна сумме $\angle BPK=\angle KBP=90^\circ-A$ и $\angle KPM=90^\circ-PKT$. Из равнобедренного треугольника AKP величина $\angle PKT$ равна разности $\angle AKP=180^\circ-2A$ и $\angle AKT=B$, поэтому $\angle APM=\angle BPM-90^\circ=(90^\circ-A)+(90^\circ-\angle PKT)-90^\circ=90^\circ-A-PKT=90^\circ-A-((180-2A)-B)=B+A-90^\circ=90^\circ-C$.

С другой стороны, величина центрального угла AOB равна удвоенной величине вписанного угла ACB, опирающегося на дугу AB, то есть 2C. Тогда величина $\angle ABO$ равна $90^\circ-\angle AOB/2=90^\circ-C=\angle APM=\angle ABM$. Равенство углов ABO и ABM обозначает, что точка O лежит на прямой BM, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. Показано, что M лежит на описанной окружности треугольника ABP: 1 балл. Найден угол APM: 3 балла. Показано равенство углов APM и ABM: 1 балл. Найден угол ABO: 1 балл. Указано, что равенство углов ABO и ABM обозначает, что точка O лежит на прямой BM: 1 балл.

Итого 7 баллов.

11.5. Найти все натуральные числа a такие, что произведение $n(n+a)$ не является квадратом натурального числа ни при каком натуральном n.

Ответ. $a = 1,2,4$.

Решение. То, что произведение $n(n+a)$ не является квадратом натурального числа при $a = 1,2,4$ следует из неравенств $n^2 < n(n+1) < n(n+2) < (n+1)^2$ и $n^2 < n(n+4) < (n+2)^2, n(n+4) \neq (n+1)^2$. Докажем, что при всех остальных натуральных a произведение $n(n+a)$ всегда является квадратом натурального числа при подходящем значении n.

Пусть сначала a не является степенью двойки, то есть записывается в виде $a = 2^k(2m+1)$ при некоторых $k \geq 0, m \geq 1$. В этом случае при любом натуральном n имеем $n(n+a) = n^2 + 2 \cdot 2^k \cdot m \cdot n + 2^k \cdot n = (n+2^k m)^2 + 2^k \cdot n - 2^{2k} m^2$. Положим $n = 2^k m^2 \geq 1$ - натуральное число, тогда $n(n+a) = (n+2^k m)^2$ - квадрат натурального числа.

Рассмотрим оставшийся случай, когда a является степенью двойки, отличной от 1, 2 и 4, то есть записывается в виде $a = 2^k$ при некотором $k \geq 3$. В этом случае при любом натуральном n имеем $n(n+a) = n^2 + 2^k n = n^2 + 2 \cdot 2^{k-2} \cdot n + 2^{k-1} n = (n+2^{k-2})^2 + 2^{k-1} n - 2^{2k-4}$. Положим $n = 2^{k-3} \geq 1$ - натуральное число, тогда $n(n+a) = (n+2^{k-2})^2$ - квадрат натурального числа.

Критерии проверки. Доказано, что $a = 1,2$ являются решениями задачи: 1 балл. Доказано, что $a = 4$ является решением задачи: 1 балл. Доказано, что для какой-то бесконечной серии значений a (скажем, для всех нечётных) произведение $n(n+a)$ является точным квадратом при подходящем значении n: 1 балл. При этом подразумевается, что тех a, для которых ответ остался неясным, тоже бесконечно много.