Решения и критерии проверки задач Заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. На некотором острове живёт 2018 человек, каждый из которых является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжёт. Известно, что каждый человек дружит ровно с двумя другими. Однажды каждый из островитян заявил, что дружит ровно с одним лжецом. Обязательно ли все островитяне лжецы?

Ответ: нет, не обязательно.

Решение: например, может оказаться, что если каждый возьмёт двух своих друзей за руки, то 2015 лжецов будут стоять в одном большом хороводе, а в другом хороводе будет два рыцаря и один лжец. При этом каждый лжец из большого хоровода будет лгать, так как оба его друга будут лжецами, а не только один. Рыцари из маленького хоровода будут говорить правду, так как у них есть по одному другу-лжецу и по одному другу-рыцарю. Наконец, лжец из маленького хоровода будет лгать, так как у него не будет ни одного друга-лжеца.

Критерии: только ответ – 0 баллов, пример без доказательства, что он подходит – 5 баллов, любой пример с доказательством того, что он подходит – 7 баллов.

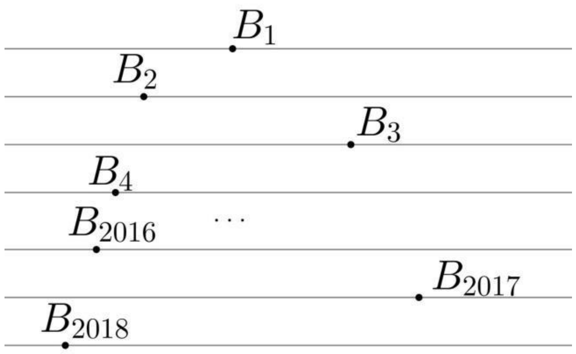
7.2. Квадрат со стороной 6 клеточек разрезан по сторонам сетки на 8 прямоугольников. Докажите, что какие-то два из этих прямоугольников равны по площади.

Решение: Предположим, что все прямоугольники различны по площади. Заметим, что тогда наименьшую суммарную площадь 36 имеет набор прямоугольников с площадями 1,2,3…,8. Тогда если хотя бы один прямоугольник будет иметь другую площадь, то они все не влезут в квадрат. Значит, квадрат был разрезан именно на прямоугольники такой площади. Однако, прямоугольник площади 7 может иметь размеры только 1 на 7, и не помещается в такой квадрат, а значит, вырезан из него быть не может. Противоречие.

Критерии: Замечено, что прямоугольники должны иметь площади 1,2,...,8 – 3 балла.

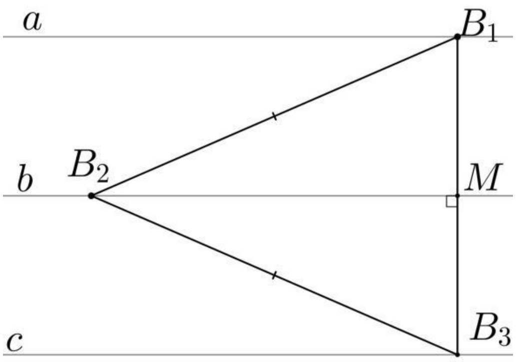
7.3. На плоскости через одинаковое расстояние расположены 2018 параллельных прямых. На каждой прямой расположено по одной точке. Точки B_1 и B_2 взяты произвольно на двух первых прямых. Затем точка B_3 взята так, что $B_1B_2 = B_2B_3$; B_4 так, что $B_1B_3 = B_3B_4$; …; B_i так, что $B_1B_{i-1} = B_{i-1}B_i$; …; B_{2018} так, что $B_1B_{2017} = B_{2017}B_{2018}$. При этом, если очередную точку можно выбрать двумя способами, то для нечётного номера выбирают правую точку, для чётного – более левую точку (см. рисунок). Докажите, что расположение точки B_{2018} зависит только от расположения точки B_1.

Решение: Докажем, что прямая B_1B_3 перпендикулярна данным параллельным прямым. Тем



самым докажем, что расположение точки B_3 зависит только от расположения точки B_1, а значит и дальше от B_2 ничего не зависит.

Обозначим прямую, на которой находится точка B_2 – b, а точку пересечения прямой B_1B_3 и b за M. Поймём, что отрезки B_1M и B_3M равны. Действительно, если это не так, то из точки M можно



опустить перпендикуляры MC_1 и MC_3 на прямые a и b. Тогда в треугольниках MC_1B_1 и MC_2B_2 равны стороны MC_1 и MC_3 (как расстояния между прямыми) и две пары углов (одна пара прямых углов по построению и пара вертикальных углов), прилежащих к этой стороне, тогда равны и треугольники, а значит, и соответствующие стороны B_1M и B_3M. Таким образом, B_2M – медиана в равнобедренном треугольнике $B_1B_2B_3$, а значит, она же является высотой. Таким образом, B_1B_3 перпендикулярна данным параллельным прямым, что и завершает доказательство.
Критерии: Доказано, что B_3B_1 перпендикулярен параллельным прямым, дальнейших продвижений нет – 5 баллов.

7.4. Число называется хорошим, если любые две соседние цифры в его записи отличаются хотя бы на 5. Вера написала хорошее число, а потом заменила одинаковые его цифры на одинаковые буквы, а разные – на разные. Могло ли у неё получиться слово НОВОСИБИРСК?
Ответ: нет.
Решение: Допустим, так могло получиться. Назовём маленькими цифрами – цифры 0, 1, 2, 3, 4, а оставшиеся цифры – большими. Заметим, что любые при описанной замене две маленькие цифры не могут стоять подряд, как не могут стоять подряд и две большие цифры, так как разность между любыми двумя маленькими (и любыми двумя большими) цифрами не превосходит 4. Значит, маленькие и большие цифры чередуются. Замети, что между двумя буквами С стоит 4 буквы, а значит, одна буква С заменяет маленькую цифру, а другая – большую, но при этом означают одну и ту же цифру, что невозможно.
Критерии: Только ответ – 0 баллов. Необоснованное замечание, что маленькие и большие цифры чередуются – не снимать. Идея чередования больших и маленьких цифр без дальнейших продвижений – 2 балла.

7.5. Шахматную доску со стороной в 100 клеток по линиям сетки разрезали на квадраты с нечётными сторонами (не обязательно равные), а затем в каждом полученном квадрате отметили центральную клетку. Докажите, что белых и черных клеток оказалось отмечено поровну.
Решение: Возьмём произвольный квадрат с нечётной стороной. Заметим, что в нём либо чёрных клеток на 1 больше, чем белых, либо наоборот. При том, если чёрных клеток больше, то центральная клетка чёрная, а если больше белых – то центральная клетка белая. Действительно, разобьём все строчки на пары – тогда такие пары вносят одинаковый вклад в количество чёрных и белых клеток. Остаётся одна строчка с нечётным количеством клеток. В ней снова можем разбить все клетки слева направо на пары. И останется одна угловая клетка, цвет которой и определяет, каких клеток в квадрате больше. Пусть эта клетка чёрная. Тогда в строке, в которой эта клетка содержится, другая угловая клетка – тоже чёрная. Аналогично, для столбца, содержащего эту угловую клетку. Таким образом, все угловые клетки одного цвета. Значит, и главная диагональ того же цвета. Следовательно, центральная клетка покрашена в тот цвет, который преобладает в данном квадрате, и без неё чёрных и белых клеток поровну.

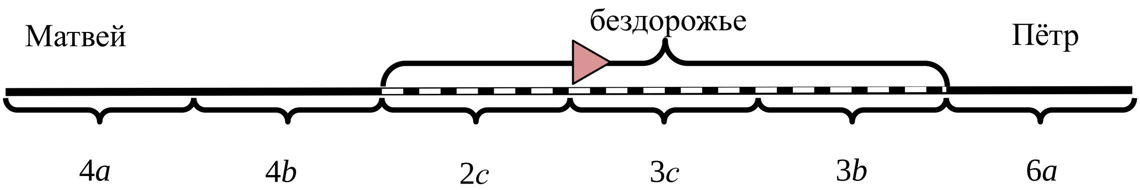
Итак, вырежем во всех квадратах центральные клетки. После этого белых и чёрных клеток станет поровну. Замети, что в изначальном квадрате клеток обоих цветов было поровну. Значит, удалили клеток разных цветов равное количество.
Критерии: Не обосновано, что в квадрате с нечётной стороной, чёрных клеток на одну больше или на одну меньше – не снимать.
Не обосновано, что центральная клетка покрашена в тот цвет, который преобладает – не снимать.

Решения и критерии проверки задач Заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

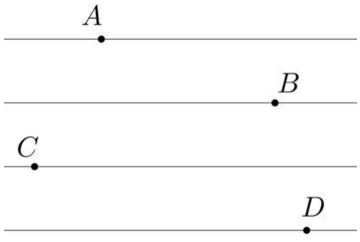
8.1. Число называется хорошим, если любые две соседние цифры в его записи отличаются хотя бы на 4. Вера написала некоторое хорошее число, а потом заменила одинаковые его цифры на одинаковые буквы, а разные – на разные. Могло ли у неё получиться слово НОВОСИБИРСК?
Ответ: Могло, например, подойдёт число 82729161593 (Н = 8, О = 2, В = 7, С = 9, И = 1, Б = 6, Р = 5, К = 3).
Критерий: любой подходящий пример без проверки – 7 баллов.

8.2. Матвей вышел из Тотьмы, а одновременно с ним Пётр выбежал навстречу из Калуги по той же дороге. В одинаковых условиях скорости мальчиков относятся как 2 : 3 и постоянны. В какой-то момент на их пути начинается бездорожье (возможно, в различное время) и продолжается до самого момента встречи. На бездорожье скорость каждого падает в два раза. Как относятся расстояния, пройденные по бездорожью Петром и Матвеем, если они встретились ровно посередине между городами, а бездорожье составляет 2/3 пути между Калугой и Тотьмой?
Ответ: Расстояния, пройденные по бездорожью Матвеем и Петром, относятся как 1 : 3.
Решение: Если бы бездорожья на стороне Матвея было бы больше или столько же, сколько у Петра, то скорость Петра всегда бы была больше, встреча бы не могла бы произойти посередине пути. Значит, Пётр шёл по бездорожью дольше.
Пусть Пётр шёл до бездорожья $6a$ километров, тогда Матвей за это время прошёл – $4a$ километров. Потом Пётр проходит $3b$ километром, до момента, когда Бездорожье не начнётся у Матвея. Матвей за это время проходит $4b$. Затем до встречи Пётр проходит $3c$, а Матвей – $2c$.



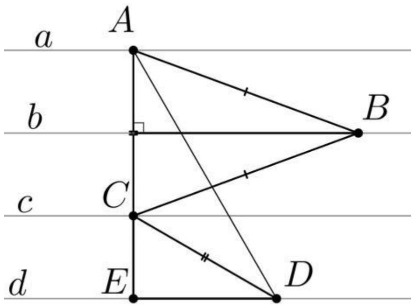
Итак, с одной стороны: $4a + 4b + 2c = 6a + 3b + 3c$, так как встреча произошла на середине пути.
С другой стороны, так как бездорожье составляет 2/3 всего пути, то: $(5c + 3b) : (10a + 7b + 5c) = 2/3$.
Из первого уравнения получаем, что $b = 2a + c$.
Из второго:
$15c + 9b = 20a + 14b + 10c$
$5c = 5b + 20a$
$c = b + 4a$
Подставив второй результат в первый, получим:
$b = 2a + c = 2a + b + 4a = 6a + b$
$0 = 6a$
Таким образом, для Петра бездорожье началось сразу, а значит, он шёл всю свою часть пути по бездорожью, а Матвею надо было пройти только 2/3 – 1/2 = 1/6 пути по бездорожью. Таким образом, расстояния пройденные по бездорожью Матвеем и Петром относятся как 1 : 3.
Критерии: Верно составлена система уравнений – 3 балла. Только ответ – 0 баллов. Ответ с проверкой – 2 балла.

8.3. Найдите угол DAC, если известно, что $AB = BC$ и $AC = CD$, а прямые, на которых лежат точки A, B, C, D, параллельны, причём расстояния между соседними прямыми равны. Точка A левее B, C левее B, D правее C (см.рис).



Ответ: 30 градусов.

Решение: Назовём прямую, на которой лежит точка B – b, на которой лежит точка C – c, на которой лежит точка D – d.



Пусть прямая AC пересекает прямую b в точке M. По теореме Фалеса, $AM = MC$, так как расстояния между параллельными прямыми равны. Значит, BM – медиана в равнобедренном треугольнике ABC. Значит, BM – ещё и высота, то есть угол AMB – прямой, так как прямые b и c параллельны, то AC перпендикулярна прямой c. Пусть $AC = 2x$, тогда расстояния между параллельными прямыми равно x. Продлим AC до пересечения с прямой d в точке E. Тогда $CE = x$, как расстояние между параллельными прямыми, $CD = 2x$, так как $AC = 2x$. Кроме этого, в треугольнике CED угол E – прямой. Итак, в прямоугольном треугольнике CED гипотенуза в два раза больше одного из катетов. Значит, угол ECD равен 60 градусам, а смежный с ним угол ACD равен 120 градусам. Тогда в равнобедренном треугольнике ACD два острых угла равны по 30 градусов.

Критерии: Доказано, что AC перпендикулярна прямой c – 2 балла.

8.4. Дядя Андрей и девочка Маша играют в игру. У них имеются две упаковки сока по 24 литра: один грушёвый, другой вишнёвый. Кроме того, у Андрея есть кружка в 500 мл, а у Маши – две кружки по 240 мл. Игроки пьют сок по очереди по следующим правилам: они наполняют все свои кружки до краёв, а затем выпивают налитое до дна. При этом запрещается смешивать два вида сока в одной ёмкости. Если кто-то не может сделать ход, то ходит его соперник. Игра заканчивается, когда никто не может сделать ход. Побеждает тот, кто выпил больше сока. Может ли кто-либо обеспечить себе победу, если Андрей выбирает, кто ходит первым?

Ответ: нет, не может.

Решение: докажем, что Андрей может выпить 24 литра сока, как бы ни действовала Маша, и покажем, что Маша может ходит так, что тоже выпьет ровно половину.

Предположим, Андрей смог сделать не более 47 ходов, тогда Маша сделала не более 49 ходов. Тогда на данный момент выпито не более 47*500+49*480 = 47020, то есть не выпито хотя бы 980 мл сока. С другой стороны, так как объёмы всех ёмкостей делятся на 20, то и количество оставшегося сока в каждой упаковке делится на 20. Если Андрей не может сделать ход, то оно не превосходит 480 мл в каждой упаковке, но тогда сока осталось не более 960 мл. Значит, Андрей при любых обстоятельствах сможет сделать 48 ходов.

Докажем, что Маша тоже может выпить 24 литра сока, как бы ни действовал Андрей.

Пусть Маша ходит второй и повторяет ходы Андрея. Тогда за одну пару ходов они выпивают 980 мл из упаковки, и после 24 ходов в этой упаковке останется 480 мл сока, которые Андрей выпить не может, а Маша может. За 24 хода Маша выпивала на каждом на 20 мл меньше, чем Андрей, т.е. в итоге выпила на 480 меньше, что компенсирует, допивая последнее из этой пачки. Таким образом, если она ходит второй, то может выпить по крайней мере половину всего.

Если она ходит первой, то пусть первым ходом выпивает из каждой пачки по 240 мл, а затем повторяет ходы. Аналогичными рассуждениями, в каждой пачке в конце остаётся 240 мл (если в

какой-то больше, то Андрей пока ещё ходит туда), что Маша допьёт и компенсируем разницу в выпитом до нуля.
Значит, никто не может обеспечить себе победу.
Критерии:
Стратегия только для одного человека -- не более 3 баллов.
Потерян один случай в стратегии (например, не рассмотрено, что происходит, если Маша ходит первой) при полном решении -- 5 баллов,
Потерян один случай в стратегии при том, что есть только стратегия за Машу -- 2 балла.

8.5. В большом вольере живёт сто попугайчиков. В некоторый момент оказалось, что каждый из них за свою жизнь клюнул ровно пять других попугайчиков из этого вольера. Докажите, что можно выпустить на волю десять таких попугайчиков, что никто из них друг друга не клевал.
Решение: Докажем для начала, что найдётся попугайчик, которого клюнули не более 5 раз. Действительно, предположим, что все попугайчики были клюнуты хотя бы 6 раз. Тогда всего клюнутым кто-то оказывался хотя бы 100*6 = 600 раз, однако, клюнувшим кто-то оказывался 5*100=500 раз. Очевидно, что число раз, когда кто-то оказывался клюнутым, равно числу раз, когда кто-то кого-то клевал, откуда приходим к противоречию – с одной стороны это число больше 600, с другой - ровно 500. Значит, действительно найдётся попугайчик, которого клюнули не более 5 раз. Назовём его Кешей-1.
Теперь Кешу-1 выпустим на волю, а всех клюнутых Кешей-1 и клюнувших Кешу-1 переселим в другой вольер. Всего переселенных окажется не более 10, т.к. клюнул Кеша-1 ровно пятерых, а его клюнуло не более 5. Всего в вольере останется хотя бы 89 попугайчиков, так как выкинем мы максимум 11.
Пусть осталось n попугайчиков. Заметим, что теперь снова найдётся попугайчик Кеша-2, который оставшимися был клюнут не более 5 раз. Иначе, с одной стороны, клевков хотя бы $6n$ (каждого клюнули 6 или более раз), а с другой, не более $5n$ (каждый клевал максимум пятерых из оставшихся). Выпустим на волю Кешу-2, а клюнутых и клюнувших его отсадим в другой вольер. Мы снова избавимся максимум от 11 птиц, и их останется хотя бы 78.
Повторим операцию ещё раз – птиц останется хотя бы 67. После четвёртого раза – хотя бы 56, после 5-ого – хотя бы 45, после 6-ого – хотя бы 34, после 7-ого – хотя бы 23, после 8-ого – 12, наконец, после 9-ого раза останется хотя бы одна птица, а значит и в 10-ый раз нам будет кого выпустить. Мы выпустим требуемое количество попугайчиков, из которых никто никого не клевал (иначе бы был отсажен в другой вольер ранее).
Критерии: не доказано строго, что изначально найдётся попугайчик, которого клюнули не более 5 раз – минус 1 балл.
Не доказано, что после выкидывания такой попугайчик всё равно найдётся (например, рассмотрен только первый шаг, а затем сказано “и так далее”) – не более 3 баллов
“Грязь” в решении, которая не влияет на ответ (например, утверждается, что что будет выкинуто ровно 11 попугайчиков, или что после выкидывания каждый всё равно клюёт ровно пятерых оставшихся) – минус 1 балл.
Замечено только, что Кеша найдётся (первый абзац решения) – 1 балл.
Замечено только, что Кеша найдётся, и можно выкинуть максимум 11 птиц (первые 2 абзаца) – 2 балла.

Решения заданий заключительного этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике

Каждая задача каждого класса оценивается из 7 баллов

9 класс

9.1. На какое максимальное число различных прямоугольников можно разрезать шахматную доску 8 на 8 клеток? Все разрезы должны проходить только по линиям сетки. Прямоугольники различны, если они не равны как геометрические фигуры.

Ответ. На 12.

Решение. Выпишем возможные размеры возможных различных целочисленных прямоугольников минимальных площадей, помещающихся по линиям сетки на доску 8 на 8 в порядке возрастания этих площадей: 1 на 1, 1 на 2, 1 на 3, 1 на 4, 2 на 2, 1 на 5, 1 на 6, 2 на 3, 1 на 7, 1 на 8, 2 на 4, 3 на 3, 2 на 5. Прямоугольников уже 13 и сумма их площадей равна 73, что больше площади доски. Значит больше, чем на 12 прямоугольников, разрезать доску требуемым в задаче образом нельзя.

С другой стороны, сумма площадей их всех, кроме 3 на 3, равна ровно 64 и можно указать пример такого разбиения на все эти 12 прямоугольников, кроме 3 на 3: первые четыре вертикали доски разрежем на полоски ширины 1 и длин 1 и 7, 2 и 6, 3 и 5, и 8 соответственно. Оставшиеся 4 вертикали разобьём на два вертикальных прямоугольника 2 на 7, составленных из прямоугольников 2 на 5 и 2 на 2, и 2 на 4 и 2 на 3. Сверху к ним добавим горизонтальную полоску 1 на 4.

Возможны и другие примеры такого разбиения.

Критерии проверки. Доказано, что количество прямоугольников разбиения не превосходит 12: 4 балла. Приведён верный пример для 12 прямоугольников: 3 балла.

9.2. Могут ли в некотором остроугольном треугольнике ABC точки пересечения биссектрисы угла A, высоты, проведённой из вершины B и медианы, проведённой из вершины C являться вершинами невырожденного равностороннего треугольника?

Ответ. Нет.

Решение. Обозначим точку пересечения биссектрисы угла A и высоты BK из вершины B за M, высоты из вершины B и медианы из вершины C - за P, биссектрисы угла A и медианы из вершины C - за T. Предположим, что все эти точки различны и являются вершинами равностороннего треугольника MPT. Тогда величина угла AMK равна величине угла PMT и равна 90 минус величину угла A, откуда величина A равна 60 градусов. Опустим высоту CE, она пересечёт BK в точке O и величина угла EOK будет равна 120 градусов, так как четырёхугольник AEOK — вписанный. Следовательно, угол между прямыми BK и CE равен 60 градусов, но и угол между прямыми BK и CP по построению тоже равен 60 градусов. Таким образом, прямые CE и CP параллельны и проходят через вершину C, следовательно, совпадают, значит медиана и высота треугольника из вершины C совпадают и он является равнобедренным с BC=AC. Величина угла A, как мы установили, равна 60 градусов, значит и остальные углы треугольника ABC тоже по 60 градусов, он является равносторонним и точки P,M и T в нём совпадают, что противоречит предположению о нетривиальности треугольника PMT.

Критерии проверки. Установлено, что величина A равна 60 градусов: 2 балла. Доказана равнобедренность ABC: 3 балла. :За полное рассмотрение только одной (из двух возможных) конфигурации точек P,M и T баллы не снимаем.

9.3. Пусть двузначные числа $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ таковы, что отношение четырёхзначного числа $\overline{abcd}$

к сумме $\overline{ab}+\overline{cd}$ является целым числом. Найти все возможные значения, которые может принимать это число.

Ответ. Все натуральные числа от 11 до 90 включительно.

Решение. Обозначим искомое в условии отношение за n, а числа $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ за A и C соответственно. Тогда $\overline{abcd}=100\cdot A+C=n(A+C)$, откуда $\frac{100-n}{n-1}=\frac{C}{A}$. Заметим, что $C\le 99, A\ge 10$, следовательно $\frac{100-n}{n-1}\le\frac{99}{10}$, откуда $n\ge\frac{1099}{109}$, то есть $n\ge 11$. Аналогично, $C\ge 10, A\ge 99$, следовательно $\frac{100-n}{n-1}\ge\frac{10}{99}$, откуда $n\le\frac{9910}{109}$, то есть $n\le 90$.

С другой стороны, для любого натурального n из интервала от 11 до 90 положив $C=100-n.\ A=n-1$, получим два двузначных числа, для которых отношение из условия которых будет в точности равно n.

Критерии проверки. Оценки $n\ge 11$ и $n\le 90$: каждая по 2 балла. Построение примера для всех натуральных чисел от 11 до 90: 3 балла. Если примеры приведены не для всех натуральных чисел от 11 до 90, но для 11 и 90 примеры есть: 2 балла.. Любое остальное количество частных примеров: 1 балл.

9.4. Известно, что значения квадратного трёхчлена ax^2+bx+c на интервале $[-1,1]$ не превосходят по модулю 1. Найти максимальное возможное значение суммы $|a|+|b|+|c|$.

Ответ. 3.

Решение. Подставляя в многочлен ax^2+bx+c последовательно значения $x=0,1,-1$ из интервала $[-1,1]$, получим три неравенства: $-1\le c\le 1$, $-1\le a+b+c\le 1$ и $-1\le a-b+c\le 1$ Складывая второе с третьим, получим также $-1\le a+c\le 1$, вычитая второе из третьего (они двойные и симметричные!), имеем $-1\le b\le 1$. Вычитая из $-1\le a+c\le 1$ неравенство $-1\le c\le 1$, получим $-2\le a\le 2$. В силу симметрии условия задачи относительно умножения на -1, можем считать коэффициент a положительным. Если $b,c\ge 0$, то $|a|+|b|+|c|$ = $a+b+c\le 1$ по доказанному. Если $b<0, c\ge 0$, то $|a|+|b|+|c|$ = $a-b+c\le 1$, по доказанному. Если $b\ge 0, c<0$, то $|a|+|b|+|c|$ = $a+b-c=(a+b+c)-2c\le 1+2=3$. Если $b,c<0$, то $|a|+|b|+|c|$ = $a-b-c=(a-b+c)-2c\le 1+2=3$. Таким образом, сумма $|a|+|b|+|c|$ в условиях задачи не превосходит 3.

Значение 3 достигается, например, на многочлене $f(x)=2x^2-1$: его минимальное значение достигается внутри интервала в вершине параболы при $x=0$, максимальные значения достигаются на концах интервала при $x=1,-1$.

Критерии проверки. Найдены только границы коэффициентов уравнения и их сумм из предложений 1-3: 2-3 балла. Доказана оценка $|a|+|b|+|c|\le 3$: 5 баллов. Приведён и обоснован пример, когда эта граница достигается: 2 балла. Если пример приведён без обоснования: минус 1 балл. Любая неверная граница: 0 баллов.

9.5. Какое наибольшее количество целых чисел можно записать в ряд так, чтобы сумма любых пяти подряд идущих из них была больше нуля, а сумма любых семи подряд идущих из них была меньше нуля?

Ответ. Десять.

Решение. Сумма любых семи записанных чисел отрицательна, а сумма пяти крайних из этой семёрки = положительна, значит сумма двух крайних левых и сумма двух крайних правых чисел из этой семёрки — отрицательны. Поэтому сумма любых двух соседних чисел, справа или слева от которых есть ещё хотя бы пять чисел, отрицательна..

Значит, если предположить, что выписано больше десяти чисел, то сумма любых двух соседних чисел отрицательна.
В каждой пятёрке подряд идущих чисел сумма всех положительна, а сумма двух пар соседних — отрицательна, поэтому крайние и среднее числа каждой пятёрки — положительны . Если чисел хотя бы девять (а тем более одиннадцать), то каждое из них будет крайним в некоторой пятёрке, значит все выписанные числа будут положительны, что противоречит условию отрицательности сумм семёрок. Таким образом, выписанных чисел не больше десяти.
Построим пример для десяти чисел. Из предыдущих рассуждений следует, что числа с номерами 1,3,5,6,8,10 должны быть положительны, а остальные — отрицательны. Допустим, что все положительные числа равны x , а все отрицательные числа равны $-y$. Сумма любых пяти подряд будет равна $3x-2y>0$, а сумма любых семи подряд будет равна $4x-3y<0$, откуда $\frac{4}{3}x<y<\frac{3}{2}x$. Можно взять, например $x=5, y=7$, тогда искомый пример будет таким:5,-7,5,-7,5,5,-7,5,-7,5.
Критерии проверки. Замечено, что сумма двух крайних слева и сумма двух крайних справа чисел из этой семёрки — отрицательны:1 балл. Замечено, что если чисел больше десяти, то сумма любых двух соседних чисел отрицательна: 2 балла. Замечено, что крайние и среднее числа каждой пятёрки — положительны 1 балл. Замечено, что если чисел хотя бы одиннадцать, то все числа будут положительны: 1 балл. Любой верный пример для десяти чисел: 2 балла.

Каждая задача каждого класса оценивается из 7 баллов

10 класс

10.1. Найти все решения уравнения: $\sqrt{1-x}+\sqrt{2-y}=\sqrt{3x+2y-7}$.

Ответ. $x=1, y=2$ **.**

Решение. Из рассмотрения области определения сразу следует, что $x\le 1, y\le 2$ и $y\ge\frac{7-3x}{2}$.
Заметим, что, при $x\le 1$ будет $y\ge\frac{7-3x}{2}\ge\frac{7-3}{2}=2$, с одновременным превращением неравенств в строгие при $x<1$, поэтому единственной точкой области определения будет $x=1, y=2$, что, как легко убедиться подстановкой, является решением уравнения,
Критерии проверки. Угадан верный ответ: 1 балл. Верно записана область определения: 1 балл.

10.2. Собственным делителем натурального числа называется любой его делитель, отличный от единицы и самого числа. Найти все натуральные числа, имеющие не меньше двух различных собственных делителей и делящиеся на разность любых двух из них.
Ответ. 6,8,12.
Решение. Обозначим искомое число за n и покажем, что оно должно быть чётным. В противном случае все его делители должны быть нечётными, а их разность - чётной. Но чётное число не может делить нечётное — противоречие.

Ввиду чётности n у него обязательно есть собственные делители 2 и $\frac{n}{2}$, следовательно n должно делиться на их разность, то есть число $\frac{n}{\frac{n}{2}-2}=\frac{2n}{n-4}=2+\frac{8}{n-4}$ должно быть целым.

Последнее возможно только, когда $\frac{8}{n-4}$ - целое число, то есть когда $n-4$ - чётный делитель числа 8. Отсюда получаем все возможные $n=6,8,12$. Проверяем каждое из них, они все удовлетворяют условию задачи.

Критерии проверки. Доказано, что n чётно: 1 балл. Рассмотрена делимость на $\frac{n}{2}-2$: 2 балла. Отсюда найдены возможные $n=6,8,12$: 3 балла. Для всех $n=6,8,12$ выполнена проверка: 1 балл.

10.3. Различные прямые a и b пересекаются в точке О. Рассмотрим всевозможные отрезки АВ длины *l*, концы А и В которых лежат на a и b соответственно, и обозначим за Р точку пересечения перпендикуляров к прямым a и b, восстановленным из А и В соответственно. Найти геометрическое место точек Р.

Ответ. Окружность с центром О радиусом $\frac{l}{\sin x}$., где x - угол между прямыми a и b.
Решение. Углы РАО и РВО прямые, следовательно точки А, В, О и Р лежит на окружности с диаметром ОР. Значит, Р принадлежит описанной окружности треугольника АОВ, радиус которой, по теореме синусов, равен $\frac{l}{2\sin x}$., где x - угол между прямыми a и b. Как мы уже заметили, ОР является диаметром этой окружности, следовательно ОР всегда равен $\frac{l}{\sin x}$, то есть точка Р всегда принадлежит окружности с центром О радиусом $\frac{l}{\sin x}$.
Единственным исключительным случаем этой конструкции будет случай, когда прямые перпендикулярны и отрезок целиком лежит на одной из них,при этом одна из точек А и В совпадает с О. Но и тут точка Р совпадёт со второй из А и В и расстояние до неё по прежнему будет равно $l=\frac{l}{\sin x}$.
С другой стороны, рассмотрим произвольную точку Р этой окружности, опустим из неё перпендикуляры РА и РВ на прямые a и b соответственно. Тогда РО является диаметром описанной окружности треугольника РАВ, поэтому радиус её равен половине этого диаметра, то есть $\frac{l}{2\sin x}$. Угол АРВ равен x или $180-x$, следовательно, по теореме синусов АВ равен $2\frac{l}{2\sin x}\cdot\sin(180-x)=l$ и точка Р является точкой пересечения перпендикуляров АР и ВР, восстановленных из концов отрезка АВ длины *l*, концы А и В которых лежат на a и b соответственно. Исключительный случай перпендикулярных прямых проверяется аналогично.
Критерии проверки. Показано, что точка Р лежит на указанной окружности: 4 балла. Показано, что любая точка этой окружности является точкой Р из условия задачи для некоторых А и В: 3 балла. Нет упоминания об исключительном случае: минус 1 балл.

10.4. Действительные числа a и b таковы, что $a^3+b^3=1-3ab$. Найти все значения, которые может принимать сумма $a+b$..
Ответ. -2 и 1.
Решение. Обозначим $a+b=x$ и $ab=y$, тогда уравнение из условия можно записать как $x^3-3xy=1-3y$, откуда $x^3-1=3xy-3y=3y(x-1)$, легко получаем первое возможное значение $a+b=x=1$. Поделив на скобку $x-1$, имеем $x^2+x+1-3y=0$. Подставим сюда $x=a+b$ и $y=ab$, получим $a^2-(b-1)a+b^2+b+1=0$. Рассмотрев последнее уравнение

как квадратное относительно a, найдём его дискриминант, равный $-3(b+1)^2\leq 0$. Данное уравнение разрешимо в единственном случае $b=-1$ и его единственным корнем будет $a=-1$. В этом случае $a+b=-2$ - второй возможный ответ задачи. Проверка найденных значений не требуется, поскольку выполняемые нами преобразования были равносильными.

Критерии проверки. Нахождение $a+b=1$: 3 балла. Нахождение $a+b=-2$: 4 балла. Если угаданы оба ответа с приведением примеров a и b, на которых они достигаются: 1 балл.

10.5. Найти число всевозможных расстановок фишек по одной в некоторых клетках шахматной доски 8 на 8 таких, что количество фишек, стоящих в каждой строке различно и количество фишек, стоящих в каждом столбце различно.

Ответ. $2\cdot(8!)^2$.

Решение. Строка или столбец могут содержать от 0 до 8 фишек, поэтому, если их количества по строкам и по столбцам различны, то множество значений количеств фишек в строках и множество значений количеств фишек в столбцах оба представляют из себя ряд чисел 0, 1, 2, …, 7, 8 с одним пропуском, причём пропуск этот в обоих случаях один и тот же и равен равен разности 36 и числа фишек на доске. Если этот пропуск не равен 0 или 8, то на доске одновременно будет либо пустая срока и полный столбец, либо наоборот, что невозможно. Следовательно есть две возможности: на доске стоят 36 фишек, и количества их в строках и столбцах равны 1,2,3,...,8., либо на доске стоят 28 фишек, и количества их в строках и столбцах равны 0,1,2,3,...,7. Одновременно меняя занятые клетки на пустые и наоборот мы видим, что количества разных расстановок первого и второго типов равны.

Пусть нам дана произвольная расстановка первого типа, в ней найдутся заполненная строка и заполненный столбец — всего . $8\cdot 8=64$ варианта для выбора их номеров. Вычеркнем их и получим расстановку 21 фишки на доске 7 на 7 с разным числом фишек в строках и разным числом фишек в столбцах. На доске 7 на 7 это соответствует расстановке с пустой строкой и пустым столбцом, для которых есть $7\cdot 7=49$ способов выбора. Снова вычёркиваем их, получаем расстановку 21 фишки на доске 6 на 6 и т. д. Продолжая так, мы получим $(8!)^2$ вариантов выбора номеров соответствующих строк и столбцов (попеременно полных и пустых), которые полностью и однозначно определяют данную расстановку 36 фишек на доске 8 на 8. Добавляем к ним столько же вариантов расстановок 28 фишек на 8 на 8, получаем ответ: $2\cdot(8!)^2$.

Критерии проверки. Доказано, что на доске могут стоять только 28 или 36 фишек: 2 балла. Верно подсчитано количество расстановок только 28(36) фишек: 6 баллов. Любой доказываемый неверный ответ: 0 баллов.

Каждая задача каждого класса оценивается из 7 баллов

11 класс

11.1. Пусть $a^2+b^2=c^2+d^2=1$ и $ac+bd=0$ для некоторых действительных чисел a, b, c, d . Найти все возможные значения выражения $ab+cd$.

Ответ. 0.

Решение. Пусть сначала $b\neq 0$. Выразим из второго равенства $d=\frac{-ac}{b}$ и подставим в равенство $c^2+d^2=1$. Избавившись от знаменателя, получим $c^2(a^2+b^2)=b^2$, откуда ввиду $a^2+b^2=1$ получим $b=\pm c$. Подставив это в равенство $a^2+b^2=c^2+d^2$, получим $a=\pm d$. Ввиду равенства $ac+bd=0$ имеем либо $b=c, a=-d$, либо $b=-c, a=d$. В обоих случаях $ab+cd=0$.

Если $b=0$, то из $ac+bd=0$ следует $a=0$ или $c=0$. Первое невозможно в силу $a^2+b^2=1$, значит $c=0$, откуда снова $ab+cd=0$ **.**

Критерии проверки. Только ответ даже с соответствующими a,b,c,d : 0 баллов. Отсутствия рассмотрения случая $b=0$ (если это необходимо в решении): минус 1 балл.

11.2. Решить уравнение: $\sin^2 x+\sin^2 2x+\sin^2 3x=2$.

Ответ. $x_1=\frac{\Pi}{4}+\frac{\Pi n}{2}$, $x_2=\frac{\Pi}{2}+\Pi n$, $x_1=\pm\frac{\Pi}{6}+\Pi n$.

Решение. Воспользуемся формулой $\sin^2 t=\frac{1-\cos 2t}{2}$, преобразуем уравнение к виду $\cos 6x+\cos 4x+\cos 2x=-1$. Сложим в нём первый и третий косинусы: $2\cos 2x \, Cos\, 4x+\cos 4x=-1$ и сделаем замену $\cos 2x=t$. Получим уравнение $2t^3+t^2-t=0$, из которого $t_1=0, t_2=-1, t_3=\frac{-1}{2}$. Отсюда находим три серии решений: $x_1=\frac{\Pi}{4}+\frac{\Pi n}{2}$, $x_2=\frac{\Pi}{2}+\Pi n$, $x_1=\pm\frac{\Pi}{6}+\Pi n$. Отбор корней тут не нужен.

Критерии проверки. Потеря одной серии решений, или их неверное нахождение: минус 3 балла. Потеря двух серий, или их неверное нахождение: минус 5 баллов.

11.3. Может ли сумма объёма, длин всех рёбер и площадей всех граней некоторого прямоугольного параллелепипеда, длины рёбер которого являются целыми числами, равняться 866?

Ответ. Нет.

Решение. Обозначим длины рёбер исходного параллелепипеда за *x,y,z,* тогда сумма объёма, длин всех рёбер и площадей всех его граней равна *xyz+2(xy+xz+yz)+4(x+y+z)=866*. Если добавить к обеим частям 8, это уравнение можно записать как *(x+2)(y+2)(z+2)=874*. Правая часть является произведение простых чисел 2, 19 и 23, откуда легко следует, что это единственное разложение данного числа в произведение трёх натуральных чисел, больших 1, и одно из них равно 2. Однако левая часть уравнения является произведением трёх натуральных чисел, каждое из которых не меньше трёх, что приводит к противоречию. Следовательно, равенство из условия задачи невозможно.

Критерии проверки. Найдено разложение левой части уравнения *(x+2)(y+2)(z+2)=874*: 4 балла

11.4. В множестве *X* из 17 элементов выделено семейство из *N* различных непустых подмножеств таких, что каждый элемент множества *X* содержится ровно в двух подмножествах из этого семейства. Каково максимальное значение *N*? Найдите число всех возможных различных типов таких семейств для максимального *N*. Два семейства подмножеств имеют различные типы, если не получаются друг из друга перестановкой элементов *X*.

Ответ. Максимальное *N* равно 25, существуют два различных типа семейств из 25 подмножеств, удовлетворяющих условию задачи.

Решение. Рассмотрим произвольное семейство из *N* различных непустых подмножеств таких, что каждый элемент множества *X* содержится ровно в двух подмножествах из этого семейства. Если в нём *x* одноэлементных подмножеств, то общая сумма S мощностей подмножеств этого семейства не меньше, чем *x+2(N-x)=2N-x*. С другой стороны, каждый элемент множества *X* содержится ровно в двух подмножествах из этого семейства, поэтому S=34, значит N не превосходит *(34+x)/*2. Наконец, количество одноэлементных подмножеств *x* не превосходит числа элементов *X*, равного 17, значит, *N* не превосходит 25. Отметим, что для *N=25* количество одноэлементных подмножеств в семействе может равняться 16 или 17.
1) Если *x=17,* то оставшиеся 8 «больших» подмножеств должны быть двух- и более

элементными. Если среди них y двухэлементных, то общее число элементов в 8 больших множествах равно 17 и не меньше $2y+3(8-y)=24-y$, откуда y не меньше 7. Если оно больше 7, то трёх- и более элементные множества в сумме содержали бы один элемент, что невозможно. Значит, единственная возможность: попарно непересекающиеся 7 двухэлементных и одно трёхэлементное подмножества. Вместе с 17 одноэлементными они дают первый пример искомого в условии семейства подмножеств. Пример семейства такого типа: 17 одноэлементных подмножеств $\{1\},\{2\},...,\{17\}$, 7 двухэлементных подмножеств $\{1,2\},\{3,4\},...,\{13,14\}$, и трёхэлементное $\{15,16,17\}$.
2) Если $x=16$, то, оставшиеся 9 подмножеств должны быть двух- и более элементов. Если среди них y двухэлементных, то общее число элементов в 9 больших подмножествах равно 18 н не меньше $2y+3(9-y)=27-y$, откуда y не меньше 9. Значит, все большие подмножества двухэлементные. Всего в них 18 элементов, значит два из них пересекаются по одному элементу (который не лежит ни в одном одноэлементном подмножестве), а остальные попарно не пересекаются. Вместе с 16 одноэлементными они дают второй, отличный от первого, пример искомого в условии семейства подмножеств. Пример семейства такого типа: 16 одноэлементных подмножеств $\{1\},\{2\},...,\{16\}$, 9 двухэлементных подмножеств $\{1,2\}$, $\{3,4\},...,\{13,14\},\{15,17\},\{16,17\}$.
В ходе рассуждений мы доказали, что других семейств, отличных от найденных, нет.
Критерии проверки. За каждый найденный пример одного из двух типов семейств: по 1 баллу. Доказательство максимальности $N=25$: 3 балла. Доказательство того. что типов максимальных семейств ровно 2: 2 балла.

11.5. Пусть A и B — две различных фиксированных точки окружности, C — произвольная точка этой окружности, отличная от A и B, и MP — перпендикуляр, опущенный из середины M хорды BC к хорде AC. Доказать, что прямые PM при любом выборе C проходят через некоторую общую точку T.
Доказательство. Сначала считаем, что C выбрана на большей дуге AB окружности и величина угла ACB не больше 90 градусов. Опустим из B на прямую AC перпендикуляр с основанием E. Треугольник BEC прямоугольный, с постоянным углом при вершине C, следовательно, такие треугольники при всех C подобны между собой. Отсюда вытекает, что угол APB между стороной AC и медианой BP во всех таких треугольниках один и тот же и зависит только от длины хорды AB. Несложно подсчитать, что тангенс этого угла вдвое больше тангенса угла ACB. Значит, точка P при этом всегда лежит на окружности S, содержащей вершины всех углов данной величины, опирающихся на отрезок AB. Наконец, MP — перпендикуляр к хорде AP окружности S, следовательно, MP всегда проходит через конец T диаметра окружности S, проходящего через A. По доказанному. S не зависит от выбора C, значит, T тоже не зависит от выбора C.
Если же точка C выбрана на меньшей дуге окружности и угол ACB — тупой, то проделав всё аналогично, мы снова получим прямоугольный треугольник BEC с тем же углом при вершине C, что и в первом случае, Но здесь угол APB будет равен 180 минус угол BPE, являющийся в этом случае углом между BP и AC и равный аналогичному углу из первого случая. Следовательно, в этом случае снова P лежит на окружности S, с другой стороны от хорды AB и перпендикуляр MP к хорде AP снова проходит через конец T диаметра окружности S, проходящего через A.
Критерии проверки. Утверждение задачи доказано для выбора C только на одной из дуг исходной окружности с концами A и B: 5 баллов.