Всесибирская открытая олимпиада школьников 2017-2018 г.г. по математике

Второй этап **7 класс**

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Егор, Никита и Иннокентий получили за три контрольные работы каждый по три оценки, причём все оценки оказались тройками, четвёрками и пятёрками. Егор сказал: “У меня за две контрольные оценки больше, чем у Никиты.” Никита ответил: “Зато у меня за две контрольные оценки лучше, чем у Иннокентия.” Иннокентий парировал: “А я две контрольные написал лучше, чем Егор”. Могли ли все мальчики сказать правду?

7.2. Антон Павлович на свой день рождения испёк хлеб и позвал в гости Владимира Алексеевича и Фёдора Алексеевича. Оказалось, что хлеб и Фёдор вместе весят столько же, сколько Антон и Владимир. После того, как хлеб съели, вес Владимира стал равен суммарному весу Антона и Фёдора. Докажите, что кусок хлеба, съеденный Владимиром, весит столько же, сколько весил Антон до своего дня рождения.

7.3. Аня выписала себе в тетрадь 100 каких-то чисел. Затем Соня выписала в свою тетрадь все попарные произведения чисел, написанных Аней. Артём заметил, что в сониной тетради оказалось ровно 2000 отрицательных чисел. Сколько нулей в свою тетрадь изначально выписала Аня?

7.4. Точку внутри выпуклого пятиугольника соединили с его вершинами, в результате чего пятиугольник оказался разбитым на пять равных между собой неравнобедренных треугольников. Докажите, что эти треугольники прямоугольные.

7.5. В комнате Насти собралось 16 человек, каждые двое из которых либо дружат, либо враждуют. Приходя в комнату, каждый из них на двери комнаты записывал количество уже пришедших друзей, а уходя – количество оставшихся в комнате врагов. Чему может равняться сумма всех записанных чисел, после того, как сначала все пришли, а затем все разошлись?

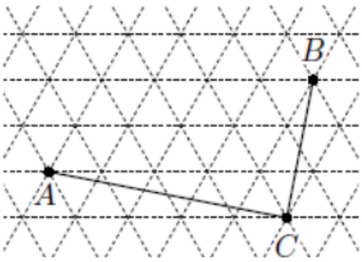
Всесибирская открытая олимпиада школьников 2017-2018 г.г. по математике

Второй этап **8 класс**

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Опытный фрезеровщик Гарик умеет делать распилы. За один день непрерывной работы он распиливает 600 девятиметровых брёвен на одинаковые трёхметровые брёвнышки (от исходных они отличаются только длиной). Сколько времени понадобится опытному фрезеровщику Гарику, чтобы распилить 400 двенадцатиметровых брёвен (от девятиметровых они отличаются только длиной) на такие же трёхметровые брёвнышки?

8.2. Раз в месяц дядька Черномор собирает всех своих 33 богатырей и предлагает им проголосовать за новый список зарплат, который сам и составляет. Сам Черномор не голосует. Те богатыри, чьё жалование предлагается увеличить, голосуют за, остальные – против. Предложение принимается большинством голосов. Может ли Черномор за 3 года добиться того, чтобы его жалованье вдесятеро увеличилось, а зарплаты всех богатырей вдесятеро уменьшились?



8.3. Найдите угол ACB, изображённый на картинке, если известно, что все треугольники, нарисованные пунктирными линиями, равносторонние.

8.4. Найдите все решения уравнения $4[x] = 25\{x\} - 4{,}5$. Здесь $[x]$ означает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее числа x, а $\{x\}$ есть дробная часть числа x, равная по определению $x - [x]$.

8.5. В комнате Насти собралось 16 человек, каждые двое из которых либо дружат, либо враждуют. Приходя в комнату, каждый из них на двери комнаты записывал количество уже пришедших друзей, а уходя – количество оставшихся в комнате врагов. Чему может равняться сумма всех записанных чисел, после того, как сначала все пришли, а затем все разошлись?

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2017-2018 г.г. по математике

Второй этап **9 класс**

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Есть два слитка разных сплавов меди и олова весом 6 и 12 кг соответственно. От каждого из них отпилили по одинаковому куску и сплавили первый кусок с остатками второго слитка, а второй кусок — с остатками первого слитка, после чего соотношение меди и олова в двух полученных новых слитках оказалось одинаковым. Найти вес отпиленных кусков..

9.2. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AB, BC и CA в точках P, K и M соответственно, а точки T и X - середины отрезков MP и MK. Докажите, что четырехугольник ATXC — вписанный.

9.3. Найти пять различных чисел, если всевозможные суммы троек этих чисел равны 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 14,15 и 17. Числа не обязательно целые.

9.4. В турнире каждая из шести команд сыграла с каждой ровно по одному разу. В итоге команды набрали 12, 10, 9, 8, 7 и 6 очков соответственно. а) Сколько очков начислялось за победу в матче, если за ничью начислялось 1 очко, а за поражение — 0 очков? Ответом, естественно, должно быть натуральное число. б) Найдите количество выигрышей, ничьих и проигрышей у каждой команды и докажите единственность этих чисел. в) Приведите пример соответствующего турнира.

9.5. Найти все решения в целых числах уравнения: $x^3+y^3=2^{30}$ **.**

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2017-2018 г.г. по математике

Второй этап **10 класс**

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Решить уравнение: $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$.

10.2. Найти количество всех пятизначных чисел $\overline{abcde}$, все цифры которых различны и $a<b<c>d>e$.

10.3. На продолжении диаметра AB полукруга за точку B взята произвольная точка C, через которую проведена касательная к этому полукругу, касающаяся его в точке E. Пусть биссектриса угла BCE пересекает хорды AE и BE полукруга в точках K и M соответственно. Докажите, что треугольник KEM равнобедренный..

10.4. В системе из трёх линейных уравнений $Ax+By+Cz=0, Dx+Ey+Fz=0, Gx+Hy+Iz=0,$ от трёх переменных x, y, z коэффициенты *A*, *E*, *I* — положительны, а остальные отрицательны, и каждый из *A*, *E*, *I* больше модуля суммы двух оставшихся коэффициентов того же уравнения. Докажите, что система имеет единственное решение $x=y=z=0$.

10.5. Найти все натуральные числа ***n*** такие, что ***n*** равно сумме трёх чисел, первое из которых является максимальным делителем числа ***n-1***, отличным от ***n-1,*** второе - максимальным делителем числа ***n-2***, отличным от ***n-2,*** и третье - максимальным делителем числа ***n-3***, отличным от ***n-3.***

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2017-2018 г.г. по математике

Второй этап **11 класс**

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. В каждой из четырёх волейбольных команд по шесть игроков, среди которых обязательно есть капитан и разыгрывающий, причём это разные люди. Сколькими способами из этих четырёх команд можно составить сборную из шести игроков, среди которых должны быть хотя бы по одному игроку каждой команды и обязательно пара капитан — разыгрывающий хотя бы из одной команды?

11.2. Докажите, что уравнение $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)=0$ при любых не совпадающих одновременно значениях a, b, c имеет два различных корня.

11.3. В футбольном турнире участвовали 17 команд, каждая из которых сыграла с каждой из остальных по одному разу. Могло ли у каждой команды число одержанных ею побед равняться числу матчей, сыгранных ею вничью?

11.4. В треугольнике ABC взята точка P такая, что сумма углов PBA и PCA равна сумме углов PBC и PCB. Докажите, что расстояние от вершины A до точки P не меньше расстояния от A до точки I - центра вписанной в ABC окружности, и если эти расстояния равны, то P совпадает с I.

11.5. При каком минимальном натуральном n найдутся n различных натуральных чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n$ таких, что $(1-\frac{1}{s_1})(1-\frac{1}{s_2})\ldots(1-\frac{1}{s_n})=\frac{7}{66}$?