Решения и критерии проверки задач Второго этапа Всесибирской олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Егор, Никита и Иннокентий получили за три контрольные работы каждый по три оценки, причём все оценки оказались тройками, четвёрками и пятёрками. Егор сказал: “У меня за две контрольные оценки больше, чем у Никиты.” Никита ответил: “Зато у меня за две контрольные оценки лучше, чем у Иннокентия.” Иннокентий парировал: “А я две контрольные написал лучше, чем Егор”. Могли ли все мальчики сказать правду?

Ответ: да, могли
Решение: Пусть Егор получил оценки 5,4,3; Никита – 4,3,5; Иннокентий – 3,5,4. Тогда условие задачи выполнено.
Критерии: только ответ – 0 баллов.
любой верный пример без проверки – 7 баллов.

7.2. Антон Павлович на свой день рождения испёк хлеб и позвал в гости Владимира Алексеевича и Фёдора Алексеевича. Оказалось, что хлеб и Фёдор вместе весят столько же, сколько Антон и Владимир. После того, как хлеб съели, вес Владимира стал равен суммарному весу Антона и Фёдора. Докажите, что кусок хлеба, съеденный Владимиром, весит столько же, сколько весил Антон до своего дня рождения.

Решение: Пусть Антон до дня рождения весил А, Владимир – В, Фёдор – Ф, и они съели куски хлеба весами ХА, ХВ, ХФ соответственно. Тогда из первого условия получаем уравнение ХА + ХВ + ХФ + Ф = А + В, а из второго В + ХВ = А + ХА + Ф + ХФ.
Добавим к обеим частям первого уравнения по ХВ, тогда получим
ХА + 2ХВ + ХФ + Ф = А + В + ХВ = А + А + ХА + Ф + ХФ = 2А + ХА + Ф + ХФ. Сокращая, получаем равенство 2ХВ = 2А, то есть А = ХВ, чего мы и хотели.
Критерии: верно получены уравнения из первого абзаца – по 1 баллу за каждое.

7.3. Аня выписала себе в тетрадь 100 каких-то чисел. Затем Соня выписала в свою тетрадь все попарные произведения чисел, написанных Аней. Артём заметил, что в сониной тетради оказалось ровно 2000 отрицательных чисел. Сколько нулей в свою тетрадь изначально выписала Аня?

Ответ: 10 нулей.
Решение: Пусть Аня выписала в тетрадь n положительных чисел, m отрицательных и $100 - n - m$ нулей. Тогда по условию $nm = 2000$, так как отрицательное число можно получить, только перемножив числа разных знаков.
Переберём все делители числа $2000 = 2^4*5^3$:

	2^0	2^1	2^2	2^3	2^4
5^0	1	2	4	8	16
5^1	5	10	20	40	80
5^2	25	50	100	200	400
5^3	125	250	500	1000	2000

Они разбиваются на пары, произведение в которых равно 2000, запишем их по парам и выпишем их сумму:

1	2	4	5	8	10	16	20	25	40
2000	1000	500	400	250	200	125	100	80	50

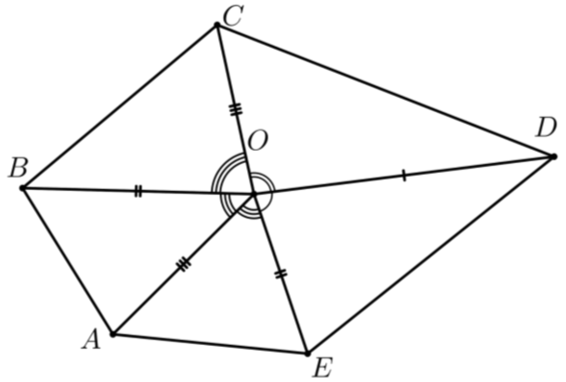
2001	1002	504	405	258	210	141	120	105	90

Только в одном из этих случаев сумма меньше 100, значит, реализован именно он. Таким образом, ненулевых чисел 90, а нулевых 10.

Критерии: Только ответ – 0 баллов.
Только ответ с проверкой – 1 балл.
Разобраны не все случаи делителей – не больше 3 баллов.
Нет объяснения, почему нет других делителей – снимать 1 балл.

7.4. Точку внутри выпуклого пятиугольника соединили с его вершинами, в результате чего пятиугольник оказался разбитым на пять равных между собой неравнобедренных треугольников. Докажите, что эти треугольники прямоугольные.

Решение: Пусть дан пятиугольник $ABCDE$ и точка O внутри него. Рассмотрим отрезки, соединяющие O с вершинами пятиугольника. По условию, никакие два подряд идущих не равны между собой (иначе бы был равнобедренный треугольник). Докажем, что есть три подряд идущих разных отрезка. Действительно, если бы это было не так, то среди любых трёх подряд идущих отрезков было бы только два разных. В сочетании с тем, что подряд два одинаковых не идут, это бы значило, что длины отрезков чередуются (например, a,b,a,b,a,b), но отрезков всего 5 – нечётное количество, то есть, это невозможно. Итого, пусть отрезки OD, OE и OA имеют разную длину. На чертеже они обозначены одной, двумя и тремя чертами соответственно. Так как все треугольники равны, отрезки OD, OE и OA – это в точности все стороны этих равных треугольников.
Так как три стороны идут подряд, можно считать, что это a, b, c. Никакая сторона не может повторяться 3 раза среди этих отрезков, так как тогда получится равнобедренный треугольник, значит, есть ровно одна сторона, которая представлена среди этих отрезков один раз (будем считать, что c), а две другие по два. Но тогда рядом с a с другой стороны может стоять только b, а далее только a. То есть порядок такой (с точностью до переобозначения): a, b, c, a, b. Рассмотрим этот случай более подробно:
Итак, $OB = OE = b$, $OA = OC = a$, $OD = c$. Обозначив тогда равные углы между соответственно равными сторонами, получим, что $3\angle COB + \angle COD + \angle DOE = 360°$. Но $\angle COB$, $\angle COD$ и $\angle DOE$ – это три разных угла (равных углов быть не может, иначе бы были равнобедренные) в равных треугольниках, значит, $\angle COB + \angle COD + \angle DOE = 180°$, откуда $2\angle COB = 180°$, т.е. $\angle COB = 90°$, что мы и хотели.



Критерии: Нет доказательства того, что есть три подряд идущих разных стороны (если это используется в решении) – минус 1 балл.
Упущены случаи в переборном решении – минус 1 балл за каждый.
Без доказательства принимается, что есть только один способ так разбить на треугольники – минус 2 балла.

7.5. В комнате Насти собралось 16 человек, каждые двое из которых либо дружат, либо враждуют. Приходя в комнату, каждый из них на двери комнаты записывал количество уже пришедших друзей, а уходя – количество оставшихся в комнате врагов. Чему может равняться сумма всех записанных чисел, после того, как сначала все пришли, а затем все разошлись?

Ответ: 120
Решение: Рассмотрим любую пару друзей. Их “дружба” была посчитана ровно один раз, так как её в свою сумму включает тот человек, что пришёл позже своего друга. Поэтому после того, как все пришли, сумма чисел на двери будет равна общему количеству дружб между людьми. Аналогично, каждая “вражда” будет посчитана ровно один раз тем человеком, что ушёл раньше. Поэтому после того, как все уйдут, к сумме чисел на двери прибавится количество всех “вражд”. Итого, общая сумма чисел на двери будет равна сумме общему количеств дружб и вражд, а это в точности количество пар пришедших людей, т.е. 16*15/2 = 120.
Критерии: только ответ – 0 баллов.

Решения и критерии проверки задач Второго этапа Всесибирской олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

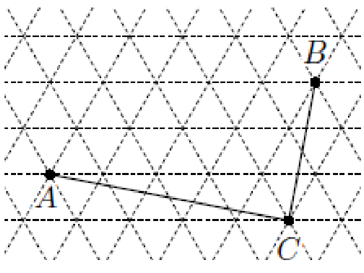
8.1. Опытный фрезеровщик Гарик умеет делать распилы. За один день непрерывной работы он распиливает 600 девятиметровых брёвен на одинаковые трёхметровые брёвнышки (от исходных они отличаются только длиной). Сколько времени понадобится опытному фрезеровщику Гарику, чтобы распилить 400 двенадцатиметровых брёвен (от девятиметровых они отличаются только длиной) на такие же трёхметровые брёвнышки?

Ответ: один день
Решение: чтобы превратить 9-метровое бревно в 3 трёхметровых, надо сделать 2 распила. Поэтому Гарик делает 2*600 = 1200 распилов в день. Чтобы превратить 12-метровое в 3-метровые, надо сделать 3 распила, а для 400 брёвен - 400*3 =1200, то есть понадобится столько же времени.
Критерии: только ответ – 1 балл.

8.2. Раз в месяц дядька Черномор собирает всех своих 33 богатырей и предлагает им проголосовать за новый список зарплат, который сам и составляет. Сам Черномор не голосует. Те богатыри, чьё жалование предлагается увеличить, голосуют за, остальные – против. Предложение принимается большинством голосов. Может ли Черномор за 3 года добиться того, чтобы его жалованье вдесятеро увеличилось, а зарплаты всех богатырей вдесятеро уменьшились?

Ответ: да, может
Решение: Пусть первые 33 месяца Черномор предлагает одному из богатырей сделать зарплату, равную 0, а остальным – увеличивать на одну тысячную от их исходной зарплаты. Все эти предложения будут приняты. После этого у всех богатырей зарплата будет не более 33/1000 от исходной, т.е. меньше 1/10.
На 34 месяц Черномор предложит всем богатырям зарплату, равную 1/10 от их изначальной, а свою увеличит в 10 раз, и за это предложение все проголосуют за.
Критерии: только ответ – 0 баллов.
Задача решена в предположении, что богатыри голосуют за, если им не меняют зарплату – 3 балла.
Любой верный алгоритм – 7 баллов.

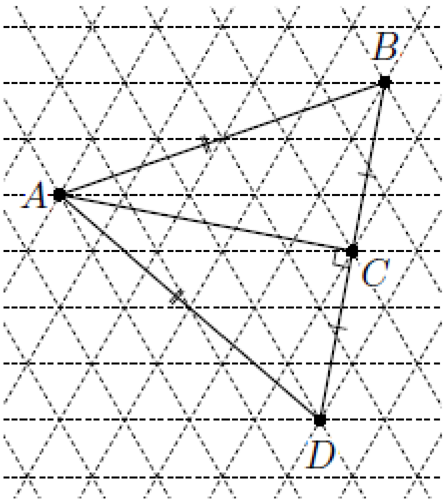
8.3. Найдите угол ACB, изображённый на картинке, если известно, что все треугольники, нарисованные пунктирными линиями, равносторонние.

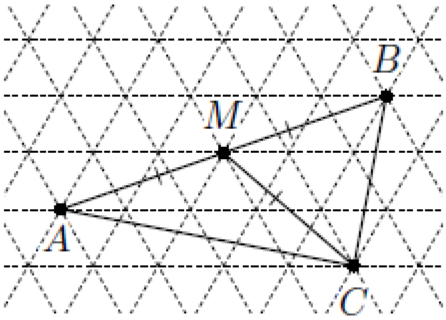


Ответ: 90 градусов

Решение: Будем считать, что сторона маленького правильного треугольника равна 1.

Решение 1. Продлив отрезок BC на его длину за точку C, получим точку D (рис. слева). Проведя отрезки AD и AB, заметим, что они равны (так как это диагонали в равных параллелограммах со сторонами 2 и 4), то есть треугольник ABD – равнобедренный. Так как AC – медиана этого треугольника, проведённая к его основанию, то AC – высота, то есть угол $ACB = 90°$.
Решение 2. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть M – середина AB (рис. справа). Заметим, что $AM = BM = CM$ как диагонали параллелограммов со сторонами 1 и 2, то есть медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена. Значит, треугольник ABC – прямоугольный: угол $ACB = 90°$.





Критерии: только ответ – 0 баллов.

8.4. Найдите все решения уравнения $4[x] = 25\{x\} – 4,5$. Здесь $[x]$ означает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее числа x, а $\{x\}$ есть дробная часть числа x, равная по определению $x – [x]$.

Ответ: $x = k + (8k + 9)/50$ для $k = -1,0,...,5$ – всего 7 дробей.
Решение: домножим уравнение на 2 и преобразуем. Получим уравнение $8[x] + 9 = 50\{x\}$. Заметим, что справа стоит неотрицательное число, и оно не больше 50, то есть $0 \le 8[x] + 9 \le 50$, откуда $-9/8 \le [x] \le 41/8$. Но $[x]$ – целое число, поэтому оно может быть равно только -1,0,1,2,3,4 или 5. Поэтому $x = [x] + \{x\} = [x] + (8[x] + 9])/50$, то есть ответ можно записать в виде $x = k + (8k + 9)/50$ для $k = -1,0,...,5$.
Комментарий: случай $k = -1$ подходит, так как у дроби -49/50 целая часть по определению равна -1, а дробная, тоже по определению, равна -49/50 - (-1) = 1/50.
Критерии: получено только неравенство $-9/8 \le [x] \le 41/8$ - 2 балла.
Ответ не записан явно, оставлен в виде формулы как в решении – баллы не снимать.
Потерян случай $k = -1$ – минус 1 балл.
Потерян любой другой случай – минус 2 балла.
Потеряно два любых случая для $k > 0$ – ставить не более 3 баллов за решение.

8.5. В комнате Насти собралось 16 человек, каждые двое из которых либо дружат, либо враждуют. Приходя в комнату, каждый из них на двери комнаты записывал количество уже пришедших друзей, а уходя – количество оставшихся в комнате врагов. Чему может равняться сумма всех записанных чисел, после того, как сначала все пришли, а затем все разошлись?

Ответ: 120
Решение: Рассмотрим любую пару друзей. Их “дружба” была посчитана ровно один раз, так как её в свою сумму включает тот человек, что пришёл позже своего друга. Поэтому после того,

как все пришли, сумма чисел на двери будет равна общему количеству дружб между людьми. Аналогично, каждая “вражда” будет посчитана ровно один раз тем человеком, что ушёл раньше. Поэтому после того, как все уйдут, к сумме чисел на двери прибавится сумма всех “вражд”. Итого, общая сумма чисел на двери будет равна сумме общему количеств дружб и вражд, а это в точности количество пар пришедших людей, т.е. 16*15/2 = 120.

Критерии: только ответ – 0 баллов.

Решения заданий второго этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников 2017-2018 г.г. по математике

Каждая задача каждого класса оценивается из 7 баллов

9 класс

9.1. Есть два слитка разных сплавов меди и олова весом 6 и 12 кг соответственно. От каждого из них отпилили по одинаковому куску и сплавили первый кусок с остатками второго слитка, а второй кусок — с остатками первого слитка, после чего соотношение меди и олова в двух полученных новых слитках оказалось одинаковым. Найти вес каждого из отпиленных кусков.

Ответ. 4 килограмма.

Решение. Обозначим вес каждого из отпиленных кусков за x . кг, а доли олова в первом и втором слитках за $a\neq b$ соответственно. Тогда доля олова после переплавки в первом слитке будет $\frac{bx+a(6-x)}{6}$, а во втором слитке $\frac{ax+b(12-x)}{12}$ и они, по условию, равны. Решая полученное уравнение, находим $x=4$ при всех $a\neq b$.

Критерии проверки. Приведён правильный ответ с проверкой для произвольных $a\neq b$: 1 балл. Разбор частного случая: 0 баллов.

9.2. Вписанная окружность треугольника ABC касается его сторон AB, BC и CA в точках P, K и M соответственно, а точки T и X - середины отрезков MP и MK. Докажите, что четырехугольник ATXC — вписанный.

Доказательство. Заметим, что треугольники APM, BPK и CMK равнобедренные и отрезки AT и CX — высоты к основаниям в APM и CMK, а средняя линия TX треугольника PKM параллельна его стороне PK. Тогда угол TAM равен половине угла A, а угол TXC равен сумме углов CXM и TXM. Угол CXM прямой, а угол TXM равен углу PKM, который равен углу PMA, как вписанный во вписанную окружность и опирающийся на хорду PM с проведённой через её вершину M касательной AC. Сумма углов PMA и TAM в прямоугольном треугольнике ATM равна 90 градусов, значит, сумма углов TAM и TXC равна 180 градусов. Следовательно, четырёхугольник ATXC — вписанный.

Критерии проверки. Замечание, что треугольники APM, BPK и CMK равнобедренные и правильная работа с их углами: 1 балл. Отмечено, что средняя линия TX треугольника PKM параллельна его стороне PK: 1 балл. Замечено, что угол TXM равен углу PMA: 3 балла. Показано далее, что сумма углов TAM и TXC равна 180 градусов. 2 балла.

9.3. Найти пять различных чисел, если всевозможные суммы троек этих чисел равны 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15 и 17. Числа не обязательно целые.

Ответ. -3,2,4,5,8.

Решение. Обозначим искомые числа за $a<b<c<d<e$.

Заметим, что каждое число входит ровно в шесть троек чисел, следовательно, сложив все десять сумм троек и поделив на 6, мы получим сумму всех пяти чисел, равную 16. Очевидно, что минимальной будет сумма $a+b+c=3$, откуда $d+e=16-a-b-c=13$, а максимальной — сумма $c+d+e=17$, откуда $a+b=16-c-d-e=-1$. Значит, $c=a+b+c-a-b=c+d+e-d-e=4$.

Следующей по величине после $a+b+c$ будет $a+b+d$, слагаемые которой в порядке возрастания не больше слагаемых любой другой, отличной от $a+b+c$ тройки, следовательно. $d=4-a-b=5$. Предпоследней по величине перед $c+d+e$ будет $b+d+e$, слагаемые которой в порядке возрастания не меньше слагаемых любой другой, отличной от $c+d+e$ тройки, следовательно. $b=15-d-e=2$.

Теперь находим $a=a+b-b=-1-2=-3$, $e=d+e-d=13-5=8$. Итого:

$a=-3, b=2, c=4, d=5, e=8$.

Критерии проверки. Найдена сумма всех чисел: 2 балла. Найдено $c=a+b+c-a-b=c+d+e-d-e=4$: 1 балл. Обосновано, что следующей по величине после $a+b+c$ будет $a+b+d$, а предпоследней по величине перед $c+d+e$ будет $b+d+e$: и найдены *b* и *d*: 2 балла. Нахождение *a* и *e*: 1 балл.

9.4. В турнире каждая из шести команд сыграла с каждой ровно по одному разу. В итоге команды набрали 12, 10, 9, 8, 7 и 6 очков соответственно. а) Сколько очков начислялось за победу в матче, если за ничью начислялось 1 очко, а за поражение — 0 очков? Ответом, естественно, должно быть натуральное число. б) Найдите количество выигрышей, ничьих и проигрышей у каждой команды и докажите единственность этих чисел. в) Приведите пример соответствующего турнира.

Ответ. а) 4 очка.

б) У первой команды было три победы, у второй — две победы и две ничьих, у третьей - две победы и одна ничья, у четвёртой — две победы, у пятой — одна победа и три ничьи, у шестой - — одна победа и две ничьи. Остальные матчи команды проиграли.

и) Один из примеров, удовлетворяющих условию, такой: первая команда выиграла у четвёртой, пятой и шестой, вторая — у первой и третьей, третья — у первой и шестой, четвёртая — у второй и третьей, пятая — у четвёртой, шестая — у четвёртой. При этом пятая команды сыграла вничью с шестой, третьей и второй, а также вничью сыграли шестая и вторая команды.

Решение. а) Пусть за победу в матче команде начислялось n очков, всего в турнире было сыграно 15 матчей, из которых x окончились победой одной из команд, а остальные $15-x$ - вничью. В ничейных матчах участники в сумме набирают 2 очка, а в остальных - n очков, поэтому всего в турнире всеми командами было набрано $nx+2(15-x)=(n-2)x+30=12+10+9+8+7+6=52$ очка, откуда $(n-2)x=22$. Всего игр было 15, поэтому x может равняться 1, 2 или 11. В первых двух случаях n равно 24 или 13, что превосходит максимальное количество очков, набранных командами, чего быть не может, так как победа в матче становится невозможной в принципе, значит все матчи окончатся вничью, что противоречит предположению о x . В оставшемся случае x равен 11, тогда n равно 4 — количество очков, начисляемое за победу.

б) Найдём количество выигрышей, ничьих и проигрышей у каждой команды. . Всего было четыре ничьих и 11 матчей, окончившихся победой одной из команд. Каждая команда провела по пять игр, поэтому 6 и более очков нельзя было набрать только за счёт ничьих, следовательно, шестая и пятая команды по разу выиграли и сделали по две и три ничьих соответственно.

Если бы четвёртая команда выиграла не более одного раза, у неё было бы не меньше четырёх ничьих, всего вместе с пятой и шестой было бы уже не меньше (2+3+4)/2=4,5 ничьих, что больше общих 4. Следовательно, четвёртая команда дважды выиграла и трижды проиграла.

В силу тех же соображений у третьей команды две победы и одна ничья, у второй — две победы и две ничьих. У всех команд, кроме первой, получаем не меньше (2+3+1+2)/2=4 ничьих, что равно их общему числу. Следовательно, у первой команды было три победы и два поражения.

в) Приведём пример соответствующего турнира. Пятая команда трижды сыграла вничью, а у первой и четвёртой — ничьих не было. Значит, пятая команды сыграла вничью с шестой, третьей и второй. Кроме этих ничьих, остаётся по одной у шестой и второй, поэтому они сыграли вничью между собой. Всё, ничьи закончились, и они восстанавливаются однозначно. А вот результативные матчи однозначно восстановить нельзя. Один из примеров, удовлетворяющих условию, такой: первая команда выиграла у четвёртой, пятой и шестой, вторая — у первой и третьей, третья — у первой и шестой, четвёртая — у второй и третьей, пятая — у четвёртой, шестая — у четвёртой.

Критерии проверки. Правильный и обоснованный ответ в пункте а): 3 балла. Найдено с обоснованием количество побед и ничьих у каждой команды: 2 балла. Приведён любой верный пример турнира в пункте в): 2 балла.

9.5. Найти все решения в целых числах уравнения: $x^3+y^3=2^{30}$ **.**

Ответ. $(0,2^{10}),(2^{10},0)$.

Решение. Покажем что, если x^3+y^3 равно степени двойки не ниже второй, то оба переменных должны быть чётными числами. Действительно, $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)=2^n, n\geq 2$, если одно из переменных нечётно, то второе тоже, так как сумма их кубов чётна. В таком случае вторая скобка в разложении будет нечётным целым числом, делящим степень двойки, то есть, $x^2-xy+y^2=\pm 1$. Рассматриваем последнее равенство как квадратное уравнение относительно . x , если оно имеет решение, его дискриминант, равный $-3y^2\pm 4$ должен быть неотрицательным, что возможно только при $y=0,\pm 1$. При $y=0$ получим $x^2=\pm 1$, откуда $x=\pm 1$ При $y=1$ получим $x^2-x+1=\pm 1$, откуда $x=1,0$.При $y=-1$ получим $x^2+x+1=\pm 1$, откуда $x=-1,0$. При нечётных x, y получаются две пары значений: (1,1) и (-1,-1), для которых x^3+y^3 равно, соответственно, 2 и -2, поэтому подходит только первая пара (1,1) и . x^3+y^3 при это равно 2 — степени двойки ниже второй.

Рассмотри теперь исходное уравнение. Ввиду доказанного, обе переменных чётные, поделив всё уравнение на 8, получим новое уравнение в целых числах $(\frac{x}{2})^3+(\frac{y}{2})^3=2^{27}$, в котором правая часть снова является степенью двойки выше первой. Продолжая в том же духе, дойдём до уравнения $(\frac{x}{2^{10}})^3+(\frac{y}{2^{10}})^3=1$. Из решения уравнения $x^2-xy+y^2=\pm 1$ в предыдущей части с учётом $(\frac{x}{2^{10}})^3+(\frac{y}{2^{10}})^3=1$ для $(\frac{x}{2^{10,}}\frac{y}{2^{10}})$ получаем (1,0) или (0,1), откуда (x, y) равно (x, y) или $(0,2^{10})$.

Критерии проверки. Только угаданы решения: 0 баллов. Показано, что, если x^3+y^3 равно степени двойки не ниже второй, то оба переменных должны быть чётными числами: 3 балла. Использована идея десяти делений значений переменных на 2: 3 балла. Решение уравнения $(\frac{x}{2^{10}})^3+(\frac{y}{2^{10}})^3=1$: 1 балл.

Каждая задача каждого класса оценивается из 7 баллов

10 класс

10.1. Решить уравнение: $\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}=\sqrt{2}$ **.**

Ответ. $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$.

Решение. Сначала найдём область определения уравнения, это $x\geq\frac{1}{2}$ из внутреннего радикала. Условие $x\geq\sqrt{2x-1}$ при этом тоже выполнено, так как обе части его неотрицательны и после возведения в квадрат оно равносильно неравенству $(x-1)^2\geq 0$.

Обе части исходного уравнения тоже не отрицательны, поэтому при возведении в квадрат получим равносильное уравнение $2x+2\sqrt{(x-1)^2}=2x+2|x-1|=2$, то есть $|x-1|=1-x$, что эквивалентно $x\leq 1$. Пересекая с областью определения, получаем ответ $\frac{1}{2}\leq x\leq 1$.

Критерии проверки. При нахождении области определения уравнения не проверяется условие $x\geq\sqrt{2x-1}$: снимаем 1 балл. Нет ссылки на не отрицательность частей уравнения при возведении в квадрат: минус 1 балл.

10.2. Найти количество всех пятизначных чисел $\overline{abcde}$, все цифры которых различны и $a<b<c>d>e$.

Ответ. 1134.

Решение. Для правильной записи числа, удовлетворяющего условию задачи, нужно произвольным образом выбрать пятёрку различных цифр из 10 возможных, а потом расположить две из них слева от максимальной в порядке возрастания и две оставшихся справа от максимальной в порядке убывания. Возможны два различных случая.

1) Выбранная пятёрка не содержит нуля. Тогда её можно выбрать C_9^5 способами, затем выбрать из них две не максимальных и ненулевых цифры C_4^2 способами, и единственным способом расположить их слева от наибольшей в порядке возрастания, а обе оставшихся приписать справа от максимальной в порядке убывания. Всего имеем $C_9^5 \cdot C_4^2 = 126 \cdot 6 = 756$ таких чисел.

2) Выбранная пятёрка содержит ноль. Тогда её ненулевые цифры можно выбрать C_9^4 способами, затем выбрать из них две не максимальных цифры C_4^2 способами, и затем единственным способом расположить их слева от наибольшей в порядке возрастания, а одну оставшуюся и ноль приписать справа от максимальной в порядке убывания. Всего имеем $C_9^4 \cdot C_3^2 = 126 \cdot 3 = 378$ таких чисел.

Итого, получаем 756 + 378 = 1134 чисел.

Критерии проверки. Идея отдельного рассмотрения случаев когда среди цифр числа есть 0 и когда его нет: 1 балл. Верное рассмотрение каждого случая: 3 балла.

10.3. На продолжении диаметра AB полукруга за точку B взята произвольная точка C, через которую проведена касательная к этому полукругу, касающаяся его в точке E. Пусть биссектриса угла BCE пересекает хорды AE и BE полукруга в точках K и M соответственно. Докажите, что треугольник KEM равнобедренный.

Доказательство. Угол между касательной EC и хордой BE равен вписанному углу EAB, опирающемуся на хорду BE. Тогда в треугольниках AKC и EMC углы AKC и EMC равны, так как равны KCA и ECM (EK — биссектриса угла BCE). Значит, равны и дополнительные к ним углы EKC = EKM и EMK, являющиеся углами треугольника EKM. Следовательно, треугольник EKM равнобедренный и его боковые стороны EM и EK равны.

Критерии проверки. Замечено, что угол между касательной EC и хордой BE равен вписанному углу EAB, опирающемуся на хорду BE: 2 балла. Показано, что углы AKC и EMC равны: 3 балла. Показано, что равны и дополнительные к ним углы EKC = EKM и EMK: 2 балла.

10.4. В системе из трёх линейных уравнений $Ax+By+Cz=0, Dx+Ey+Fz=0, Gx+Hy+Iz=0,$ от трёх переменных x, y, z коэффициенты *A, E, I* — положительны, а остальные отрицательны, и каждый из .*A, E, I* больше модуля суммы двух оставшихся коэффициентов того же уравнения. Докажите, что система имеет единственное решение $x=y=z=0$.

Доказательство. Предположим, система имеет ненулевое (когда значение хотя бы одной переменной отлично от нуля) решение. Умножая его при необходимости на минус единицу, получим ненулевое решение, в котором значения хотя бы двух переменных неотрицательны. Далее рассмотрим два случая.

1) Значения всех переменных неотрицательны. Выберем переменную, значение которой максимально и рассмотрим уравнение с тем же порядковым номером, что у этой переменной. Скажем, если максимально $x>0$, то

$A\,x+B\,y+C\,z=x\left(A+B\dfrac{y}{x}+C\dfrac{z}{x}\right)\geq x\left(A-|B|-|C|\right)=x\left(A-|B+C|\right)>0$ - противоречие.
Остальные два случая рассматриваются аналогично.
2) Среди значений переменных есть отрицательное. Скажем, если $x<0$, то $A\,x+B\,y+C\,z\leq A\,x<0$ - противоречие. Остальные два случая рассматриваются аналогично.
Критерии проверки. Сведение к случаю, когда значения хотя бы двух переменных неотрицательны (или не положительны): 1 балл. Рассмотрение каждого из случаев 1) и 2): 3 балла.

10.5. Найти все натуральные числа ***n*** такие, что ***n*** равно сумме трёх чисел, первое из которых является максимальным делителем числа ***n-1***, отличным от ***n-1,*** второе - максимальным делителем числа ***n-2***, отличным от ***n-2,*** и третье - максимальным делителем числа ***n-3***, отличным от ***n-3.***
Ответ. 58 и 66**.**
Решение. Максимальный делитель числа, отличный от него самого, равен числу, делённому на его минимальный простой делитель. 1) Если n нечётно, то минимальные простые делители чисел $n-1$ и $n-3$ равны 2, а минимальный простой делитель $n-2$ обозначим за p - нечётное простое число. Тогда $n=\dfrac{n-1}{2}+\dfrac{n-2}{p}+\dfrac{n-3}{2}=n-2+\dfrac{n-2}{p}$, откуда $n=2\,p+2$ - чётное число — противоречие.
2) Если n чётно, минимальный простой делитель $n-2$ равен 2, обозначим минимальные простые делители $n-1$ и $n-3$ за p и q соответственно — различные нечётные простые числа. Если бы они совпали, то разность $n-1$ и $n-3$, равная 2, делилась бы на нечётные $p=q$, что невозможно.
Тогда $n=\dfrac{n-1}{p}+\dfrac{n-2}{2}+\dfrac{n-3}{q}=\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\right)n-\left(1+\dfrac{1}{p}+\dfrac{3}{q}\right)<\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}\right)n$, откуда $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}>\dfrac{1}{2}$.
Тогда меньшее из этих чисел меньше 4, то есть равно 3, а второе меньше 6, то есть равно 5.
Пусть сначала $p=3,q=5$, тогда $n=\dfrac{31}{30}n-\dfrac{29}{15}$, следовательно возможный ответ $n=58$
Проверка: $58=\dfrac{57}{3}+\dfrac{56}{2}+\dfrac{55}{5}=19+28+11$. - равенство выполнено и числа 19, 28 и 11 действительно максимальные собственные делители чисел 57, 56 и 55.

Пусть теперь $p=5,q=3$, тогда $n=\dfrac{31}{30}n-\dfrac{11}{5}$, следовательно возможный ответ $n=66$.
Проверка: $66=\dfrac{65}{5}+\dfrac{64}{2}+\dfrac{63}{3}=13+32+21$. - равенство выполнено и числа 13, 32 и 21 действительно максимальные собственные делители чисел 65, 64 и 63.
Критерии проверки. Замечено, что максимальный делитель числа, отличный от него самого, равен числу, делённому на его минимальный простой делитель.: 1 балл. Производится рассмотрение случаев 1) и 2): 1 балла. Показана невозможность нечётного n : 1 балл. Для чётного n обосновано различие p и q : 1 балл. Обоснованно найдено, что $p=3,q=5$ или $p=5,q=3$: 2 балла. Сделана проверка с комментарием, что «числа 19, 28 и 11 действительно максимальные собственные делители чисел 57, 56 и 55»: 1 балл.

Каждая задача каждого класса оценивается из 7 баллов

11 класс

11.1. В каждой из четырёх волейбольных команд по шесть игроков, среди которых обязательно есть капитан и разыгрывающий, причём это разные люди. Сколькими способами из этих четырёх команд можно составить сборную из шести игроков, среди которых должны быть хотя бы по одному игроку каждой команды и обязательно пара капитан — разыгрывающий хотя бы из одной команды?

Ответ. 9720.

Решение. Случай 1. Из одной из команд выбраны три игрока, включая капитана и разыгрывающего, а из остальных трёх — по одному. Выбор команды делается четырьмя способами, выбор третьего игрока из неё — ещё четырьмя способами и выбор трёх игроков из оставшихся команд — ещё $6\cdot6\cdot6=216$ способами, в итоге получаем $4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot6=16\cdot216=3456$ возможностей для данного случая.

Случай 2. Из двух команд выбрали по два игрока, причём хотя бы из одной — капитана и разыгрывающего, из остальных двух команд — по одному игроку. Эту пару команд можно выбрать $C_4^2=6$ способами, выбрать из них по паре игроков можно $C_6^2\cdot C_6^2$ способами. При этом нужно исключить $(C_6^2-1)\cdot(C_6^2-1)$ выборов, когда ни в одной из двух команд не будут выбраны одновременно капитан и разыгрывающий, итого получим $2\cdot C_6^2-1=29$ способов. Осталось $6\cdot6=36$ способов выбрать ещё по одному игроку из двух оставшихся команд, всего получаем $6\cdot29\cdot36=6264$ способов в этом случае. Итого 6264 + 3456 = 9720 - ответ задачи.

Критерии проверки. Сведение решения к случаям 1 и 2: 1 балл. Рассмотрение каждого из случаев 1 и 2: 3 балла.

11.2. Докажите, что уравнение $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)=0$ при любых не совпадающих одновременно значениях a, b, c имеет два различных корня.

Доказательство. Первый способ. Раскроем в левой части скобки и приведём подобные: $3x^2-2(a+b+c)x+ab+ac+bc=0$. Дискриминант уравнения равен: $4((a+b+c)^2-3(ab+ac+bc))=4(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$. последнее выражение несложно преобразуется к виду: $2((a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2)$. Полученная сумма всегда неотрицательна и равна нулю тогда и только тогда, когда $a=b=c$.

Второй способ. Без ограничения общности можно считать, что $a\le b\le c$ и что одно из двух неравенств строгое. Обозначим выражение в левой части за $f(x)$.

Если $a<b<c$, то $f(a)=(a-b)(a-c)>0, f(b)=(b-a)(b-c)<0, f(c)=(c-a)(c-b)>0$ и непрерывная функция $f(x)$ имеет по одному корню на интервалах (a, b) и (b, c).

Если $a=b<c$, то $f(a)=0, f(c)=(c-a)^2>0$, один корень $f(x)$ совпадает с a. При этом $f(x)=(x-a)(3x-a-2c)$ и второй корень равен $\frac{a+2c}{3}$, что совпадает с a тогда и только тогда, когда $a=c$ и значения всех трёх переменных совпадают, что противоречит условию.

Аналогично разбирается случай $a<b=c$.

Критерии проверки. Если во втором решении не рассмотрен случай $a=b<c$ или $a<b=c$: снимаем 3 балла.

11.3. В футбольном турнире участвовали 17 команд, каждая из которых сыграла с каждой из остальных по одному разу. Могло ли у каждой команды число одержанных ею побед равняться числу матчей, сыгранных ею вничью?

Ответ. Нет, не могло.

Решение. Предположим противное, что у каждой команды число одержанных ею побед равняется числу матчей, сыгранных ею вничью. Найдём сумму S количеств всех побед, ничьих и поражений всех команд. В этой сумме общее число всех одержанных побед будет равно общему числу всех поражений и оба этих количества, по предположению, равны общему числу всех ничьих. Отсюда следует, что S должно делиться на 3, однако оно равно удвоенному числу всех сыгранных матчей, то есть $17\cdot16=272$ и не делится на 3 —

противоречие. Следовательно, предположение неверно и не могло у каждой команды число одержанных ею побед равняться числу матчей, сыгранных ею вничью.

Критерии проверки. Показано, что общее число всех одержанных побед будет равно общему числу всех поражений: 2 балла. Показано, что оба этих количества равны общему числу всех ничьих.: 3 балла. Проведено суммирование количеств всех побед, ничьих и поражений всех команд и показано, что оно не делится на 3: 2 балла.

11.4. В треугольнике ABC взята точка P такая, что сумма углов PBA и PCA равна сумме углов PBC и PCB. Докажите, что расстояние от вершины A до точки P не меньше расстояния от A до точки I - центра вписанной в ABC окружности, и если эти расстояния равны, то P совпадает с I.

Доказательство. Из условия следует, что сумма углов PBA и PCA равна сумме углов PBC и PCB и что обе они равны полусумме углов ABC и ACB. Отсюда величина угла BPC равна 90 плюс половина угла BAC, что совпадает с величиной угла BIC. Последнее означает, что точка P лежит на описанной окружности треугольника BIC.

Докажем, что центр описанной окружности треугольника BIC совпадает с точкой M пересечения биссектрисы AI и описанной окружности треугольника ABC (это хорошо известная «лемма о трезубце»). Покажем, что треугольники BMI и CMI являются равнобедренными с равными MC, MB и MI. Действительно, в треугольнике CMI угол CMI, равный CMA, равен углу ABC, как вписанный в описанную окружность треугольника ABC и опирающийся на хорду AC. Угол MCI состоит из BCI, равного половине ACB и BCM, равного половине BAC, как вписанный в описанную окружность треугольника ABC и опирающийся на хорду BM. Сумма этих углов равна полусумме ACB и BAC, то есть 90 минус половина угла ABC. Следовательно, угол MIC равен разности 180 и суммы CMI и MCI, что так же равно 90 минус половина угла ABC, поэтому .углы MIC и MCI равны.

Аналогично доказывается равенство углов MIB и MBI. Следовательно, длины MC, MB и MI равны, поэтому M — центр описанной окружности треугольника BIC. Ближайшей к A точкой этой окружности будет её пересечение с отрезком AM, то есть точка I. Следовательно, расстояние от A до P, лежащей на этой окружности, не меньше длины AI, и равно ей только при совпадении P и I, что и требовалось доказать.

Критерии проверки. Показано, что P лежит на описанной окружности треугольника BIC: 2 балла. Доказано, что I — ближайшая к а точка этой окружности: 5 баллов.

11.5. При каком минимальном натуральном n найдутся n различных натуральных чисел $s_1, s_2, \ldots, s_n$ таких, что $(1-\frac{1}{s_1})(1-\frac{1}{s_2})\ldots(1-\frac{1}{s_n})=\frac{7}{66}$?

Ответ. $n=9$ **.**

Решение. Можно считать, что $1<s_1<s_2<\ldots<s_n$, тогда для произвольного $k=1,\ldots,n$ выполняется неравенство $s_k\geq k+1$. Следовательно, $\frac{7}{66}=(1-\frac{1}{s_1})(1-\frac{1}{s_2})\ldots(1-\frac{1}{s_n})\geq(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})\ldots(1-\frac{1}{n+1})=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}$, откуда $n\geq 9$.

Пример девяти чисел, удовлетворяющих условию: 2,3,4,5,6,8,9,10,11.

Критерии проверки. Оценка $n\geq 9$: 5 баллов. Пример девяти чисел, удовлетворяющих условию: 2 балла.