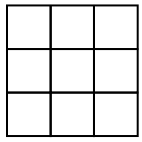
Всесибирская открытая олимпиада школьников 2017-2018 г.г. по математике

Первый этап **7 класс** **05**.11.2017

Каждая задача оценивается в 7 баллов *Время выполнения заданий олимпиады: 4 астрономических часа*

7.1. Квадрат 3х3 разбит на 9 квадратиков 1х1 так, как изображено на рисунке. Расставьте в этих квадратах натуральные числа от 1 до 9 (каждое ровно 1 раз), чтобы сумма чисел в любом квадрате 2х2 была одной и той же.



7.2. Однажды утром в 9:00 из деревни Федино в деревню Нововерандово вышел пешеход Федя. Одновременно навстречу ему из Нововерандово выехала велосипедистка Вера. Известно, что до момента встречи Федя успел пройти треть пути между деревнями, однако, если бы Федя вышел на час раньше, то успел бы пройти до встречи половину пути. В какое время Федя и Вера встретились? Скорости Веры и Феди постоянны.

7.3. Арсений собирается нарисовать на плоскости несколько (больше двух) неперекрывающихся квадратов, возможно различного размера, и могущих иметь общие участки границы Иван утверждает, что в любом случае сможет раскрасить все эти квадраты в 3 цвета таким образом, что никакие два квадрата одного цвета не будут иметь общего участка границы (единственная общая точка общим участком границы не считается). Арсений считает, что это не так. Кто из мальчиков прав? Ответ обоснуйте.

7.4. Имеется 100 монет, из которых 99 настоящие, одинаковых по весу, и 1 фальшивая, которая легче остальных. У Дмитрия в распоряжении есть чашечные весы без гирь, которые всегда показывают неверный результат взвешивания (например, если левая чаша окажется тяжелее, то они покажут либо равенство, либо перевес правой, но что именно - неизвестно). Помогите Дмитрию найти 98 настоящих монет.

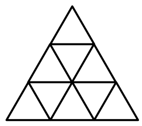
7.5. Дана доска 4х2017. Двое по очереди ставят на неё ладей. Первый должен ставить ладью так, чтобы она била чётное число уже поставленных ладей, а второй - нечётное. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может обеспечить себе победу вне зависимости от действий соперника? Ладья бьёт на любое расстояние по вертикали и по горизонтали, однако не перепрыгивает через фигуры. Например, если три ладьи стоят на одной горизонтали, то левая бьёт только центральную, а центральная - правую и левую.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2017-2018 г.г. по математике

Первый этап **8 класс** **05**.11.2017

Каждая задача оценивается в 7 баллов *Время выполнения заданий олимпиады: 4 астрономических часа*

8.1. Правильный треугольник со стороной 3 разбит на 9 треугольников со стороной 1 так, как изображено на рисунке. Расставьте в этих треугольниках числа от 1 до 9 (каждое ровно 1 раз), чтобы сумма чисел в любом правильном треугольнике со стороной 2 была одной и той же.



8.2. Однажды утром в 9:00 из деревни Федино в деревню Нововерандово вышел пешеход Федя. Одновременно навстречу ему из Нововерандово выехала велосипедистка Вера. Известно, что до момента встречи Федя успел пройти треть пути между деревнями, однако, если бы Федя вышел на час раньше, то успел бы пройти до встречи половину пути. В какое время Федя и Вера встретились? Скорости Веры и Феди постоянны.

8.3. Дан треугольник ABC, в котором выбраны точка D на стороне BC и точка H на стороне AC. Кроме того проведена DK – биссектриса треугольника BDA. Оказалось, что углы CHD и HDK прямые. Найдите HC, если $AC = 2$.

8.4. У Всеволода есть 20 одинаковых квадратов: один белый, а остальные чёрные. Всеволод расположил белый квадрат на столе и собирается закрыть его 19-ью чёрными так, чтобы стороны всех чёрных были параллельны сторонам белого (чёрные квадраты могут пересекаться). Ярослав утверждает, что как бы Всеволод не справился с этой задачей, всегда можно будет убрать один чёрный так, что белый квадрат всё равно будет покрыт чёрными полностью. Прав ли Ярослав? Ответ обоснуйте.

8.5. В школе прошёл турнир по перетягиванию одеяла, состоявший из нескольких раундов. В каждом раунде участвовали две команды, состоящие из ненулевого количества школьников, причём, конечно, человек не мог быть в обеих командах сразу. После турнира выяснилось, что каждая возможная команда, которую можно составить из учащихся этой школы (кроме команды, состоящей из всех людей сразу), участвовала ровно в одном раунде турнира. Докажите, что в таком случае в каждом раунде соревновались в точности все школьники.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2017-2018 г.г. по математике

Первый этап **9 класс** **05**.11.2017

Каждая задача оценивается в 7 баллов *Время выполнения заданий олимпиады: 4 астрономических часа*

9.1. Фирма получает яблочный и виноградный соки в одинаковых стандартных бидонах, а производит коктейль (смесь) из этих соков в одинаковых стандартных банках. В прошлом году одного бидона яблочного сока хватало на 6 банок коктейля, а одного бидона виноградного сока — на 10. В новом году пропорцию соков в коктейле (смеси) изменили и теперь стандартного бидона яблочного сока хватает на 5 банок коктейля. На сколько банок коктейля теперь хватает стандартного бидона виноградного сока?

9.2. Известно, что $\frac{a^2 b^2}{a^4-2b^4}=1$. Найти все возможные значения выражения $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

9.3. Точка M является серединой гипотенузы BC прямоугольного треугольника ABC, а точка P делит катет AC в отношении AP:PC = 1:2. Докажите, что величины углов PBC и AMP равны.

9.4. Можно ли в некоторых клетках шахматной доски 8 на 8 поставить по одной фишке так, чтобы число фишек в любых двух соседних горизонталях отличалось в 3 раза, а в любых двух соседних вертикалях — в 4 раза? Хотя бы одна фишка на доске должна быть.

9.5. При каком минимальном ***n*** в любом множестве из ***n*** различных натуральных чисел, не превосходящих 100, найдутся два, сумма которых является простым числом?

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2017-2018 г.г. по математике

Первый этап **10 класс** **05**.11.2017

Каждая задача оценивается в 7 баллов *Время выполнения заданий олимпиады: 4 астрономических часа*

10.1. Два спортсмена с постоянными скоростями бегают по овальной дорожке небольшого стадиона, первый из них пробегает дорожку полностью на 5 секунд быстрее, чем второй. Если они побегут по дорожке с одной точки старта в одном направлении, то в первый раз снова встретятся через 30 секунд. Через сколько секунд они в первый раз снова встретятся, если побегут по дорожке с одной точки старта в противоположных направлениях?

10.2. Найти все пары действительных значений a и b, при которых оба уравнения $x^2+ax+b^2=0$ и $x^2+bx+a^2=0$ имеют хотя бы один общий корень.

10.3. В ряд слева направо записаны все натуральные числа от 1 до 37 в таком порядке, что каждое число, начиная со второго по 37-ое, делит сумму всех чисел, стоящих левее него: второе делит первое, третье — сумму первого и второго, и т. д, последнее — сумму первых тридцати шести. На первом слева месте оказалось 37, какое число стоит на третьем месте?

10.4. В квадрат ABCD вписана окружность, касающаяся его сторон AB, BC, CD, DA в точках P,Q,R и S соответственно. На отрезках AP и AS взяты точки M и N так, что отрезок MN касается вписанной окружности. Докажите, что отрезки MC и NR параллельны.

10.5. Какое максимальное число квадратов 2 на 2 можно уложить на клетчатую доску размера 7 на 7 квадратов так, чтобы каждые два уложенных квадрата имели не больше одной общей клетки? Квадраты 2 на 2 укладываются по линиям сетки так, что каждый закрывает ровно 4 клетки. Квадраты не выходят за границу доски.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2017-2018 г.г. по математике

Первый этап **11 класс** **05**.11.2017

Каждая задача оценивается в 7 баллов *Время выполнения заданий олимпиады: 4 астрономических часа*

11.1. Два лыжника стартовали из одной точки друг за другом с интервалом 9 минут. Второй лыжник догнал первого в 9 км от точки старта. Дойдя до отметки «27 км», второй лыжник развернулся и пошёл обратно, встретив первого на расстоянии 2 км от точки поворота. Найти скорость второго лыжника.

11.2. Могут ли биссектрисы двух соседних внешних.углов треугольника (примыкающих к некоторой его стороне) пересекаться на его описанной окружности?

11.3. Три действительных числа таковы, что модуль каждого из них не меньше модуля суммы двух остальных. Докажите, что сумма всех трёх этих чисел равна нулю**.**

11.4. Найти все натуральные числа n, которые можно представить в виде $n=\dfrac{x+\frac{1}{x}}{y+\frac{1}{y}}$, для некоторых натуральных чисел x и y.

11.5. а) Квадрат размера 1 на 1 разбит на 25 не обязательно одинаковых прямоугольников, каждый из которых имеет одинаковый периметр $\boldsymbol{p}$. Найти минимальное и максимальное возможное значение $\boldsymbol{p}$. б) Можно ли разбить единичный квадрат на 30 не обязательно одинаковых прямоугольников периметра 2?