Версия от 18.02.2016

Решения заданий заключительного этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников 2015-2016 г.г. по математике

Все задачи оцениваются из 7 баллов

7 класс

7.1. Доказать, что если $a+\frac{1}{a}$ – целое число, то и $a^2+\frac{1}{a^2}$ – целое число.

Решение: Понятно, что $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$ — целое число, но $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 = a^2+\frac{1}{a^2}+2$.

То есть, $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 - 2 = a^2+\frac{1}{a^2}$ – целое. Что и требовалось доказать.

7.2. Можно ли покрасить плоскость в 2016 цветов таким образом, что среди вершин любого треугольника найдётся хотя бы два цвета?

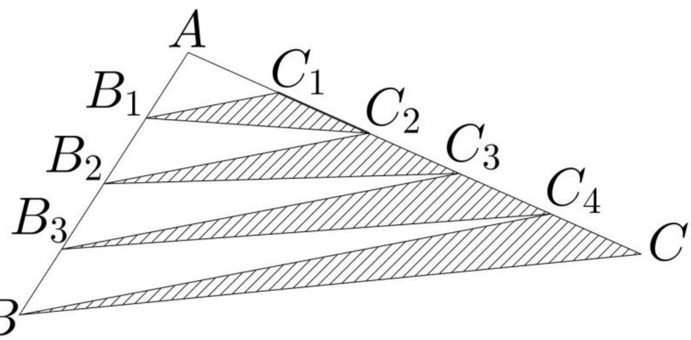
Решение: Докажем, что все точки одного цвета лежат на одной прямой. Так как прямых на плоскости больше 2016, то тем самым мы докажем, что этого сделать нельзя и обязательно найдётся треугольник с тремя вершинами одного цвета.

Пусть есть точки одного цвета, которые не лежат на одной прямой. Тогда таких точек хотя бы 3 (через 2 точки прямую можно провести всегда). Так как они не на одной прямой, то задают треугольник, с вершинами одного цвета. Вспомогательное утверждение доказано.

Критерии: доказательство только того, что всё лежит на прямых – 3 балла. Верная схема доказательства без обоснования того, что точки одного цвета лежат на одной прямой – 4 балла.

7.3. Дан треугольник ABC, сторона AB разбита на 4 равных отрезка $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B$, а сторона AC на 5 равных отрезков $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$. Во сколько раз площадь треугольника ABC больше суммы площадей треугольников $C_1B_1C_2$, $C_2B_2C_3$, $C_3B_3C_4$, C_4BC?

Ответ: в 2 раза.



Решение: Обозначим площадь AB_1C_1 за S. Тогда площадь $B_1C_1C_2$ тоже S, так как B_1C_1 — медиана в AB_1C_2. Аналогично, площадь $B_1B_2C_2$ равна $2S$, т.к. C_2B_1 — медиана в AB_2C_2. Площадь $B_2C_2C_3$ равна половине площади AB_2C_2, так как у этих треугольников общая высота, а основание C_2C_3 в два раза меньше основания AC_2. Тогда площадь $B_2C_2C_3$ равна $2S$. Из аналогичных рассуждений получаем, что площадь $B_2C_3B_3$ равна половине площади AB_2C_3, то есть $3S$. C_3C_4 составляет треть от AC_3, поэтому площадь $B_3C_3C_4$ равна трети AB_3C_3 и равна $3S$. Аналогично, B_3C_4B и C_4BC

имеют площадь по *4S*. Тогда площадь всей закрашенной части равна $S + 2S + 3S + 4S = 10S$, а незакрашенной — $S + 2S + 3S + 4S = 10S$, т.е. закрашенная составляет половину от всего треугольника.

7.4. Маша и Миша вышли навстречу друг другу одновременно каждый из своего дома и встретились в одном километре от дома Маши. В другой раз они снова вышли каждый из своего дома навстречу друг другу одновременно, но Маша шла в 2 раза быстрее, и Миша в 2 раза медленнее, чем в прошлый раз. В этот раз они встретились в 1 километре от дома Миши. На каком расстоянии находятся дома Маши и Миши друг от друга?

Ответ: 3 км.

Решение: Докажем, что в первый и во второй раз они потратили одинаковое время. Пусть это не так, и во второй раз они потратили меньше времени. Тогда в первый раз Маша прошла 1 км, а во второй меньше двух километров (скорость в два раза больше, а время меньше). Миша прошел во второй раз 1 км, значит в первый раз он прошел больше двух (по аналогичным причинам). Значит, всё расстояние больше трёх километров (один от Маши и больше двух от Миши в первый раз), но одновременно меньше трёх километров (один от Миши и меньше двух от Маши во второй раз). Значит, это невозможно. Если во второй раз они шли дольше, то аналогичные рассуждения приведут к противоречию (в силу симметричности ситуаций).

Итак, они двигались одинаковое время оба раза. Значит, во второй раз Маша прошла 2 км, а Миша – 1. Следовательно, их дома находятся на расстоянии 3 километра.

Критерии: ответ, ответ с проверкой – 0 баллов, не доказано, что в первом и во втором случае время одинаковое, при использовании этого – не больше 2 баллов.

7.5. Дано число 1836549, можно брать две соседние ненулевые цифры и менять их местами, после чего вычесть из каждой из них по 1. Какое наименьшее число может получиться после этих операций?

Ответ: 1010101

Решение: Цифры в числе чередуются по четности: нечётное, чётное и т.д. Заметим, что при описанной операции чётное и нечётное числа меняются местами, а затем из них вычитается 1 и тем самым порядок чётности не нарушается. Таким образом, нельзя получить число меньше, чем 1010101 (в каждом разряде стоит наименьшая нечётная или чётная цифра, соответственно).

Покажем, как можно достичь этого результата (операцию проводим над подчеркнутыми цифрами, иногда над двумя парами одновременно):

$1\underline{83}65\underline{49} > 12\underline{7658}3 > 125\underline{67}43 > 12\underline{5654}3 > 12\underline{54}343 > 1\underline{23}4343 > 1\underline{21}4343 >$ 1014343

Далее каждую пару 43 превращаем в 23, затем в 21 и в 01, после этого получаем 1010101.

Критерии: оценка – 4 балла, пример – 2 балла.

8 класс

8.1. На олимпиаде встретились гимназисты, лицеисты и обычные школьники. Некоторые из них встали в круг. Гимназисты всегда врут обычным школьникам, лицеисты — гимназистам, а обычные школьники — лицеистам. Во всех остальных случаях учащиеся говорят правду. Каждый сказал своему правому соседу: «Я — гимназист». Сколько ребят из обычных школ было в этом круге?

Ответ: ребят из обычной школы в кругу не было.

Решение: Пусть в кругу был обычный школьник. Рассмотрим его левого соседа. Это не мог быть другой обычный школьник или лицеист, потому что они бы сказали правду. Но и гимназистом он быть не может, так как тогда бы он соврал, а он сказал правду. Значит, сосед обычного школьника никем не может быть. Следовательно, обычные школьники в круг не встали.

Критерии: только ответ – 0 баллов, ответ с проверкой – 1 балл. За утверждение, что справа от гимназиста обязательно стоит гимназист/лицеист (на самом деле может стоить или лицеист, или гимназист) – снимать 3 балла.

8.2. В автобусе имеются одноместные и двухместные сидения. Утром в автобусе сидело 13 человек, а полностью свободных сидений было 9. Вечером в автобусе сидело 10 человек, а полностью свободными были 6 сидений. Сколько сидений в автобусе?

Ответ: 16.

Решение: Если утром пассажиры сели на 6 двойных сидений (то есть как можно плотнее), то они заняли 7 сидений, ещё 9 сидений было свободно. Итого: 16 сидений. Если они сидели не так плотно, то они заняли больше сидений. То есть в автобусе не меньше 16 сидений, с одной стороны.

С другой стороны, если вечером каждый пассажир занял по сидению, то занято было 10 сидений, ещё 6 было свободно, всего – 16 сидений. Если некоторые сели вместе, то сидений было бы меньше. Значит, сидений не больше 16.

Итак, сидений не больше, но и не меньше 16. Значит, их ровно 16.

Критерии: только ответ, ответ с проверкой – 1 балл, оценка только с одной стороны – 3 балла, за отсутствие примера не снимать баллов.

8.3. На доске записаны натуральные числа от 1 до 15. Лера выбирает два числа и находит их произведение, а Лада получает оставшиеся тринадцать чисел и находит их сумму. Могут ли результаты девочек совпасть?

Ответ: не могут.

Решение: Пусть Лера забрала числа a и b ($a < b$). Тогда, если числа девочек равны, то:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 15 - a - b = ab$$

Преобразуем:

$$16 * 15 : 2 = ab + a + b$$
$$8 * 15 + 1 = ab + a + b + 1$$
$$121 = (a + 1)(b + 1)$$

Так как левая часть делится на 121, то и правая делится на 121. Раз $a < b$, то вариант $a + 1 = b + 1 = 11$ невозможен. Значит, $a + 1 = 1$, $b + 1 = 121$, но числа должны быть больше 0 и меньше 15, следовательно, и этот вариант невозможен.

Значит, результаты совпасть не могли.

Критерии: при подобном решении за потерю одного случая ($a + 1 = 1$, $b + 1 = 121$ или $a + 1 = b + 1 = 11$) – снимать 1 балл.

При решении перебором за потерю одного случая – снимать 1 балл, иначе – оценивать задачу исходя из 3 баллов.

8.4. В стране 15 городов, некоторые из которых соединены дорогами. Каждому городу присваивается номер, равный количеству выходящих из него дорог. Оказалось, что между городами с одинаковыми номерами дорог нет. Какое наибольшее количество дорог может быть в стране?

Ответ: 85.

Решение: Упорядочим номера городов по невозрастанию:

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_{15}.$$

Заметим, что городов с номером $15 - i$ не больше i. Действительно, если таких городов хотя бы $i + 1$, то они не могут быть соединены друг с другом, а значит могут быть соединены не больше чем с $15 - (i + 1) = 14 - i$ городами, а должны быть соединены с $15 - i$, противоречие.

Значит, максимальный номер не больше 14, следующие два – не больше 13, следующие три – не больше 12, следующие четыре не больше 11, оставшиеся 5 не больше 10. Общая сумма номеров не больше $14+2*13+3*12+4*11+5*10 = 170$. Так как каждая дорога вносит вклад в номера ровно двух городов, то общее количество дорог не больше $170 : 2 = 85$.

Покажем, что этого можно достичь. Разобьём страну на 5 областей. В первой – один город, во второй – два, в третье – три и т.д. Пусть города будут соединены тогда и только тогда, когда лежат в разных областях. Тогда первый город соединён со всеми другими (имеет номер 14) , города из второй области со всеми, кроме друг друга (и имеют номер 13), города из третьей области соединены с 15 - 3 = 12 городами, из четвёртой с 15 - 4 = 11 городами и из пятой области с 15 - 5 = 10 городами.

Критерии: оценка – 4 балла, пример – 2 балла

8.5. Дан выпуклый четырёхугольник *ABCD* со стороной *AD* равной 3. Диагонали *AC* и *BD* пересекаются в точке *E,* причём известно, что площади треугольников *ABE* и *DCE* равны 1. Найдите сторону *BC*, если известно, что площадь *ABCD* не превосходит 4.

Ответ: 3.

Решение: Треугольники *ABD* и *ACD* имеют одинаковую площадь, так как составлены из общего *AED* и равновеликих *ABE* и *DCE*. Так как *ABD* и *ACD* имеют общее основание *AD*, то у них равны высоты, проведённые к нему. Отсюда следует, что *BC* параллельно *AD*, то есть наш четырёхугольник – трапеция.

Обозначим *BC* за *x*. Треугольники *BEC* и *AED* подобны, следовательно, $BE/ED = BC/AD = x/3$. Кроме того, площадь *BEC* равна *BE/ED* площади *BCD*, так как эти треугольники имеют общее основание, а их высоты относятся как *BE* к *ED*. Следовательно, площадь *BEC* равна $x/3$. Аналогично, площадь *AED* равна $3/x$.

В силу того, что площадь всего четырёхугольника не превосходит 4, $x/3 + 3/x \le 2$.

Но сумма обратных друг другу положительных величин всегда не меньше, чем 2, причём равенство достигается только при равенстве слагаемых, то есть, в нашем случае, $x/3 = 3/x$, откуда *x* равен 3.

Критерии: только ответ – 0 баллов. Доказано, что *ABCD* трапеция – плюс 2 балла. Получено уравнение – плюс 1 балл. Не объяснено, почему неравенство возможно только при равенстве слагаемых – снимать 1 балл.

9 класс

28 февраля 2016г Время написания работы 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Известно, что сумма цифр числа A равна 59, а сумма цифр числа B равна 77. Какую минимальную сумму цифр может иметь число A+B?

Ответ. 1.

Решение. Достаточно рассмотреть A=9999995, B=999999990000005, тогда A+B=1000000000000000, сумма цифр равна 1 - минимально возможная.

Критерии оценивания. Верный ответ и пример: 7 баллов. Наличие арифметических ошибок: минус 1-2 балла. Любой другой ответ: 0 баллов.

9.2. На острове проживают 20 человек, часть из них рыцари, которые всегда говорят правду, а остальные — лжецы, которые всегда лгут. Каждый островитянин точно знает, кто из остальных рыцарь, а кто — лжец. На вопрос приезжего, сколько рыцарей проживают на острове, первый из островитян ответил: «Ни одного», второй: «Не более одного», третий: «Не более двух», четвёртый: «Не более трёх» и т. д., двадцатый заявил: «Не более девятнадцати». Так сколько же рыцарей проживают на острове?

Ответ. 10.

Решение. Если бы первый островитянин был рыцарем, то своим ответом он бы солгал, чего не может быть. Следовательно, первый — лжец и всего рыцарей на острове не больше 19. Значит, двадцатый островитянин своим ответом сказал правду, поэтому он рыцарь, в частности, на острове не меньше одного рыцаря. Тогда, если бы второй островитянин оказался рыцарем, их вместе с двадцатым было бы уже два, и он бы солгал, значит, второй — лжец и всего рыцарей не больше 18. Поэтому девятнадцатый сказал правду и он — рыцарь. Продвигаясь так дальше, несложно убедиться, что все островитяне с первого по десятого — лжецы, а все с 11-ого по 20-ого — рыцари.

Критерии оценивания. Установлено, что первый - лжец: 1 балл. Установлено, что первый - лжец а второй- рыцарь: 2 балла. Дан верный ответ и построен пример к нему с проверкой: 3 балла. Любой неверный ответ: 0 баллов.

9.3. Найти величину выражения $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}$, если известно, что $\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}=5$ и $x+y+z=2$.

Ответ. 7.

Решение. Преобразуем: $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}=\frac{x+y+z}{y+z}+\frac{y+x+z}{x+z}+\frac{z+x+y}{x+y}-3=$

$$=(x+y+z)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{x+z}+\frac{1}{x+y}\right)-3=2\cdot5-3=7.$$

Критерии оценивания. Наличие арифметических ошибок: минус 1-2 балла. На каком-нибудь примере подсчитан верный ответ: 1 балл.

9.4. В прямоугольном треугольнике ABC отмечены: точка K — середина гипотенузы AB и на катете BC точка M такая, что BM : MC = 2. Пусть отрезки AM и CK пересекаются в точке P. Докажите, что прямая KM касается описанной окружности треугольника AKP.

Доказательство. 1.Пусть T — середина отрезка BM, длины отрезков BT, TM и MC равны. По теореме, обратной теореме Фалеса, прямые AM и KT параллельны, поэтому $\angle$KAM= $\angle$BKT.

2. В прямоугольном треугольнике ABC точка K — середина гипотенузы AB, поэтому $\angle$KCB= $\angle$KBC.

3. Треугольники BKT и MKC равны по двум углам $\angle$KCM= $\angle$KCB= $\angle$KBC=$\angle$KBT и двум парам равных соответствующих сторон KC=KB и CM=BT. Следовательно, $\angle$MKC= $\angle$BKT=$\angle$KAM=$\angle$KAP. Значит, угол между хордой KP и прямой KM, равный $\angle$MKC, равен вписанному углу KAP, опирающемуся на хорду KP, поэтому KM — касательная к описанной окружности треугольника AKP в точке K.

Критерии оценивания. Построена точка T и замечено, что $\angle$KAM= $\angle$BKT.: 1 балл. Показано, что треугольники BKT и MKC равны: 2 балла. Доказано $\angle$MKC= $\angle$BKT=$\angle$KAM: 2 балла.

9.5. В футбольном турнире участвовало 10 команд, каждая из которых с каждой из остальных сыграла по одному матчу. По окончании турнира выяснилось, что для любой тройки команд найдутся две команды из этой тройки, набравших равное число очков в играх с командами из этой тройки. Доказать, что все команды можно разбить не более, чем на три подгруппы таких, что любые две команды из одной подгруппы сыграли между собой вничью. За выигрыш в футболе команда получает 3 очка, за ничью — 1 очко и за проигрыш — 0 очков.

Доказательство. 1. Сначала выясним, как могли сыграть три команды между собой с соблюдением условий задачи. Если внутри тройки не было ничьих, единственным подходящим вариантом будет (Т1), когда каждая проиграла и выиграла по одному матчу, у всех по 3 очка. Если ничья была ровно одна, то сделавшие её команды либо обе выиграли у третьей (Т2: 4,4 и 0 очков), либо обе проиграли третьей (Т3: 1,1 и 6 очков). Случай ровно с двумя ничьими невозможен. Подходит и вариант с тремя ничьими (Т4): все набирают по 2 очка.
2. Из пункта 1 следует, что: а) Если две А и Б команды сыграли между собой вничью, то результаты матчей любой другой команды с А и с Б одинаковы. б) Если команда сыграла с командами А и Б с одинаковым результатом, то А и Б сыграли между собой вничью.
3. Докажем, что в турнире была хотя бы одна ничья. В противном случае, всего имеем 45 побед во всех матчах, значит, найдётся команда А, выигравшая не меньше 5 матчей. Рассмотрим команды Б и В, проигравшие А, очевидно, что тройка А,Б,В не удовлетворяет условию задачи.
4. Обозначим какие-нибудь команды, сыгравшие между собой вничью, за А и Б. В первую подгруппу включим все команды, сыгравшие с А и Б вничью, во вторую все команды, выигравшие у А и Б, в третью — все команды, проигравшие А и Б. Из пункта 2.б) следует, что в пределах каждой подгруппы все команды сыграли между собой вничью.
Критерии оценивания. Пункт 1: 2 балла. Пункт 2: 1 балл. Пункт 3: 1 балл. Пункт 4: 3 балла.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Заключительный этап
10 класс

28 февраля 2016г Время написания работы 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Найти все натуральные числа n, такие, что $\frac{1}{n}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}$ для некоторых простых p и q

Ответ. $n=1$.
Решение. Приведя выражение в условии к общему знаменателю, получим: $n(p+q+1)=pq$. Из простоты p и q следует, что делителями правой части могут быть только числа 1, p, q и pq, одно из которых и должно равняться $p+q+1$. Ввиду того, что 1, p и q меньше $p+q+1$, получаем $pq=p+q+1$ и $n=1$. Перепишем последнее равенство в виде $(p-1)(q-1)=2$, откуда $p=2, q=3$ или $p=3, q=2$.

Критерии оценивания. Угадано $n=1$ и $p=2, q=3$ или $p=3, q=2$: 1 балл. Доказано, что $n=1$- единственное число, которое может удовлетворять условию: 5 баллов. Показано, что оно удовлетворяет условию при $p=2, q=3$ или $p=3, q=2$: 2 балла. (Достаточно просто привести пример $p=2, q=3$ или $p=3, q=2$)

10.2. По координатной плоскости, стартуя в начале координат, прыгает кузнечик. Первый прыжок длины один сантиметр направлен вдоль оси ОХ, каждый следующий прыжок на 1 см длиннее предыдущего, и направлен перпендикулярно предыдущему в одну из двух сторон по его выбору. Сможет ли кузнечик после 31-ого прыжка оказаться в начале координат?

Ответ. Да.

Решение. Кузнечик совершит 16 горизонтальных прыжка нечётных длин 1, 3, 5,.., 31 см. Разобьём их на 4 четвёрки последовательных нечётных чисел, в каждой четвёрке первый и последний прыжки будут совершаться вправо, а второй и третий – влево. После каждых четырех таких прыжков кузнечик будет оказываться на оси OY. Вертикальных прыжков кузнечик совершит 15, разобьём их на тройку 2,4,6 первых и 3 последовательных четвёрок оставшихся от 8 до 30. Прыжки длин 2 и 4 он сделает вверх, а прыжок длины 6 – вниз. В каждой четвёрке первый и последний прыжки он сделает вверх, а второй и третий – вниз. Прыгая так, после первой тройки и после каждой четвёрки вертикальных прыжков он окажется на оси OX. В итоге, после всех 31 прыжка он вернётся в начало координат.

Критерии оценивания. Присутствует идея раздельной стратегии прыжков по горизонтали и вертикали: 1 балл. Есть идея разбиения прыжков на четвёрки, за которые он возвращается на исходное положение в данном направлении: 2 балла.

10.3. Две окружности пересекаются в точках P и M. На первой окружности выбрана произвольная точка A, отличная от P и M и лежащая внутри второй окружности, лучи PA и MA вторично пересекают вторую окружность в точках B и C соответственно. Доказать, что прямая, проходящая через A и центр первой окружности, перпендикулярна BC.

Доказательство. Пусть E — точка первой окружности, диаметрально противоположная A. Нам нужно доказать, что прямые AE и BC перпендикулярны. Точка E может лежать как вне второй окружности, так и внутри неё, либо может совпадать с P или M.

1. A лежит внутри второй окружности, E не совпадает с P или M. Обозначим точку пересечения BC и прямой AE за T. Тогда $\angle CBP = \angle CMP$, как вписанные во вторую окружность, опирающиеся на общую хорду PC , и $\angle CMP = \angle AMP = \angle AEP$, как вписанные в первую окружность, опирающиеся на общую хорду PA. Следовательно, четырёхугольник BTPE вписанный, поэтому $\angle BTE = \angle BPE = \angle APE = 90°$.

2. A лежит внутри второй окружности, и E совпадает, скажем, с P, то четырёхугольник CBMP вписанный, поэтому $\angle CBP = \angle CMP = \angle AMP = \angle AME = 90°$ и прямые AE и BC перпендикулярны.

Критерии оценивания. Если пропущена возможность, когда E совпадает с P или M: снимаем 2 балла. Нерассмотрение одного из случаев, когда точка E лежит вне второй окружности, или внутри неё, не карается, так, как счёт углов в обоих случаях совершенно одинаковый.

10.4. Найти все функции $f(x)$, определённые на всей числовой прямой, удовлетворяющие уравнению $f(y-f(x)) = 1-x-y$ для произвольных x и y.

Ответ. $f(x) = \frac{1}{2} - x$.

Решение. 1) Положим сначала в условии $y = f(x)$, тогда $f(x) = 1-x-f(0)$.

2) Подставим полученное выражение для $f(x)$ в условие, тогда: $f(y-f(x)) = 1-y+f(x)-f(0) = 1-y+1-x-f(0)-f(0) = 1-x-y$, откуда $f(0) = \frac{1}{2}$.

Следовательно, $f(x)=\frac{1}{2}-x$ -единственный кандидат в решения.

3) Проверка подстановкой: $f(y-f(x))=\frac{1}{2}-y+f(x)=\frac{1}{2}-y+\frac{1}{2}-x=1-x-y$ - условие задачи выполнено, следовательно, $f(x)=\frac{1}{2}-x$ является единственным решением задачи.

Критерии оценивания. Найдено только $f(0)=\frac{1}{2}$: 2 балла. Получено соотношение $f(x)=1-x-f(0)$: 3 балла. Отстутствие проверки: минус 1 балл.

10.5. Найдутся ли пять последовательных натуральных чисел таких, что если обозначить их буквами a,b,c,d,e в некотором порядке, то выполнится равенство $(a+b)(b+c)(c+d)(d+e)(e+a)=(a+c)(c+e)(e+b)(b+d)(d+a)$**?**

Ответ. Нет.

Решение. Предположим, такие числа нашлись, обозначим их за $x-2, x-1, x, x+1, x+2$ для некоторого натурального $x\geq 3$. Заметим, что десять чисел в скобках в обеих частях равенства в условии являются всевозможными попарными суммами чисел a,b,c,d,e, то есть попарными суммами чисел $x-2, x-1, x, x+1, x+2$. Из равенства в условии следует, что произведение всех этих десяти попарных сумм является точным квадратом натурального числа. Выразим это произведение через x: $(4x^2-9)(4x^2-4)(4x^2-1)^2 4x^2$, оно является квадратом тогда и только тогда, когда квадратом является $(4x^2-9)(4x^2-4)=16x^4-52x^2+36$. Однако последнее выражение не может быть квадратом, так как оно меньше $(4x^2-6)^2=16x^4-48x^2+36$, но больше $(4x^2-7)^2=16x^4-56x^2+49$, в силу того, что $4x^2\geq 36>13$

Критерии оценивания. Замечено, что десять чисел в скобках в обеих частях равенства в условии являются всевозможными попарными суммами чисел a,b,c,d,e: 1 балл. Замечено, что произведение всех этих десяти попарных сумм является точным квадратом натурального числа: 2 балла. Это произведение выражено через x, и замечено, что оно является квадратом тогда и только тогда, когда квадратом является $16x^4-52x^2+36$: 2 балла. Доказано, что $16x^4-52x^2+36$ не является квадратом: 2 балла.

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Заключительный этап
11 класс

28 февраля 2016г Время написания работы 4 астрономических часа Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Найти величину выражения $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{2}{1+xy}$, если известно, что $x\neq y$ и сумма первых двух слагаемых выражения равна третьему.

Ответ. 2.

Решение. Запишем условие равенства суммы первых двух слагаемых третьему в виде: $\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+xy}=\frac{1}{1+xy}-\frac{1}{1+y^2}$ и приведём к общему знаменателю:

Версия от 18.02.2016

$\frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)}=\frac{y(y-x)}{(1+y^2)(1+xy)}$. Ввиду $x \neq y$ сокращаем $x-y$ и $1+xy$: $x(1+y^2)=y(1+x^2)$. Последнее равносильно $(x-y)(xy-1)=0$, снова сокращаем $x-y$, получаем $xy=1$ а искомое выражение равно $\frac{2}{1+xy}\cdot 2=2$.

Критерии оценивания. Угаданы какие-нибудь подходящие $x \neq y$ и ответ: 1 балл.

11.2. По координатной плоскости, стартуя в начале координат, прыгает кузнечик. Первый прыжок длины один см направлен вдоль оси OX, каждый следующий прыжок на 1 см длиннее предыдущего, и направлен перпендикулярно предыдущему в одну из двух сторон по его выбору. Сможет ли кузнечик после сотого прыжка оказаться в начале координат?

Ответ. Не сможет.

Решение. Кузнечик сделает по 50 вертикальных и горизонтальных прыжков. Длины вертикальных прыжков равны 2,4,..,100 см. Среди этих чисел 25 делящихся на 4 и 25, дающих при делении на 4 остаток 2, следовательно, при любой расстановке плюсов и минусов между ними сумма будет давать делении на 4 остаток 2 и никогда не будет равна 0. Кузнечик после 100 прыжков не сможет оказаться на оси OX, а, значит, и в начале координат.

Критерии. Присутствует идея раздельного рассмотрения прыжков по горизонтали и вертикали: 1 балл. Отсутствие доказательства того, что при любой расстановке плюсов и минусов между ними сумма длин вертикальных прыжков никогда не будет равна 0: минус 3 балла.

11.3. Найти все натуральные числа, которые можно представить одновременно как сумму нескольких (больше одного) натуральных чисел и как произведение тех же натуральных чисел.

Ответ. Все, кроме единицы и простых чисел.

Решение. Докажем, что простые числа и единица нам не подходят. Очевидно, что единица не может быть представлена в виде суммы более, чем одного натурального числа. Если простое число p равно произведению нескольких натуральных, то один из сомножителей равен самому p, а остальные – единице. Сумма этих сомножителей будет, очевидно, больше p.

Пусть n - не простое, тогда существует разложение $n=a\cdot b$, для некоторых $a,b \geq 2$. Тогда $(a-1)(b-1)\geq 1$, поэтому $n=ab \geq a+b$. Следовательно, добавив, при необходимости к числам a,b единицы в количестве, равном $n-a-b$, получим множество натуральных чисел, сумма и произведение которых равны n.

Критерии оценивания. Доказано, что простые числа и единица нам не подходят: 1 балл. Доказано, что любое непростое число, отличное от 1 годится: 6 баллов. Частные случаи: 0 баллов.

11.4. В треугольнике ABC отрезки AK, BL и CM — высоты, H — их точка пересечения, S – точка пересечения MK и BL, P — середина отрезка AH, T — точка пересечения прямой LP и стороны AB. Доказать, что прямая ST перпендикулярна стороне BC.

Доказательство. Обозначим величину угла ACB за $\angle C$, и посчитаем другие углы в треугольнике.

1. Углы AMC и AKC — прямые, опирающиеся на AC, поэтому четырёхугольник AMKC вписан в окружность с диаметром AC.

2. Во вписанном четырёхугольнике АМКС : $\angle$AMK = 180° -$\angle$C.
3. В прямоугольных треугольниках АКС, ALH: $\angle$AHL = 90° - $\angle$CAK = 90° - (90° - $\angle$C) = $\angle$C .
4. Треугольник AHL прямоугольный, и Р — середина его гипотенузы, поэтому треугольник LPH равнобедренный и $\angle$PLH = $\angle$PHL= $\angle$AHL =$\angle$C.
5. Сумма $\angle$AMK (= $\angle$TMS) и $\angle$PLH (= $\angle$TLS) равна 180°, следовательно, четырёхугольник TMSL является вписанным.
6. Углы ВМС и BLC — прямые, опирающиеся на ВС, поэтому четырёхугольник BMLC вписан в окружность с диаметром ВС. Во вписанном четырёхугольнике BMLC: $\angle$BML = 180° -$\angle$ACB= 180° -$\angle$C. Отсюда $\angle$AML = 180° -$\angle$BML=$\angle$C =$\angle$TML .
7. Углы TSL и TML равны, как вписанные, опирающиеся на общую хорду TL в описанной окружности четырёхугольника TMSL, поэтому $\angle$TSL = $\angle$C.
8. Прямые ST и АК параллельны, так как образуют с прямой BL углы TSL и AHL, величины которых равны величине угла АСВ. При этом АК, как высота, перпендикулярна стороне ВС, значит и ST перпендикулярна стороне ВС.
Критерии оценивания. Доказано, что четырёхугольник TMSL является вписанным: 3 балла.

11.5. Пусть $a_{1,}a_{2,}...,a_n$ - произвольные действительные числа. Доказать, что найдётся натуральное $k, 1 \le k \le n$ такое, что все k средних арифметических $\frac{a_1+...+a_k}{k}, \frac{a_2+...+a_k}{k-1}, ..., \frac{a_{k-1}+a_k}{2}, \frac{a_k}{1}$ не превосходят $\frac{a_1+...+a_n}{n}$.
Доказательство. Для каждого $i=1,2,..,n$ обозначим среднее арифметическое чисел $a_{1,}a_{2,}...,a_i$ через S_i . Докажем, что в качестве искомого можно взять любое k такое, что S_k минимально среди всех $S_{1,}S_{2,}...,S_n$. Для любого $i=1,2,..,k$ запишем: $k \cdot S_k = a_1 + .. + a_i + a_{i+1} + .. + a_k = i \cdot S_i + a_{i+1} + .. + a_k$, откуда $a_{i+1} + .. + a_k = k \cdot S_k - i \cdot S_i \le k \cdot S_k - i \cdot S_k$ и $\frac{a_{i+1} + .. + a_k}{k-i} \le S_k \le S_n = \frac{a_1+...+a_n}{n}$, что и требовалось доказать.
Замечание. При этом k естественно, может оказаться не единственным.
Критерии оценивания. Утверждение о том, что в качестве искомого можно взять любое k такое, что S_k минимально среди всех $S_{1,}S_{2,}...,S_n$ без обоснования: 1 балл.