Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике

Второй этап

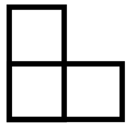
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Может ли оказаться, что эту задачу правильно решит 1000 участников олимпиады, причем среди них мальчиков будет на 43 больше, чем девочек?

7.2. Лада и Лера загадали по натуральному числу. Если число Лады уменьшить на 5%, а число Леры увеличить на 5%, то результаты будут равны. Оказалось, что загаданные числа — наименьшие из обладающих этим свойством. Какие числа загадали девочки?

7.3. У Ани есть клетчатый квадрат 2015 на 2015, в каждую клетку которого она вписала по числу. Оказалось, что в любых трёх клетках, образующих уголок (см. рисунок, такой уголок можно поворачивать), сумма чисел равна 3. Докажите, что Аня поставила во все клетки 1.



7.4. Даша загадала натуральное число и утверждает, что оно не больше произведения своих цифр. Докажите, что Даша загадала однозначное число.

7.5. Внутри треугольника ABC выбрана точка O таким образом, что углы OAC и OCA равны. Кроме того, через точку O проведены прямые AO до пересечения с BC в точке L и CO до пересечения с AB в точке K. Оказалось, что $AK = CL$. Обязательно ли, что $AB = BC$?

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Второй этап
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Лада, Лера и Лара решали задачи. Оказалось, что Лада решила настолько же больше задач, чем Лера, насколько Лера решила больше, чем Лара. Могло ли оказаться, что они решили вместе 2015 задач?

8.2. Число уменьшили на 1%, затем остаток (то есть полученное число) уменьшили на 2%, затем остаток на 3% и так далее, пока в конце концов остаток не уменьшили на 30%. Другое число сначала уменьшили на 30%, затем остаток на 29% и так далее, пока остаток не уменьшили на 1%. Результаты оказались равны. Какое исходное число было больше?

8.3. В параллелограмме провели диагонали, а затем провели биссектрисы всех углов, образованных ими, до пересечения со сторонами параллелограмма. Эти точки назвали соответственно A, B, C и D. Докажите, что $ABCD$ – ромб.

8.4. Назовём *средним магическим* набора чисел отношение их суммы к их произведению. Изначально на доске записано несколько (больше одного) различных натуральных чисел. После того, как с неё стёрли самое маленькое из них, среднее магическое всех чисел, записанных на доске, увеличилось в три раза. Найдите, чему были равны числа на доске.

8.5. У Даши есть 4 монеты, одна из которых фальшивая, отличная по весу от настоящих. Разрешается брать две группы монет и спрашивать у Даши, какая из них легче. Если такая есть, то Даша указывает на неё. Если же группы оказываются равны по весу, то Даша указывает на произвольную группу. Как за 3 вопроса выяснить, легче или тяжелее фальшивая монета и найти её?

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Второй этап
9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Петя выписал на доске 10 целых чисел (не обязательно различных). Потом он посчитал их попарные произведения (то есть каждое из написанных чисел умножил на каждое другое). Среди них оказалось ровно 15 отрицательных. Сколько на доске было написано нулей?

9.2. В трапеции одна боковая сторона вдвое больше другой, а сумма углов при большем основании равна 120 градусов. Найти углы трапеции.

9.3. Натуральные числа a,b,c таковы, что $a^2+b^2+c^2$ делится на $ab+bc+ac$ и $a+b+c$ - простое число. Доказать, что $a=b=c=1$.

9.4. N различных натуральных чисел, не превосходящих 1000, записаны по кругу так, что сумма любых двух из них, стоящих через одного, делится на 3. Найти максимально возможное значение N.

9.5. На шахматную доску размера 8 на 8 произвольным образом уложены 8 фигурок домино, каждая из которых занимает две соседних по стороне клетки. Разные домино не имеют общих клеток. Доказать, что на доске всегда найдётся квадрат размера 2 на 2 клетки, ни одна клетка которого не закрыта домино. Верно ли это, если на доске уложены 9 домино?

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике
Второй этап
10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Пусть неравенство $a \cdot \cos x + b \cdot \cos 2\mathrm{x} \ge -1$ выполнено при всех значениях x. Докажите, что $a + b \le 2$.

10.2. Найти число различных расстановок 8 ладей на различных белых полях шахматной доски 8 на 8 таких, что ни одна ладья не бьёт другую. Шахматная ладья бьёт все клетки горизонтали и вертикали, на пересечении которых стоит.

10.3. На доске написаны десять чисел (среди которых могут быть равные) таких, что среднее арифметическое любых трёх из этих чисел тоже написано на доске. Доказать, что все эти числа равны между собой.

10.4. Две окружности внешним образом касаются друг друга в точке P. Прямая касается первой из них в точке A и пересекает вторую в точках B и C (B между A и C). Доказать, что AP является биссектрисой угла, смежного с углом BPC.

10.5. Можно ли найти четыре различных натуральных числа таких, что каждое из них делится на разность любых двух из трёх оставшихся чисел?

Всесибирская открытая олимпиада школьников 2015-2016 г.г. по математике

Второй этап

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Найти все ненулевые числа, в пять раз меньшие суммы всех своих цифр.

11.2. Назовём четвертью шахматной доски каждый из 4 квадратов 4 на 4 клетки, на которые её разбивают линии сетки, соединяющие середины её горизонтальных сторон и середины её вертикальных сторон. Найти количество различных расстановок 8 ладей на шахматной доске 8 на 8 таких, что ни одна ладья не бьёт другую и в каждой четверти находится одинаковое число ладей. Шахматная ладья бьёт все клетки горизонтали и вертикали, на пересечении которых стоит.

11.3. Можно ли расставить в вершинах и на рёбрах правильной треугольной пирамиды десять последовательных натуральных чисел так, чтобы для каждого ребра сумма трёх чисел на ребре и в его концах была постоянной?

11.4. Внутри окружности взята произвольная точка M, отличная от центра окружности. Для каждой хорды окружности, проходящей через M и отличной от диаметра, обозначим через С точку пересечения касательных к окружности, проведённых через концы этой хорды. Доказать, что геометрическое место точек С является прямой.

11.5. На дипломатическом приёме присутствуют 99 персон, каждый из которых слышал не менее, чем об n других участниках приёма. При этом если А слышал о Б, это не означает автоматически, что и Б слышал про А. При каком минимальном n гарантированно найдутся хотя бы два участника приёма, слышавших друг о друге?