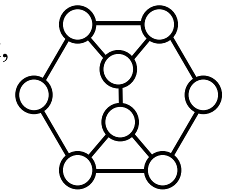
Решения заданий первого этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников 2015-2016 г.г. по математике

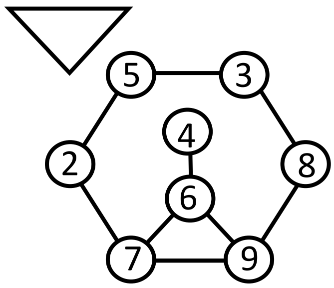
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Расставите в кружки на картинке числа от 2 до 9 (без повторений) так, чтобы никакое число не делило бы нацело ни одного из своих соседей.



Решение: например, так



(на рисунке сдвинулся треугольник – это ребра, соединяющие 4-5 и 4-3)

Критерий: Любая верная расстановка, даже без пояснения – 7 баллов.

7.2. Прямоугольник разрезан на несколько прямоугольников, периметр каждого из которых – число метров, делящееся на 4. Верно ли, что периметр исходного прямоугольника делится на 4 нацело?

Ответ: Нет.

Решение: Например, прямоугольник со сторонами 1 и 2 можно разрезать на квадраты со стороной 1. Периметры квадратов равны 4, а периметр прямоугольника – 6.

Критерий: Если найден верный контрпример, но проверка не выполнена – 7 баллов.

7.3. В семье шестеро детей. Пятеро из них соответственно на 2, 6, 8, 12 и 14 лет старше младшего, причём возраст каждого ребёнка — простое число. Сколько лет младшему?

Ответ: 5, 7, 11, 13, 17 и 19

Решение: Остатки от деления на 5 разностей возрастов равны 2, 1, 3, 2 и 4, соответственно. Поэтому, если возраст младшего не делится на 5, то возраст какого-то другого ребёнка делится. Так как все числа простые, то это число равно 5. Подходит только второй ребёнок, так как иначе возраст самого младшего должен быть меньше нуля. Тогда возраста 3, 5, 9, 11, 15 и 17, но здесь не все числа простые. Значит, возраст самого младшего равен 5. Тогда остаётся один вариант и числа равны 5, 7, 11, 13, 17 и 19.

Критерий: Только ответ – 1 балл, есть догадка, что надо смотреть по модулю пять – плюс 1 балл. Рассмотрен только один из случаев, когда 5 лет первому или второму ребёнку – не больше 4 баллов.

7.4. На острове живёт нечётное число людей, причём каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Как-то раз все рыцари заявили: “Я дружу только с 1 лжецом”, а все лжецы: “Я не дружу с рыцарями”. Кого на острове больше, рыцарей или лжецов?

Ответ: рыцарей больше

Решение: Каждый лжец дружит хотя бы с одним рыцарем. Но так как каждый рыцарь дружит ровно с одним лжецом, у двух лжецов не может быть общего друга-рыцаря. Тогда каждому лжецу можно поставить в соответствие его друга рыцаря, откуда получается, что рыцарей, по крайней мере, столько же, сколько и лжецов. Так как всего жителей на острове нечётное число, то равенство невозможно. Значит, рыцарей больше.

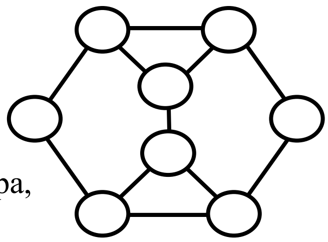
Критерий: Сказано, что у каждого лжеца есть друг-рыцарь – плюс 1 балл. Замечено, что общих друзей-рыцарей быть не может – плюс 2 балла. Только ответ – 0 баллов.

7.5. Есть 100 коробок, пронумерованных числами от 1 до 100. В одной коробке лежит приз, и ведущий знает, где он находится. Зритель может послать ведущему пачку записок с вопросами, требующими ответа "да" или "нет". Ведущий перемешивает записки в пачке и, не оглашая вслух вопросов, честно отвечает на все. Какое наименьшее количество записок нужно послать, чтобы наверняка узнать, где находится приз?
Ответ: 99.
Решение: Чтобы можно было однозначно определить, в какой из 100 коробок лежит приз, требуется возможность получить хотя бы 100 различных ответов на один набор вопросов. Так как ответы ведущего для различных положений приза могут отличаться только числом "да" среди них, то требуется возможность получить в ответ хотя бы 100 различных количеств "да". Значит, требуется хотя бы 99 вопросов (от 0 до 99 "да").
Пример на 99 вопросов. Пусть *k*-ый вопрос: «Номер коробки, в которой лежит приз, меньше либо равен *k*?». Тогда если ответов "да" ноль, то приз в сотой коробке, если один, то в 99-й и т.д.
Критерий: Только оценка – 3 балла, только пример – 3 балла. Только ответ – 0 баллов.

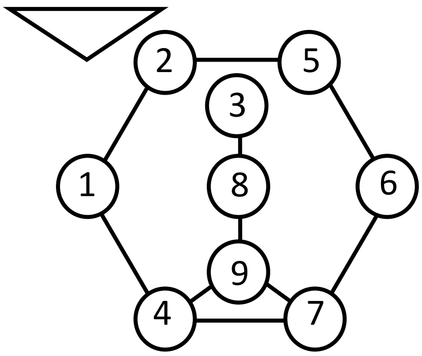
8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Расставить в кружки на картинке числа от 1 до 9 (без повторений), чтобы соседние числа не имели бы общих делителей, отличных от единицы.



Решение: (на рисунке сдвинулся треугольник – это ребра, соединяющие 3-5 и 2-3)



Критерий: любая верная расстановка без пояснения – 7 баллов.

8.2. В семье 4 человека. Если Маше удвоят стипендию, общий доход всей семьи возрастет на 5%, если вместо этого маме удвоят зарплату – на 15%, если же зарплату удвоят папе – на 25%. На сколько процентов возрастет доход всей семьи, если дедушке удвоят пенсию?
Ответ: на 55%.
Решение: При удвоении стипендии Маши общий доход семьи увеличивается ровно на величину этой стипендии, поэтому она составляет 5% от дохода. Аналогично, зарплаты мамы и папы составляют 15% и 25%. Значит, пенсия дедушки составляет 100-5-15-25 = 55%, и если её удвоят, то доход семьи вырастет на 55%.
Критерий: Только ответ, ответ с проверкой – 0 баллов.

8.3. Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 7 и 14.
Ответ: 56 или 70.
Решение: Пусть биссектриса угла при вершине A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M, причём $BM = 7$ и $CM = 14$. Тогда $\angle BMA = \angle MAD = \angle AMB$, поэтому

треугольник ABM – равнобедренный. Следовательно, $AB = BM = 7$, $CD = AB = 7$, $AD = BC = 7 + 14$. Периметр равен 56.
Аналогично для случая $BM = 14$. Периметр равен 70.
Критерий: потерян один случай – решение оценивается из 3 баллов. Ответ, ответ с проверкой – оценивается из 3 баллов.

8.4. Квадрат разбили на 100 прямоугольников девятью вертикальными и девятью горизонтальными прямыми (параллельными его сторонам). Среди этих прямоугольников оказалось ровно 9 квадратов. Докажите, что среди них есть хотя бы два одинаковых.
Решение: Предположим, что все квадраты разного размера. Тогда никакие два не стоят в одной строке или столбце, так как сторона квадрата равна ширине столбца и высоте строки, в которых он стоит. Суммарная ширина девяти столбцов, в которых есть квадраты, равна сумме длин сторон квадратов, с одной стороны. С другой стороны, сумма длин сторон квадратов равна суммарной высоте девяти строк, в которых есть квадраты. Но тогда и ширина десятого столбца равна высоте десятой строки (т.к. изначально разбивали квадрат), следовательно, на их пересечении тоже стоит квадрат, а значит, их минимум 10, что противоречит условию.
Критерий: доказано, что все квадраты в разных строках и столбцах - 3 балла.

8.5. Есть 100 коробок, пронумерованных числами от 1 до 100. В одной коробке лежит приз, и ведущий знает, где он находится. Зритель может послать ведущему пачку записок с вопросами, требующими ответа "да" или "нет". Ведущий перемешивает записки в пачке и, не оглашая вслух вопросов, честно отвечает на все. Какое наименьшее количество записок нужно послать, чтобы наверняка узнать, где находится приз?
Ответ: 99.
Решение: Чтобы можно было однозначно определить, в какой из 100 коробок лежит приз, требуется возможность получить хотя бы 100 различных ответов на один набор вопросов. Так как ответы ведущего для различных положений приза могут отличаться только числом "да" среди них, то требуется возможность получить в ответ хотя бы 100 различных количеств "да". Значит, требуется хотя бы 99 вопросов (от 0 до 99 "да").
Пример на 99 вопросов. Пусть k-ый вопрос: «Номер коробки, в которой лежит приз, меньше либо равен k?». Тогда если ответов "да" ноль, то приз в сотой коробке, если один, то в 99-й и т.д.
Критерий: Только оценка – 3 балла, только пример – 3 балла. Только ответ – 0 баллов.

9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Из горячего крана ванна заполняется за 17 минут, а из холодного — за 11 минут. Через сколько минут после открытия горячего крана нужно открыть холодный, чтобы к моменту наполнения ванны горячей воды в ней было на треть больше, чем холодной?
Ответ. Через 5 минут.
Решение. Пусть объём ванны равен V, тогда к моменту её наполнения в ней должно быть $\frac{3}{7}V$ холодной воды и $\frac{4}{7}V$ горячей. Скорость наполнения ванны холодной и горячей водой равны $\frac{V}{11}$ и $\frac{V}{17}$ соответственно. Следовательно, искомое время равно разности времён наполнения $\frac{4}{7}V$ ванны горячей водой и наполнения $\frac{3}{7}V$ ванны холодной водой, то есть $\frac{4}{7}V/\frac{V}{17}-\frac{3}{7}V/\frac{V}{11}=\frac{68-33}{7}=5$ минут.
Указания. Ответ с проверкой: 2 балла. Составление уравнений: 3 балла.

9.2. Можно ли представить число 99...99 (всего 9 девяток) в виде суммы двух натуральных чисел, суммы цифр которых одинаковы?

Ответ. Нельзя.

Решение. Пусть можно представить число A=99...99 (всего 9 девяток) в виде суммы двух чисел B и C, суммы цифр которых одинаковы. Если при сложении цифр последних разрядов B и C происходит переход единицы в предыдущий разряд, то последняя цифра суммы не превосходит 8. Но в последнем разряде A стоит девятка, поэтому перехода единицы не происходит и сумма цифр последних разрядов B и C равна 9. Аналогично рассуждая слева направо для оставшихся разрядов, видим, что в каждом разряде B и C сумма цифр равна 9 и перехода единицы не происходит. Тогда сумма цифр B плюс сумма цифр C, равная удвоенной сумме цифр B, должна равняться сумме цифр A, то есть 81 — нечётному числу. Противоречие.

9.3. Найти минимальное натуральное число n такое, что в любом множестве из n различных натуральных чисел, не превосходящих 1000, всегда можно выбрать два числа, большее из которых не делится нацело на меньшее.

Ответ. $n = 11$.

Решение. Среди 10 первых степеней двойки $1 = 2^0, 2 = 2^1, 4 = 2^2, ..., 512 = 2^9$, в каждой паре чисел большее делится на меньшее, следовательно, $n \geq 11$.

С другой стороны, пусть в некотором множестве из $n \geq 11$ чисел большее число каждой пары чисел делится на меньшее. Расположим все числа по возрастанию, из предположения следует, что каждое следующее число как минимум в 2 раза больше предыдущего. Значит, самое большое число не меньше, чем в $2^{10} = 1024$ раз больше первого, то есть больше 1000 - противоречие.

Указания. Доказано $n \geq 11$ с примером: 3 балла. Доказано только $n \leq 11$ (вторая часть): 4 балла.

9.4. Через точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника провели прямые, соответственно параллельные биссектрисам противоположных углов. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.

Доказательство. Рассмотрим любой из треугольников, образованных вершиной исходного треугольника и двумя точками касания вписанной окружности сс смежными этой вершине сторонами. Поскольку отрезки касательных из вершины к окружности равны, этот треугольник равнобедренный и его биссектриса перпендикулярна отрезку, соединяющему точки касания. Следовательно прямая, параллельная этой биссектрисе, проходящая через третью точку касания, является высотой треугольника, образованного точками касания вписанной окружности со сторонами исходного треугольника. Утверждение задачи следует теперь из теоремы о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Указания. Замечено, что биссектриса перпендикулярна отрезку, соединяющему точки касания: 2 балла.

9.5. В каждой клетке таблицы 10 на 10 записан минус. За одну операцию разрешается одновременно менять на противоположные знаки во всех клетках некоторого столбца и некоторой строки (плюс на минус и наоборот). За какое минимальное количество операций можно добиться того, что все знаки в таблице станут плюсами?

Ответ. За 100 операций.

Решение. Всего в строке и столбце, проходящих через данную клетку 19 клеток, поэтому, если мы проделаем операции со всеми парами строк и столбцов таблицы (всего $10 \times 10 = 100$ операций), то каждый знак в таблице поменяется 19 раз, став из минуса плюсом, поэтому 100 операций достаточно.

Операцию замены знаков во всех клетках некоторого столбца и некоторой строки будем называть операцией относительно клетки-пересечения этих строки и столбца. Клетки,

относительно которых мы делали операции, назовём красными, остальные — синими.
Строки и столбцы, содержащие чётное число красных клеток назовём чётными, а содержащие нечётное число красных клеток — нечётными. Допустим, можно поменять все знаки в таблице меньше чем за 100 операций, тогда рассмотрим некоторую синюю клетку A в строке X и столбце Y. Чтобы знак в A поменялся, нужно, чтобы, чтобы X и Y вместе содержали нечётное количество красных клеток, можно считать строку X чётной, а столбец Y — нечётным. Заметим, что на пересечении строки и столбца одинаковой чётности должна стоять красная клетка, а на пересечении строки и столбца разной чётности — синяя, иначе знак в этой клетке после всех операций не изменится. Следовательно, количество красных клеток в каждой чётной строке равно числу чётных столбцов, а количество синих — числу нечётных столбцов таблицы. Есть хотя бы одна чётная строка X, значит, всего в таблице чётное число нечётных столбцов. Но количество красных клеток в каждой нечётной строке (нечётное!) равно числу нечётных столбцов, то есть чётному числу - противоречие с тем, что есть хотя бы один нечётный столбец. Следовательно, нельзя обойтись меньше, чем 100 операциями.
Указания. Верный пример для 100 операций с пояснениями: 2 балла. Доказательство минимальности 100: 5 баллов.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Из города в деревню вышел Викентий, а навстречу ему из деревни в город одновременно вышел Афанасий. Найти расстояние между деревней и городом, если известно, что расстояние между пешеходами равнялось 2 км дважды: сначала, когда Викентий прошёл половину пути до деревни, и потом, когда Афанасий прошёл треть пути до города.
Ответ. 6 км.
Решение. Обозначим расстояние между деревней и городом за S км, скорости Викентия и Афанасия за x и y, и посчитаем время, потраченное путниками в первом и втором случаях. Получим в первом случае: $\frac{S/2}{x}=\frac{S/2-2}{y}$, во втором $\frac{2S/3+2}{x}=\frac{S/3}{y}$. Отсюда, исключая x и y, имеем $S^2-2S-24=0$, откуда $S=6$ км.
Указания. Ответ с проверкой: 1 балл. Составление уравнений: 3 балла.

10.2. Можно ли представить число 199...99 (одна единица и 10 девяток) в виде суммы двух натуральных чисел, суммы цифр которых одинаковы?
Ответ. Нельзя.
Решение. Пусть можно представить число A=99...99 (всего 9 девяток) в виде суммы двух чисел B и C, суммы цифр которых одинаковы. Если при сложении цифр последних разрядов B и C происходит переход единицы в предыдущий разряд, то последняя цифра суммы не превосходит 8. Но в последнем разряде A стоит девятка, поэтому перехода единицы не происходит и сумма цифр последних разрядов B и C равна 9. Аналогично рассуждая слева направо для оставшихся разрядов, видим, что в каждом разряде B и C сумма цифр равна 9 и перехода единицы не происходит. При этом мы считаем, что в первом разряде одного из них стоит 0. Тогда сумма цифр B плюс сумма цифр C, равная удвоенной сумме цифр B, должна равняться сумме цифр A, то есть 91 — нечётному числу. Противоречие.

10.3. Через точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника провели прямые, соответственно параллельные биссектрисам противоположных углов. Докажите, что эти прямые пересекаются в одной точке.
Доказательство. Рассмотрим любой из треугольников, образованных вершиной исходного треугольника и двумя точками касания вписанной окружности со смежными этой вершине

сторонами. Поскольку отрезки касательных из вершины к окружности равны, этот треугольник равнобедренный и его биссектриса перпендикулярна отрезку, соединяющему точки касания. Следовательно, прямая, параллельная этой биссектрисе, проходящая через третью точку касания, является высотой треугольника, образованного точками касания вписанной окружности со сторонами исходного треугольника. Утверждение задачи следует теперь из теоремы о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке

10.4. Можно ли расставить в вершинах куба различные целые числа так, чтобы число в каждой вершине равнялось сумме трёх чисел на концах рёбер, выходящих из этой вершины?
Ответ. Да, можно, например: в вершинах нижней грани по часовой стрелке 6,1,-3,2, в вершинах верхней грани над ними: 3,-2,-6,-1.
Решение. Обозначим вершины куба, как обычно, через $ABCDA_1B_1C_1D_1$, вершины A,C,B_1 и D_1 назовём чёрными, вершины B,D,A_1,C_1 — белыми. Один конец каждого ребра при этом белый, второй — чёрный, для каждой вершины все соседние имеют противоположный цвет. Каждое число равно сумме трёх соседних чисел противоположного цвета и каждое число один раз участвует в суммах для трёх соседних чисел противоположного цвета. Следовательно, сумма всех белых чисел равна утроенной сумме всех чёрных чисел и наоборот, откуда сумма всех чёрных чисел и сумма всех белых чисел равны нулю. Значит, число в вершине A равно сумме чисел в вершинах B,D и A_1, а она равны числу в вершине C_1 с обратным знаком. Таким образом, в концах каждой большой диагонали куба записаны противоположные числа. Следовательно, если задать три числа в вершинах B,D и A_1, они полностью определят все оставшиеся числа требуемым в задаче образом. Задав их как 1,2,3, получим один из ответов задачи.
Указания. Ответ можно подобрать и не прибегая к приведённым выше рассуждениям. Но он, в любом случае будет по структуре таким же. Просто за подбор ответа ставим те же 7 баллов. Любая попытка доказательства противного — 0 баллов.

10.5. Натуральные числа a,b,c,d таковы, что $a+c=1000, b+d=500$. Найти максимальное значение суммы $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$.

Ответ. $\frac{1}{499}+\frac{999}{1}$.
Решение. Ввиду симметрии можно считать, что $b \geq d$. Тогда при замене пары a,c на пару $a-1, c+1$ получим $(\frac{a-1}{b}+\frac{c+1}{d})-(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})=\frac{1}{d}-\frac{1}{b} \geq 0$ - увеличение искомого выражения, следовательно, максимум нужно искать среди дробей $\frac{1}{b}+\frac{999}{d}$. При замене пары b,d на пару $b+1, d-1$ получим $(\frac{1}{b+1}+\frac{999}{d-1})-(\frac{1}{b}+\frac{999}{d})=\frac{999}{d(d-1)}-\frac{1}{b(b+1)}$. Ввиду того, что $b \geq d$, имеем $b(b+1) \geq d(d+1) > d(d-1)$, поэтому $\frac{999}{d(d-1)} > \frac{1}{d(d-1)} > \frac{1}{b(b+1)}$ и разность в предыдущем предложении положительна. Следовательно, максимум выражения достигается при $a=1, b=499, c=999, d=1$ и равен $\frac{1}{499}+\frac{999}{1}$.

Указания. Верный ответ с правильными a,b,c,d : 1 балл. Каждый из двух шагов в доказательстве: по 3 балла.

11 класс:

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Из пункта А в пункт Б вышел Парамон. В 12^{00} , когда он прошёл половину пути до Б, вслед за ним из А в Б выбежал Агафон, и одновременно из Б в А вышел Соломон. В 13^{20} Агафон встретился с Соломоном, а в 14^{00} догнал Парамона. Во сколько произошла встреча Парамона и Соломона?

Ответ. В 13 часов.

Решение. Обозначим расстояние между А и Б за S км, скорости Парамона, Соломона и Агафона соответственно за x, y, z км в час. Тогда из условия получаем: $\frac{S/2}{z-x} = 2, \frac{S}{y+z} = \frac{4}{3}$, откуда $x + y = \frac{1}{2}S$. Следовательно, Парамон и Соломон встретятся через $\frac{S/2}{\mathrm{S}/2} = 1$ час после полудня, то есть в 13 часов.

Указания. Ответ с проверкой: 1 балл. Составление уравнений: 3 балла.

11.2. Медиана AM треугольника ABC делит отрезок PR, параллельный стороне AC, с концами на сторонах AB и BC, на отрезки длины 5 см и 3 см, считая от стороны AB. Чему равна длина стороны AC?

Ответ. 13 см.

Решение. Обозначим концы отрезка за P и R, точку его пересечения с медианой AM — за Q, при этом P лежит на стороне AB, а R — на стороне BC. Проведём среднюю линию MN треугольника, её длина равна половине длины AC. Воспользуемся подобием пар треугольников ANM и APQ, MAC и MRQ. Коэффициент первого подобия равен k=AM/AQ, а второго AM/MQ, их сумма равна единице. Тогда $k \cdot NM = k \cdot \frac{AC}{2} = 5, (1-k) \cdot AC = 3$, откуда $AC = 13$.

Указания. Проведена средняя линия и замечены оба подобия: 2 балла.

11.3. Можно ли из дробей $\frac{1}{100}, \frac{2}{99}, \frac{3}{98}, \ldots, \frac{100}{1}$ (все дроби с натуральными числителем и знаменателем, сумма числителя и знаменателя которых равна 101) выбрать три, произведение которых равно 1?

Ответ. Нет, нельзя.

Решение. Предположим противное, и найдутся три таких дроби $\frac{a}{101-a}, \frac{b}{101-b}, \frac{c}{101-c}, 1 \le a < b < c \le 100$, произведение которых равно 1. Тогда $2abc = 101^3 - 101^2(a+b+c) + 101(ab+bc+ac)$, правая часть равенства делится на 101, следовательно и левая тоже. Ввиду простоты числа 101 отсюда следует, что одно из чисел $a,b.c$ должно делиться на 101, что невозможно, так как они меньше 101.

Указания. Отсутствие прямого указания на простоту числа 101 приводит к снижению оценки на 3 балла.

11.4. Две окружности пересекаются в точках A и B, и центр O первой из них лежит на второй. На второй окружности выбрана некоторая точка S, отрезок SO пересекает первую окружность в точке P. Доказать, что P является центром вписанной окружности треугольника ABS.

Доказательство. Нужно доказать, что P является точкой пересечения биссектрис треугольника ABS. Отрезки OA и OB равны, как радиусы первой окружности, поэтому равны дуги OA и OB второй окружности, следовательно равны опирающиеся на них вписанные углы ASO и BSO. Значит, SO и с ней SP является биссектрисой угла ASB. Обозначим точу пересечения отрезка SB с первой окружностью за Q. Первая окружность и прямые SA и SB симметричны относительно прямой SO, поэтому точки A и Q также симметричны относительно прямой SO, следовательно, отрезки AP и QP равны, поэтому равны дуги AP и QP первой окружности, следовательно равны опирающиеся на них вписанные углы ABP и QBP. Значит, BP является биссектрисой угла ABQ = ABS. Таким образом, P является точкой пересечения биссектрис углов ASB и ABS и центром вписанной окружности треугольника ABS.

Указания. Доказательство того, что SP является биссектрисой угла ASB: 2 балла. Доказательство того, что отрезки AP и QP равны: 3 балла. Доказательство того, что равны углы ABP и QBP: 2 балла.

11.5. Множество X различных натуральных чисел, не превосходящих n таково, что сумма любых двух, в том числе и совпадающих, элементов *X,* не превосходящая n, тоже принадлежит *X.* Доказать, что среднее арифметическое всех чисел множества X не меньше $\frac{n+1}{2}$.

Доказательство. Обозначим элементы множества X через $1 \le x_1 < x_2 < \ldots < x_m \le n$. Сначала рассмотрим сумму $x_1 + x_m$, она больше x_m и не может лежать в X, следовательно, по условию $x_1 + x_m \ge n+1$. Аналогично, для произвольного $k \le \left[\frac{m+1}{2}\right]$ имеем: $x_{m-k+1} < x_{m-k+1} + x_1 < \ldots < x_{m-k+1} + x_k$. Если $x_{m-k+1} + x_k \le n$, то все суммы $x_{m-k+1} + x_1, \ldots, x_{m-k+1} + x_k$ будут k различными членами *X,* большими x_{m-k+1}, что невозможно, поскольку больше x_{m-k+1} только $x_{m-k+2}, \ldots, x_m$ - всего $k-1$ элементов *X,* противоречие. Следовательно, для каждого $k = 1,2,\ldots\left[\frac{m+1}{2}\right]$ имеем $x_{m-k+1} + x_k \ge n+1$, При нечётном m в частности, $x_{\frac{m+1}{2}} \ge \frac{n+1}{2}$. Суммируя полученные равенства, получим $x_1 + x_2 + \ldots + x_k \ge m\frac{(n+1)}{2}$, откуда следует утверждение задачи.

Указания. Замечено с обоснованием, что $x_1 + x_m \ge n+1$: 1 балл. Замечено без обоснования, что $x_{m-k+1} + x_k \ge n+1$: ещё 1 балл.