Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Первый этап **9 ноября 2014г**

8 класс

Время выполнения работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

8.1. Расставьте на футбольном поле четырёх футболистов так, чтобы попарные расстояния между ними были равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6 метров.

8.2. По кольцевой линии в одном направлении курсируют с одинаковой скоростью и равными интервалами 12 трамваев. Сколько трамваев нужно добавить, чтобы при той же скорости интервалы между трамваями уменьшились на одну пятую?

8.3. Квадрат суммы цифр числа A равен сумме цифр числа A^2. Найдите все такие двузначные числа A и объясните, почему других нет.

8.4. В выпуклом четырехугольнике ABCD угол CBD равен углу CAB, а угол ACD равен углу BDA. Докажите, что тогда угол ABC равен углу ADC..

8.5. Каждая цифра натурального числа N строго больше стоящей слева от неё цифры. Чему равна сумма цифр числа $9N$?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Первый этап **9 ноября 2014г**

8 класс

Время выполнения работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

8.1. Расставьте на футбольном поле четырёх футболистов так, чтобы попарные расстояния между ними были равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6 метров.

8.2. По кольцевой линии в одном направлении курсируют с одинаковой скоростью и равными интервалами 12 трамваев. Сколько трамваев нужно добавить, чтобы при той же скорости интервалы между трамваями уменьшились на одну пятую?

8.3. Квадрат суммы цифр числа A равен сумме цифр числа A^2. Найдите все такие двузначные числа A и объясните, почему других нет.

8.4. В выпуклом четырехугольнике ABCD угол CBD равен углу CAB, а угол ACD равен углу BDA. Докажите, что тогда угол ABC равен углу ADC..

8.5. Каждая цифра натурального числа N строго больше стоящей слева от неё цифры. Чему равна сумма цифр числа $9N$?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

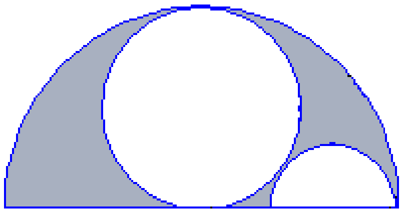
Первый этап **9 ноября 2014г**

9 класс

Время выполнения работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

9.1. Одуванчик утром распускается, три дня цветет жёлтым, на четвёртый день утром становится белым, а к вечеру пятого дня облетает. В понедельник днем на поляне было 20 жёлтых и 14 белых одуванчиков, а в среду – 15 жёлтых и 11 белых. Сколько белых одуванчиков будет на поляне в субботу?

9.2. На классной доске написаны числа 1,2,...,2014 . Разрешается стереть любые два числа, записав вместо одного из них модуль их разность. Доказать, что многократным повторением такой операции нельзя добиться того, чтобы на доске остался один нуль.



9.3. Внутри полукруга радиуса 12 расположены круг радиуса 6, и маленький полукруг, касающиеся друг друга попарно, как показано на рисунке. Найти радиус маленького полукруга.

9.4. Дан треугольник ABC. На сторонах AB и BC взяты точки D и E соответственно таким образом, что угол ACB в два раза больше угла BED. Докажите, что AC + EC > AD.

9.5. а) Разбить все натуральные числа от 1 до 12 включительно на шесть пар, суммы чисел в которых являются шестью различными простыми числами.

б) Можно ли все натуральные числа от 1 до 22 включительно разбить на одиннадцать пар, суммы чисел в которых являются одиннадцатью различными простыми числами?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

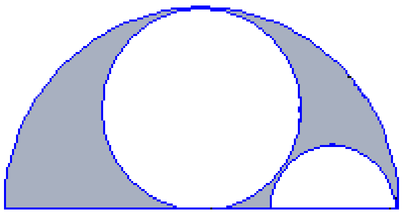
Первый этап **9 ноября 2014г**

9 класс

Время выполнения работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

9.1. Одуванчик утром распускается, три дня цветет жёлтым, на четвёртый день утром становится белым, а к вечеру пятого дня облетает. В понедельник днем на поляне было 20 жёлтых и 14 белых одуванчиков, а в среду – 15 жёлтых и 11 белых. Сколько белых одуванчиков будет на поляне в субботу?

9.2. На классной доске написаны числа 1,2,...,2014 . Разрешается стереть любые два числа, записав вместо одного из них модуль их разность. Доказать, что многократным повторением такой операции нельзя добиться того, чтобы на доске остался один нуль.



9.3. Внутри полукруга радиуса 12 расположены круг радиуса 6, и маленький полукруг, касающиеся друг друга попарно, как показано на рисунке. Найти радиус маленького полукруга.

9.4. Дан треугольник ABC. На сторонах AB и BC взяты точки D и E соответственно таким образом, что угол ACB в два раза больше угла BED. Докажите, что AC + EC > AD.

9.5. а) Разбить все натуральные числа от 1 до 12 включительно на шесть пар, суммы чисел в которых являются шестью различными простыми числами. б) Можно ли все натуральные числа от 1 до 22 включительно разбить на одиннадцать пар, суммы чисел в которых являются одиннадцатью различными простыми числами?

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Первый этап **9 ноября 2014г**

10 класс

Время выполнения работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

10.1. Найти все трёхзначные натуральные числа А, квадрат которых оканчивается на А.

10.2. Биссектриса разбивает треугольник на два треугольника, периметры которых равны. Доказать, что исходный треугольник - равнобедренный.

10.3. Найти все решения в четырёхзначных натуральных числах уравнения . $1+2013x+2015y=xy$.

10.4. Пусть M и N - точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AB и AC, а P - точка пересечения прямой MN с биссектрисой угла B. Доказать, что угол BPC - прямой.

10.5. Для произвольного натурального числа n найти все натуральные k, для которых существует последовательность натуральных чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ такая, что $\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\ldots+\frac{n}{x_n}=k$.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Первый этап **9 ноября 2014г**

10 класс

Время выполнения работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

10.1. Найти все трёхзначные натуральные числа А, квадрат которых оканчивается на А.

10.2. Биссектриса разбивает треугольник на два треугольника, периметры которых равны. Доказать, что исходный треугольник - равнобедренный.

10.3. Найти все решения в четырёхзначных натуральных числах уравнения . $1+2013x+2015y=xy$

10.4. Пусть M и N - точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AB и AC, а P - точка пересечения прямой MN с биссектрисой угла B. Доказать, что угол BPC - прямой.

10.5. Для произвольного натурального числа n найти все натуральные k, для которых существует последовательность натуральных чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ такая, что $\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\ldots+\frac{n}{x_n}=k$.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Первый этап **9 ноября 2014г**

11 класс

Время выполнения работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

11.1. Прямая пересекает график функции $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс – в точке с абсциссой x_3. Докажите, что $\frac{1}{x_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

11.2. Биссектриса разбивает треугольник на два треугольника, радиусы вписанных окружностей которых равны. Доказать, что исходный треугольник - равнобедренный.

11.3. Найти все трёхзначные натуральные числа А, квадрат которых оканчивается на А.

11.4. В полукруге радиуса 18 см на одной из половинок диаметра построен полукруг радиуса 9 см, и вписан круг, касающийся большого полукруга изнутри, маленького полукруга снаружи и и второй половинки диаметра. Найти радиус этого круга.

11.5. Сколькими способами можно заполнить таблицу размера $n \times n$ клеток нулями и единицами так, чтобы в каждой строке и каждом столбце содержалось чётное число единиц? Каждая клетка таблица должна содержать ноль либо единицу.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2014-15 гг.

Первый этап **9 ноября 2014г**

11 класс

Время выполнения работы 4 астрономических часа *Каждая задача оценивается в 7 баллов*

11.1. Прямая пересекает график функции $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс – в точке с абсциссой x_3. Докажите, что $\frac{1}{x_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

11.2. Биссектриса разбивает треугольник на два треугольника, радиусы вписанных окружностей которых равны. Доказать, что исходный треугольник - равнобедренный.

11.3. Найти все трёхзначные натуральные числа А, квадрат которых оканчивается на А.

11.4. В полукруге радиуса 18 см на одной из половинок диаметра построен полукруг радиуса 9 см, и вписан круг, касающийся большого полукруга изнутри, маленького полукруга снаружи и и второй половинки диаметра. Найти радиус этого круга.

11.5. Сколькими способами можно заполнить таблицу размера $n \times n$ клеток нулями и единицами так, чтобы в каждой строке и каждом столбце содержалось чётное число единиц? Каждая клетка таблица должна содержать ноль либо единицу.