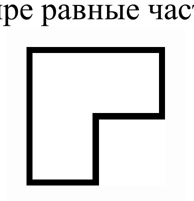
Решения заданий первого этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2014-15 гг. 9 ноября 2014г

7 класс

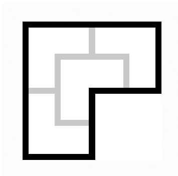
Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. На круговом маршруте работают два автобуса, которые курсируют с одинаковой скоростью и интервалом движения в 21 минуту. Каким будет интервал движения, если на этом маршруте будут работать 3 автобуса с той же одинаковой скоростью?
Ответ: 14.
Решение: Так как интервал движения при двух автобусах на маршруте составляет 21 минуту, то длина маршрута “в минутах” составляет 42 минуты. Следовательно, интервал движения при трех автобусов на маршруте составляет 42 : 3 = 14 минут.
Критерии: только ответ, ответ с проверкой – 3 балла.

7.2. У Кая есть ледяная пластинка в форме "уголка" (см. рисунок). Снежная Королева потребовала от Кая разрезать ее на четыре равные части. Как ему это сделать?



Ответ: например, можно разрезать уголок так:


.

Критерии: любое верное разрезание оценивается в 7 баллов.

7.3. В таблице 3×3 расставлены положительные числа таким образом, что произведение чисел в каждой строке и в каждом столбце равно 1, а произведение чисел в любом квадрате 2×2 равно 2. Какое число стоит в центральной клетке? Найдите все варианты и докажите, что других нет.
Ответ: 16.
Решение: Произведение чисел в любом квадрате 2, а в любых двух строчках или столбцах вместе – 1, значит произведение числа, стоящего в углу, и числа, стоящего в соседней с ним клетке равно 0,5, для любых двух таких клеток. Произведение чисел в первых двух строках равно 1, произведение чисел в первых двух клетках нижней строки 0,5, как было показано, произведение всех чисел в таблице 1. Значит, оставшееся угловое число равно $1:(1\cdot 0{,}5) = 2$. Аналогичные рассуждения верны для всех угловых клеток. Далее, рассмотрим верхнюю строку, в ней два числа равны 2, значит, оставшееся равно 0,25. Аналогичные рассуждения верны и для других “боковых” столбцов и строк. Рассмотрим теперь среднюю строку, в ней два числа равны 0,25, значит оставшееся, среднее число равно 16.
Критерии: только ответ – 1 балл, правильно заполненная таблица без пояснений – 3 балла. Доказано, что в любом углу стоит 2 – 1 дополнительный балл. Доказано, что на любой стороне число 0,25 – 1 дополнительный балл.

7.4. Наташа и Инна купили по одинаковой коробке чая в пакетиках. Известно, что одного пакетика хватает на две или три чашки чая. Наташе коробки хватило только на 41 чашку чая, а Инне – на 58 чашек. Сколько пакетиков было в коробке?
Ответ: 20.
Решение: Пусть в коробке n пакетиков. Тогда число завариваний может колебаться от $2n$ до $3n$. Отсюда 58 не больше $3n$, а значит, $19 < n$. Кроме того, 41 не меньше $2n$, то есть $n < 21$. Так

как число пакетиков должно выражаться натуральным числом, которое меньше 21, но больше 19, то пакетиков в коробке ровно 20 штук.
Критерии: только ответ – 0 баллов, ответ с проверкой – 1 балл. Верная система неравенств без выводов – 2 балла, верная система неравенств и верный ответ – 4 балла. Доказательство одной из оценок числа пакетов в пачке (что их не меньше 20 или не больше 20) – 3 балла вне зависимости от того, дан ли верный ответ. Эти баллы НЕ суммируются.

7.5. На прямой отмечены сто точек: зеленые, синие и красные. Известно, что между двумя любыми красными есть синяя, между двумя любыми синими есть зелёная. Кроме того, красных точек не меньше, чем синих, а синих не меньше чем зелёных. Сколько точек покрашено в синий?
Ответ: 33.
Решение: Пусть красных точек n, тогда синих не меньше $n - 1$ (количество промежутков между «соседними» красными точками), а так как по условию красных точек не меньше, чем синих, то синих либо n, либо $n - 1$. Аналогично, если синих точек m, то зеленых либо m, либо $m - 1$. Итак, возможно 4 случая.

красных	синих	зеленых	всего
n	n	n	$3n$
n	n	$n - 1$	$3n - 1$
n	$n - 1$	$n - 1$	$3n - 2$
n	$n - 1$	$n - 2$	$3n - 3$

В каждом из случаев легко найти общее количество точек (см. таблицу), которое по условию равно 100. Таким образом, получаем 4 уравнения, только одно из которых имеет целое решение $100 = 3n - 2$. Отсюда, число красных точек равно 34, синих – 33, а зеленых – 33.
Критерии: только ответ, ответ с проверкой – 0 баллов. Получена оценка, что синих точек не меньше, чем красных минус 1, а зелёных не меньше, чем синих минус 1 – 3 балла (за обе оценки вместе, а не за каждую).

Решения заданий первого этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2014-15 гг. 9 ноября 2014г

8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Расставьте на футбольном поле четырёх футболистов так, чтобы попарные расстояния между ними были равны 1, 2, 3, 4, 5 и 6 метров?

Решение: расставим футболистов на числовой прямой. Первый стоит в точке 0, второй – в точке 1, третий – в точке 4, последний – в точке 6. Несложно проверить, что этот вариант подходит.

Критерии: за отсутствие проверки баллы не снимать.

8.2. По кольцевой линии в одном направлении курсируют с одинаковой скоростью и равными интервалами 12 трамваев. Сколько трамваев нужно добавить, чтобы при той же скорости интервалы между трамваями уменьшились на одну пятую?

Ответ: 3.

Решение: Примем всё расстояние за 60 условных единиц, значит, сейчас трамваи находятся друг от друга на расстоянии 5 условных единиц. Мы же хотим, чтобы это расстояние стало на 1/5 меньше, то есть стало равно 4 условным единицам. Для этого нужно 60 : 4 = 15 трамваев, что на 3 больше имеющегося количества.

Критерии: только ответ – 0 баллов, ответ с проверкой – 2 балла, за арифметические ошибки снимать не менее 2 баллов.

8.3. Квадрат суммы цифр числа A равен сумме цифр числа A^2. Найдите все такие двузначные числа A и объясните, почему других нет.

Ответ: 10, 20, 11, 30, 21, 12, 31, 22, 13.

Решение: Рассмотрим, чему могут быть равны суммы цифр исходного числа и числа в квадрате. Двузначное число в квадрате даст не более чем четырехзначное число. Сумма цифр четырехзначного числа не более $9\cdot 4 = 36$, при этом 36 достигается только в случае, если число равно 9999. Но число 9999 не является квадратом (делится на 11, но не на 121), а значит, сумма цифр числа в квадрате строго меньше 36. С другой стороны она равна квадрату суммы цифр исходного числа. Квадратов натуральных чисел, меньших 36, пять штук. Для каждого из них рассмотрим сумму цифр исходного числа и все возможные исходные числа, чтобы найти те, которые подходят нам.

сумма цифр A	сумма цифр A^2	A	A^2	сумма цифр A^2	проверка
1	1	10	100	1	подходит
2	4	20	400	4	подходит
	4	11	121	4	подходит
3	9	30	900	9	подходит
	9	21	441	9	подходит
	9	12	144	9	подходит
4	16	40	1600	7	
	16	31	961	16	подходит
	16	22	484	16	подходит
	16	13	169	16	подходит
5	25	50	2500	7	
	25	41	1681	16	
	25	32	1024	7	
	25	23	529	16	
	25	14	196	16	

Критерии: ответ, ответ с проверкой – 3 балла. Доказательство, что сумма цифр исходного числа не превосходит 6 – 2 балла. Эти баллы суммируются! За один пропущенный случай – снимать 1 балл, за большее количество пропущенных случаев снимать не меньше 3 баллов.

8.4. В выпуклом четырехугольнике *ABCD* угол *CBD* равен углу *CAB*, а угол *ACD* равен углу *BDA*. Докажите, что тогда угол *ABC* равен углу *ADC*.

Решение: Обозначим пересечение диагоналей четырехугольника точкой *O*. В треугольниках *BCO* и *ABC* $CBO = \angle BAC$ по условию и $\angle BCO = \angle BCA$ как общий угол. Следовательно, $\angle BOC = \angle ABC$, т.к. сумма углов треугольника 180 градусов. Аналогично рассмотрев треугольники *AOD* и *ACD*, получим $\angle AOD = \angle ADC$. Заметим, что $\angle BOC = \angle AOD$ как вертикальные углы.

Тогда имеем: $\angle ABC = \angle BOC = \angle AOD = \angle ADC$, что и требовалось доказать.

8.5. Каждая цифра натурального числа *N* строго больше стоящей слева от неё цифры. Чему равна сумма цифр числа *9N*?

Ответ: 9.

Решение: Заметим, что $9N = 10N - N$. Выполним это вычитание в столбик. В разряде единиц окажется разность 10 и последней цифры числа *N*, в разряде десятков – последней и предпоследней цифр, уменьшенная на 1. Во всех следующих разрядах будет разность двух соседних цифр, так как всегда будет вычитаться меньшая цифра из большей. Каждая цифра встретится один раз в роли уменьшаемого и один раз в роли вычитаемого. При нахождении суммы цифр все эти уменьшаемые и вычитаемые уничтожатся. Останутся только вышеупомянутые 10 - 1 = 9.

Критерии: только ответ, ответ с проверкой на частных случаях – 0 баллов, схема доказательства на примере – 2 балла, переход $9N = 10N - N$ – 1 балл. Эти баллы НЕ суммируются.

Решения заданий первого этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2014-15 гг. 9 ноября 2014г

9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Одуванчик утром распускается, три дня цветет жёлтым, на четвёртый день утром становится белым, а к вечеру пятого дня облетает. В понедельник днем на поляне было 20 жёлтых и 14 белых одуванчиков, а в среду – 15 жёлтых и 11 белых. Сколько белых одуванчиков будет на поляне в субботу?

Ответ. Шесть одуванчиков.

Решение. Распустившийся одуванчик бывает белым на четвёртый и пятый день. Значит, в субботу будут белыми те одуванчики, которые распустились во вторник или среду. Определим, сколько их. Одуванчики, которые были белыми в понедельник, к среде облетели, а 20 жёлтых заведомо дожили до среды (быть может, став белыми).

В среду на поляне было 15 + 11 = 26 одуванчиков. Мы знаем, что 20 из них были на поляне еще в понедельник, а остальные 26 – 20 = 6 как раз распустились во вторник и среду.

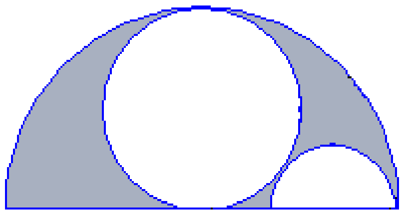
Критерии. Угадан верный ответ с проверкой: 2 балла.

9.2. На классной доске написаны числа 1,2,...,2014 . Разрешается стереть любые два числа, записав вместо одного из них модуль их разность. Доказать, что многократным повторением такой операции нельзя добиться того, чтобы на доске остался один нуль.

Доказательство. Чётности чисел $a+b$ и $a-b$ совпадают, поэтому чётность суммы всех чисел на доске до и после операции сохраняется. Среди исходных чисел 1007 нечётных, поэтому их сумма и последнее оставшееся на доске число должны быть нечётными. Значит, 0 получить так нельзя.

Критерии: 7 баллов – задача полностью решена, 6 – не грубая арифметическая ошибка (например, 2014/2=1009), 2 – рассмотрен частный случай и доведен до конца с каким-нибудь своим алгоритмом (например, отнимем из *n*-го числа *n*-1), 1 – то же, что и 2, только с ошибками.

9.3. Внутри полукруга радиуса 12 расположены круг радиуса 6, и маленький полукруг, касающиеся друг друга попарно, как показано на рисунке. Найти радиус маленького полукруга.



Ответ. 4.

Решение. Обозначим радиус маленького полукруга за x, центр большого полукруга за *A*, круга за *B*, центр маленького полукруга – за *C*. Центры касающихся кругов и полукруга и соответствующие точки касания лежат на одной прямой, поэтому *ABC* – прямоугольный треугольник с катетами $AB=6, AC=12-x, BC=6+x$. По теореме Пифагора имеем $(x+6)^2=6^2+(12-x)^2$, откуда $x=4$.

Критерии. Должно быть чётко объяснено, почему $AB=6, AC=12-x, BC=6+x$, иначе снимаем 2 балла.

9.4. Дан треугольник ABC. На сторонах AB и BC взяты точки D и E соответственно таким образом, что угол ACB в два раза больше угла BED. Докажите, что AC + EC > AD.

Доказательство. Продолжим DE до пересечения с продолжением стороны AC за вершину C в точке P. Угол при вершине E треугольника PCE равен половине его внешнего угла ECA, поэтому PCE равнобедренный и CE=CP, и AC + EC=AP. Сравним углы D и P треугольника DAP: D=180-A-P и P, последнее равносильно сравнению углов 180 и A+2P=A+C<180. Таким образом, против большего угла A в треугольнике DAP лежит большая сторона AP=AC+CE, а против меньшего угла P — меньшая сторона AD, откуда следует, что AC + EC > AD.

Критерии. Идея построения точки P: 1 балл. Равнобедренность треугольника PCE: 1 балл.

Равенство AC + EC=AP: 2 балла. Сравнение углов D и P треугольника DAP: 3 балла.

9.5. а) Разбить все натуральные числа от 1 до 12 включительно на шесть пар, суммы чисел в которых являются шестью различными простыми числами.
б) Можно ли все натуральные числа от 1 до 22 включительно разбить на одиннадцать пар, суммы чисел в которых являются одиннадцатью различными простыми числами?
Ответ. а) например, 1 и 4, 2 и 5, 3 и 8, 6 и 7, 9 и 10, 11 и 12 , б) нельзя.
Решение. Сумма всех чисел от 1 до 22 включительно равна 253. Есть 13 простых чисел, представляющихся суммой двух из чисел от 1 до 22 — это 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, сумма этих чисел равна 279. Если бы требуемое разбиение на пары было возможно, то из них в суммах пар были бы использованы все, кроме двух, дающих в сумме 26. Следовательно, среди сумм пар встречались бы 41 и 43. Но 43 представляется в виде суммы пары единственным образом: 43=21+22, и тогда 41 уже не может быть представлено, как сумма чисел не превосходящих 20.
Критерии. Пункт а): 2 балла, пункт б): 5 баллов.

Решения заданий первого этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2014-15 гг. 9 ноября 2014г

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Найти все трёхзначные натуральные числа A, квадрат которых оканчивается на A.

Ответ. $A = 376, 625$.

Решение. По условию, $A^2 - A = A(A-1)$ делится на $1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Ввиду взаимной простоты A и A-1, одно из них делится на $2^3 = 8$, а другое — на $5^3 = 125$.

Если A делится на 125, то $A \in \{125,250,375,500,625,750,875\}$ и $A-1 \in \{124,249,374,499,624,749,874\}$ – делится на 8, что возможно только при A=625.

Если A-1 делится на 125, то $A \in \{126,251,376,501,626,751,876\}$ делится на 8, что возможно только для A=376. И действительно, $376^2 = 141376$.

Критерии. В утверждении о том, что одно из A и A-1 делится на $2^3 = 8$, а другое – на $5^3 = 125$ нет ссылки на их взаимную простоту: снимаем 3 балла.

10.2. Биссектриса разбивает треугольник на два треугольника, периметры которых равны. Доказать, что исходный треугольник – равнобедренный.

Доказательство. Пусть биссектриса угла BP треугольника ABC разбивает его на два треугольника, периметры которых равны. Обозначим за k отношение стороны AB к BC. В силу свойства биссектрисы отношение отрезков AP и PC тоже равно k, а третья сторона BP у треугольников ABP и CBP общая. Из того что и отношение периметров треугольников равно k сразу следует, что $k = 1$ и AB=BC.

Критерии. Записано свойство биссектрисы: 1 балл.

10.3. Найти все решения в четырёхзначных натуральных числах уравнения $1 + 2013x + 2015y = xy$.

Ответ. $.(3020,6043),(4027,4029),(6041,3022)$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $(x-2013)(y-2015) = 2013 \cdot 2015 + 1$, правая часть раскладывается на простые следующим образом $2014^2 = 2^2 \cdot 19^2 \cdot 53^2$.

Правая часть разлагается в произведение двух натуральных сомножителей 27 различными способами, но только в семи из них оба сомножителя будут четырёхзначными (строчки в таблице без прочерков):

<table>
<tr><td>x-2013</td><td>y-2015</td><td>x</td><td>y</td><td></td><td>x-2013</td><td>y-2015</td><td>x</td><td>y</td><td></td><td>x-2013</td><td>y-2015</td><td>x</td><td>y</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$2^2 \cdot 19^2 \cdot 53^2$</td><td>-</td><td rowspan="6">более чем 4-х значные</td><td></td><td>19^2</td><td>$2^2 \cdot 53^2$</td><td>2374</td><td>-</td><td></td><td>53</td><td>$2^2 \cdot 19^2 \cdot 53$</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>2</td><td>$2 \cdot 19^2 \cdot 53^2$</td><td>-</td><td></td><td>$2 \cdot 19^2$</td><td>$2 \cdot 53^2$</td><td>2735</td><td>7633</td><td></td><td>$2 \cdot 53$</td><td>$2 \cdot 19^2 \cdot 53$</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>2^2</td><td>$19^2 \cdot 53^2$</td><td>-</td><td></td><td>$2^2 \cdot 19^2$</td><td>53^2</td><td>3457</td><td>4824</td><td></td><td>$2^2 \cdot 53$</td><td>$19^2 \cdot 53$</td><td>-</td><td>-</td></tr>
<tr><td>19</td><td>$2^2 \cdot 19 \cdot 53^2$</td><td>-</td><td></td><td>53^2</td><td>$2^2 \cdot 19^2$</td><td>4822</td><td>3459</td><td></td><td>$19 \cdot 53$</td><td>$2^2 \cdot 19 \cdot 53$</td><td>3020</td><td>6043</td></tr>
<tr><td>$2 \cdot 19$</td><td>$2 \cdot 19 \cdot 53^2$</td><td>-</td><td></td><td>$2 \cdot 53^2$</td><td>$2 \cdot 19^2$</td><td>7631</td><td>2737</td><td></td><td>$2 \cdot 19 \cdot 53$</td><td>$2 \cdot 19 \cdot 53$</td><td>4027</td><td>4029</td></tr>
<tr><td>$2^2 \cdot 19$</td><td>$19 \cdot 53^2$</td><td>-</td><td></td><td>$2^2 \cdot 53^2$</td><td>19^2</td><td>-</td><td>2376</td><td></td><td>$2^2 \cdot 19 \cdot 53$</td><td>$19 \cdot 53$</td><td>6041</td><td>3022</td></tr>
</table>

Критерии. Потеря части решений: минус 3 балла.

10.4. Пусть M и N – точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AB и AC, а P – точка пересечения прямой MN с биссектрисой угла B. Доказать, что угол BPC – прямой.

Доказательство. В равнобедренном треугольнике AMN величина угла AMN равна $90 - \dfrac{A}{2}$, величина внешнего угла BMP равна $90-\frac{A}{2}+A=90+\frac{A}{2}$. Величина угла MBP равна $\frac{B}{2}$, следовательно, величина внешнего угла BPM равна $\frac{C}{2}$. Обозначим через I точку пересечения биссектрис треугольника ABC. Рассмотрим два случая.

1) Точка P лежит на отрезке MN. Это будет при $AB\geq BC$. Рассмотрим четырёхугольник NPIC, в нём угол NPI равен углу $BPN=180-\frac{C}{2}$ и составляет в сумме с углом NCI=$\frac{C}{2}$ угол в 180 градусов. Следовательно, четырёхугольник NPIC является вписанным и в нём углы CNI =90 и CPI равны, как вписанные, опирающиеся на общую хорду CI. Следовательно, угол CPI, а с ним и угол BPC — прямые.

2) Точка P лежит на продолжении отрезка MN за вершину N, вне треугольника. Это будет при AB<BC. Тогда в четырёхугольнике CINP углы IPN=BPN=BPM=C/2 и ICN=C/2, поэтому он является вписанным и в нём углы CNI =90 и CPI равны, как вписанные, опирающиеся на общую хорду CI. Следовательно, угол CPI, а с ним и угол BPC — прямые.

Критерии. Правильно подсчитан угол BPN: 2 балла. Не рассмотрен один из случаев, когда точка P лежит вне треугольника, или наоборот: снимаем 2 балла.

10.5. Для произвольного натурального числа n найти все натуральные k, для которых существует последовательность натуральных чисел $x_1<x_2<\ldots<x_n$ такая, что $\frac{1}{x_1}+\frac{2}{x_2}+\ldots+\frac{n}{x_n}=k$.

Ответ. Все натуральные числа от 1 до n.

Решение. Чтобы представить произвольное натуральное m из интервала от 1 до n, достаточно положить $x_i=i$ для всех i от 1 до $m-1$ и $x_i=i(n-m+1)$ для всех i от m до n. Тогда каждое из первых $m-1$ слагаемых суммы равно 1, а каждое их последних $n-m+1$ слагаемых равно $\frac{1}{n-m+1}$, а вся сумма равна m.

Критерии. Любое количество частных ответов с примерами, не образующее всех решений: не выше 1 балла.

Решения заданий первого этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2014-15 гг. 9 ноября 2014г

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Прямая пересекает график функции $y = x^2$ в точках с абсциссами x_1 и x_2, а ось абсцисс – в точке с абсциссой x_3. Докажите, что $\frac{1}{x_3} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$.

Доказательство. Пусть уравнение прямой имеет вид $y=kx+b$, по условию, $k \neq 0$, и x_1, x_2 .- корни квадратного уравнения $x^2 - kx - b = 0$. По теореме Виета $x_1+x_2=k, x_1 \cdot x_2=-b$, тогда $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -\frac{k}{b}$. С другой стороны, прямая $y = kx + b$ пересекает ось абсцисс как раз в точке с абсциссой $-\frac{b}{k} = x_3$.

Критерии. Правильно записана теорема Виета: 1 балл. Найден x_3 : 1 балл.

11.2. Биссектриса разбивает треугольник на два треугольника, радиусы вписанных окружностей которых равны. Доказать, что исходный треугольник - равнобедренный.

Доказательство. Пусть биссектриса угла BP треугольника ABC разбивает его на два треугольника, радиусы вписанных окружностей которых равны. Обозначим за k отношение стороны AB к BC. В силу свойства биссектрисы отношение площадей треугольников ABP и CBP равно отношению отрезков AP и CP и равно k . Из равенства радиусов вписанных в эти треугольники окружностей вытекает, что и отношение периметров треугольников равно k. Так же k равны отношения двух пар из сторон этих треугольников, AB и BC, AP и PC, а третьи их стороны равны. Из того что отношение периметров треугольников равно k следует, что $k = 1$ и AB=BC.

Критерии. Записано свойство биссектрисы: 1 балл. Замечено, что отношение площадей треугольников ABP и CBP равно отношению отрезков AP и CP и равно k : 2 балла. Замечено, что из равенства радиусов вписанных в эти треугольники окружностей вытекает, что и отношение периметров треугольников равно k : 2 балла. Замечено, что из того что из того, что отношение периметров треугольников равно k следует, что $k = 1$ и AB=BC: 2 балла.

11.3. Ответ. $A = 376, 625$.

Решение. По условию, $A^2 - A = A(A-1)$ делится на $1000 = 2^3 \cdot 5^3$. Ввиду взаимной простоты A и A-1, одно из них делится на $2^3 = 8$, а другое — на $5^3 = 125$.

Если A делится на 125, то $A \in \{125,250,375,500,625,750,875\}$ и $A-1 \in \{124,249,374,499,624,749,874\}$ – делится на 8, что возможно только при A=625.

Если A-1 делится на 125, то $A \in \{126,251,376,501,626,751,876\}$ делится на 8, что возможно только для A=376. И действительно, $376^2 = 141376$.

Критерии. В утверждении о том, что одно из A и A-1 делится на $2^3 = 8$, а другое – на $5^3 = 125$ нет ссылки на их взаимную простоту: снимаем 3 балла.

11.4. В полукруге радиуса 18 см на одной из половинок диаметра построен полукруг радиуса 9 см, и вписан круг, касающийся большого полукруга изнутри, маленького полукруга снаружи и второй половинки диаметра. Найти радиус этого круга.

Ответ. 8 см.

Решение. Обозначим через O, O_1, O_2 центры большого полукруга, малого полукруга и вписанного круга соответственно, а через P, Q, R – точки касания вписанного круга с диаметром большого полукруга, с маленьким полукругом и большим полукругом соответственно. Тогда точки O_1, Q, O_2 лежат на одной прямой и точки O, O_2, R лежат на одной прямой. Обозначим радиус вписанного круга за x, из теоремы Пифагора для треугольника OO_2P имеем $OP = \sqrt{(18-x)^2 - x^2} = \sqrt{324-36x}$. Из теоремы Пифагора для треугольника O_1O_2P имеем $O_1P = \sqrt{(9+x)^2 - x^2} = \sqrt{81+18x}$. Отсюда $O_1P = OP + 9 = \sqrt{324-36x} + 9 = \sqrt{81+18x}$, сокращая на 3, получаем $\sqrt{36-4x} + 3 = \sqrt{9+2x}$. Из последнего уравнения $x = 8$.

Критерии. Нет чёткого обоснования вычисления OP и O_1P: снимаем 2 балла. Верно составлено уравнение для x, но не решено: 3 балла.

11.5. Сколькими способами можно заполнить таблицу размера $n \times n$ клеток нулями и единицами так, чтобы в каждой строке и каждом столбце содержалось чётное число единиц? Каждая клетка таблица должна содержать ноль либо единицу.

Ответ. $2^{(n-1)^2}$.

Решение. Докажем, что произвольная расстановка нулей и единиц в клетках левого нижнего углового квадрата размера $(n-1)\times(n-1)$ однозначно дополняется до заполнения всей таблицы нулями и единицами, удовлетворяющей условиям задачи. Рассмотрим любую из нижних $n-1$ строк таблицы. Если в её левых $n-1$ клетках стоит чётное число нулей, то в её оставшуюся правую клетку по условию нужно поставить 0, а если нечётное число нулей — то 1. Это всегда возможно сделать, причём единственным способом. Аналогично однозначно заполняются верхние клетки левых $n-1$ столбцов таблицы. Заметим, что чётность количества дописанных в правом столбце единиц совпадает с общим количеством единиц в клетках левого нижнего углового квадрата размера $(n-1)\times(n-1)$ и совпадает с чётностью количества единиц, дописанных в верхней строке таблицы. Следовательно, для выполнения условия задачи в правую верхнюю клетку таблицы нужно поставить 0, если все эти три числа чётны и единицу в противном случае. Это тоже всегда возможно и делается однозначно.
Из доказанного следует, что искомое число способов равно числу всех способов заполнения таблицы размера $(n-1)\times(n-1)$ клеток нулями и единицами, равного, очевидно, $2^{(n-1)^2}$.

Критерии. Идея о том, что произвольная расстановка нулей и единиц в клетках левого нижнего углового квадрата размера $(n-1)\times(n-1)$ однозначно дополняется до заполнения всей таблицы нулями и единицами, удовлетворяющей условиям задачи: 1 балл. Она же с доказательством: 5 баллов. Правильный подсчёт искомого числа способов расстановки после этого: 2 балла.