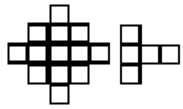
Всесибирская олимпиада школьников 2013-2014 г.г. по математике
Заключительный этап
7 класс



7.1. Расставьте в клетках большой фигуры единицы и двойки так, чтобы сумма чисел в любой маленькой фигуре была бы равна 6.

Ответ: Если поставить 2 в центр, остальные клетки заполнить единицами, то условие будет выполнено.

Критерии: Достаточного одного верного примера. Возможны другие решения

7.2. В 2014 году Ване исполнилось столько лет, какова сумма цифр года его рождения плюс три. В каком году родился Ваня?

Ответ: В 1991.

Решение. Сумма цифр года рождения Вани не может превосходить 1+9+9+9=28, поэтому его возраст в 2014 году не может превосходить 28+3=31 года. Значит, он родился не раньше 1983=2014-31 года. Несложный перебор показывает, что условию задачи удовлетворяет только 1991 год.

Критерии. Только ответ с проверкой: 2 балла.

7.3. Мальчик и девочка шли навстречу друг другу. Когда мальчик прошёл половину пути, то до встречи оставался час. Когда девочка прошла половину пути, то после встречи прошло два часа. Сколько занял весь путь у мальчика?

Ответ: 6 часов.

Решение: Участок пути от места встречи до середины пути мальчик проходит за час, а девочка за два часа, значит, скорость мальчика в два раза больше. Если до встречи они шли x часов, то после встречи мальчик ещё пройдет $0{,}5x$ часов. Весь путь он пройдет за $1{,}5x$, а половину – за $0{,}75x$. Таким образом, участок от середины пути до места встречи мальчик проходит за $0{,}25x$, что равно 1 часу. Отсюда $x = 4$ часа, а полное время $1{,}5x = 6$ часов.

Критерии: Только ответ; ответ с проверкой; ответ, полученный подбором – 1 балл. Замечание, что скорость мальчика больше скорости девочки в два раза, не оценивается.

Комментарий. Бедные дети: читатель, вдумайся, ведь путь девочки занял 12 часов! Можно подумать, что автор задачи хотел наказать своих героев за что-то страшное, вроде измены Родине… Всё вообще могло происходить в зимнее время года, создавая прямую угрозу их безгрешным юным жизням – бескрайние заснеженные родные просторы, градусов двадцать мороза, солнце давно село, вдали волки воют, а МЧС на боевом посту бдит... Жесть!

7.4. Пусть p и q - последовательные различные простые числа, большие 2. Докажите, что $p+q$ является произведением трёх (возможно, не всех различных) натуральных чисел, больших 1.

Доказательство. Числа p и q оба нечётные, поэтому $p+q$ делится на 2. Кроме того, число $\frac{p+q}{2}$ лежит между соседними простыми p и q и не может само быть простым, поэтому разлагается в произведение некоторых чисел a и b, больших 1. Тогда $p+q = 2\cdot\frac{p+q}{2} = 2\cdot a\cdot b$ - искомое разложение.

Критерии: Разложение $p+q = 2\cdot\frac{p+q}{2}$ оцениваем в 2 балла.

7.5. Дан квадрат размера 5 на 5, разбитый вертикальными и горизонтальными линиями сетки на 25 единичных квадратиков. *Прямоугольным контуром* называется граница любого прямоугольника, составленного из единичных квадратиков. Какое максимальное количество прямоугольных контуров можно провести в квадрате так, чтобы никакие два из них не содержали общего отрезка? Иметь общие точки контуры могут, некоторые из них могут содержать внутри себя частично или целиком другие контуры.

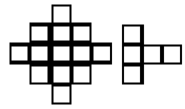
Ответ. 13.

Решение. Из условия следует, что каждый из 16 внутренних узлов получившейся прямоугольной сетки может лежать не более, чем в двух разных контурах, а каждый из 20 граничных узлов — не более чем в одном. Кроме того, каждый контур содержит не менее четырёх разных узлов сетки. Таким образом, контуров не может быть больше, чем $\frac{2\cdot 16+20}{4}=13$. Пример с 13 контурами получается шахматной раскраской полученной доски 5 на 5 и обведением контуров клеток того цвета, которого больше.

Критерии. Только пример с 13 контурами: 2 балла. Любая неверная оценка: 0 баллов.

8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов



8.1. Расставьте в клетках большой фигуры единицы и двойки так, чтобы сумма чисел в любой маленькой фигуре была бы равна 6.
Ответ: Если поставить 2 в центр, остальные клетки заполнить единицами, то условие будет выполнено.
Критерии: Достаточного одного верного примера. Возможны другие решения.

8.2. Кристина загадала трёхзначное число $A = \overline{abc}$, $a \geq b \geq c$. Оказалось, что из кубов его цифр также можно составить трёхзначное число $B = \overline{xyz}$, $x = a^3$, $y = b^3$, $z = c^3$. Кристина сообщила Антону разность этих чисел, после чего Антон смог узнать число A. Найдите это число.
Ответ: 222.
Решение: Так как из кубов можно составить новое число, то кубы не превосходят 9, а значит, цифры исходного числа не превосходят 2. Если A не содержало 2 в своей записи, то оно совпадает с B, а разность этих чисел равна 0, и знания разности недостаточно для восстановления исходного числа. Значит, 2 есть в записи, а так как $a \geq b \geq c$, то она стоит на первом месте. Осталось рассмотреть 6 вариантов, для этого составим таблицу:

$\overline{abc}$	$\overline{xyz}$	разность
222	888	666
221	881	660
220	880	660
211	811	600
210	810	600
200	800	600

Разности 600 и 660 соответствует нескольким исходным числам, а разность 666, только одному. Значит, исходное число было 222.
Критерий: Возможны решения, в которых показано, что, если A содержит в своей записи 0 или 1, то существует другое число A', которому соответствует та же разность, и числа A и A' не удастся различить. В этом случае необходимо доказать, что число 222 восстанавливается однозначно. Если этот факт не доказан, то за задачу ставится не больше 3 баллов.
Только ответ – 1 балл; замечание, что в записи числа могут быть использованы только цифры не больше 2 – 1 балл. Эти баллы суммируются. Если при переборе упущен один случай, не влияющий на решение – снять 1 балл; если упущено больше случаев или нерассмотренный случай влияет на ответ – ставить не больше 3 баллов.

8.3. Мальчик и девочка шли навстречу друг другу. Когда мальчик прошёл половину пути, то до встречи оставался час. Когда девочка прошла половину пути, то после встречи прошло два часа. Сколько занял весь путь у мальчика?
Ответ: 6 часов.
Решение: Участок пути от места встречи до середины пути мальчик проходит за час, а девочка за два часа, значит, скорость мальчика в два раза больше. Если до встречи они шли x часов, то после встречи мальчик ещё пройдет $0{,}5x$ часов. Весь путь он пройдет за $1{,}5x$, а половину – за $0{,}75x$. Таким образом, участок от середины пути до места встречи мальчик проходит за $0{,}25x$, что равно 1 часу. Отсюда $x = 4$ часа, а полное время $1{,}5x = 6$ часов.
Критерии: Только ответ; ответ с проверкой; ответ, полученный подбором – 1 балл. Замечание, что скорость мальчика больше скорости девочки в два раза, не оценивается.

8.4. Два равных отрезка *AB* и *CD* перпендикулярны, причем точка *C* лежит внутри отрезка *AB*. Точка *X* такова, что треугольники *XAD* и *XBC* – равнобедренные с вершиной в *X*. Докажите, что эти треугольники – прямоугольные.

Решение: Рассмотрим треугольники ABX и DCX, они равны по трем сторонам ($AB = CD$ по условию, $BX = CX$, $XD = XA$, как стороны равнобедренных треугольников). Значит, равны углы $\angle BAX$ и $\angle CDX$, тогда:

$$\angle XAD + \angle XDA = \angle XAD + \angle ADC + \angle CDX =$$

$$= \angle XAD + \angle ADC + \angle BAX = \angle ADC + \angle BAD = 90°$$

(последнее равенство верно, так как $\angle ADC$ и $\angle BAD$ – острые углы в прямоугольном треугольнике ACD). Таким образом, угол $\angle AXD = 180° - (\angle XAD + \angle XDA) = 90°$.

Кроме этого, из равенства треугольников ABX и DCX получаем равенство углов $\angle AXB$ и $\angle CXD$. Но тогда:

$\angle BXC = \angle BXA - \angle CXA = \angle CXD - \angle CXA = \angle AXD = 90°$,что и требовалось доказать.

Критерий: Равенство треугольников ABX и DCX – 2 балла; доказательство, что угол при вершине одного из равнобедренных треугольников прямой – 4 балла; доказательство того, что $\angle BXC = \angle AXD$ – 3 балла. Эти баллы не суммируются! Возможны другие решения, например, легко заметить, что треугольники ABX и DCX получаются один из другого поворотом на 90 градусов, откуда сразу следует утверждение задачи.

8.5. В строку выписано 11 целых чисел. Для любой группы подряд идущих чисел подсчитывается ее сумма (группы из одного числа тоже учитываются). Какое наибольшее количество сумм может оказаться нечетными?

Ответ: 36.

Решение: Оценка. Пусть строка имеет вид $a_1 a_2 \dots a_{11}$. Обозначим через $S_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n$. Считаем, что $S_0 = 0$. Тогда сумма любых идущих подряд чисел есть разность $S_n - S_m$ при некоторых $n > m$. Пусть среди сумм S_n ровно $(k+1)$ четных (включая S_0) и $(11-k)$ нечетных. Тогда максимальное число нечетных сумм не превышает $(11-k)(k+1)$, т.к. они находятся, как разность некоторой четной суммы S_n и нечетной суммы S_m. Функция $(11-k)(k+1)$ задает параболу, ветви которой направлены вниз, а значит, максимум достигается в вершине параболы. Так как $(11-k)(k+1) = -k^2 + 10k + 11$, то функция достигает своего максимума при $k = 5$, и он равен 36. Следовательно, максимальное число нечетных сумм не превышает 36.**Пример.** Если выписаны числа: 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, то нечетных сумм 36. Действительно, начало каждой группы с нечетной суммой должно быть в одном из 6 промежутков до 1, а конец – в одном из шести промежутков после: всего 36 вариантов.

Критерии: Только ответ – 0 баллов; ответ с примером – 2 балла (даже если пример предоставлен без проверки того, что ему соответствует 36 нечетных сумм); только оценка – 5 баллов.

9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

9.1. Найти все решения в целых числах уравнения: $2^x(4-x)=2x+4$.
Ответ: 0,1,2.
Решение: Заметим, что при $x>4$ левая часть уравнения отрицательна, а правая положительна, а при $x<-2$ - наоборот. Следовательно, равенство возможно только при $x\in\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$. Далее перебор.
Критерии: Только полный ответ – 1 балл.

9.2. Две прямые, проходящие через две различные вершины треугольника разбивают его на три треугольника и четырёхугольник. Могут ли площади всех треугольников совпадать?
Ответ. Нет, не могут.
Решение. Пусть на сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки E и D соответственно такие, что отрезки AD и CE делят треугольник указанным в условии способом. Обозначим точку пересечения AD и CE за P. Из равенства площадей треугольников APE и APC следует равенство отрезков PE и PC. Аналогично, из равенства площадей треугольников APC и CPD следует равенство отрезков AP и PD. Таким образом, в четырёхугольнике AEDC диагонали делятся точкой пересечения пополам, следовательно, он является параллелограммом. Значит, стороны AB и BC треугольника ABC параллельны, чего не может быть.

9.3. Пусть p и q - последовательные различные простые числа, большие 2. Докажите, что $p+q$ является произведением трёх (возможно, не всех различных) натуральных чисел, больших 1.
Доказательство. Числа p и q оба нечётные, поэтому $p+q$ делится на 2. Кроме того, число $\frac{p+q}{2}$ лежит между соседними простыми p и q и не может само быть простым, поэтому разлагается в произведение некоторых чисел a и b, больших 1. Тогда $p+q=2\cdot\frac{p+q}{2}=2\cdot a\cdot b$ - искомое разложение.
Критерии: Разложение $p+q=2\cdot\frac{p+q}{2}$ оцениваем в 1 балл.

9.4. По кругу выписаны 11 целых чисел. Для любой группы подряд идущих чисел подсчитывается ее сумма (группы из одного числа тоже учитываются). Какое наибольшее количество сумм может оказаться нечетными?
Ответ. 60.
Решение. Для каждой группы идущих подряд чисел есть дополнительная к ней, состоящая изо всех остальных чисел. Дополнительной к группе изо всех чисел будет пустое множество чисел. Если сумма всех выписанных чисел нечётна, то из каждой пары, состоящей из группы подряд идущих чисел и дополнительной ей группы ровно одна имеет нечётную сумму,. Всего всевозможных групп, включая пустую и все числа, будет 11·10+2=112, из них нечётных в этой ситуации 56.
Если сумма всех выписанных чисел чётна, то в каждой паре, состоящей из группы подряд идущих чисел и дополнительной ей группы либо обе суммы чётны, либо обе суммы нечётны.

Назовём одно из выписанных чисел *первым*. Оставив из каждой пары групп ту единственную, которая не содержит первое число, мы получим задачу, аналогичную 8.5, но для 10 чисел, поскольку в суммы не входит первое число. Ответом в таком случае является 30. Следовательно, в данной задаче ответом будет 60. Примером будут расставленные по кругу числа: 0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,1.

Критерии. Верный подсчёт общего количества групп: 2 балла Рассмотрение только случая нечётной общей суммы: 1 балл. Идея с дополнительной группой: 1 балл. Сведение случая с чётной общей суммой к задаче 8.5 для 10 чисел: 3 балла.

9.5. Длины всех сторон не обязательно выпуклого пятиугольника *ABCDE* равны a , величина угла между некоторой парой диагоналей с общей вершиной равна 30°. Доказать, что длина какой-то диагонали пятиугольника тоже равна a .

Доказательство. Считаем, что величина угла ACE равна 30°. Построим на стороне *AE* правильный треугольник *AOE* с той же стороны, что и пятиугольник *ABCDE* Величина угла *ACE* вдвое меньше, чем угла *AOE*, поэтому *C* лежит на окружности с центром *O* радиуса *a*. Следовательно, длина *OC* тоже равна *a,* и треугольники ABC и AOC – равные равнобедренные с общим основанием. Аналогично, треугольники CDE и COE .

Если O совпадает с B или D, то величина угла BAE или DEA равна 60°, тогда треугольник BAE или DEA равносторонний, значит длина диагонали BE или DA равна *a.*

Далее точка O отлична от B и D, поэтому точки B и O лежат по разные стороны от AC и точки D и O лежат по разные стороны от EC Пусть сначала O лежит внутри треугольника ACE, тогда, поскольку равны углы ACB и ACO, а также ECD и ECO, угол BCD равен сумме углов OCB и OCD, что вдвое больше угла ACE, равного сумме OCA и OCE, и равен 60 градусов. Тогда треугольник BCD правильный, следовательно, длина диагонали BD равна *a*.

Если O лежит вне треугольника ACE, то B – с другой стороны от AC или D с другой стороны от CE, поэтому пятиугольник ABCDE будет невыпуклым. В данной случае угол BCD равен разности углов OCB и OCD (или наоборот), что вдвое больше угла ACE, равного разности OCA и OCE (или наоборот), и равен 60 градусов. Тогда треугольник BCD снова правильный, следовательно, длина диагонали BD равна *a*.

Критерии. За отсутствие рассмотрения невыпуклого случая снимаем 2 балла. За отсутствие рассмотрения возможности совпадения точек O и B или D: снимаем 2 балла.

10 класс *Каждая задача оценивается в 7 баллов.*

10.1. Найти все решения в целых числах уравнения: $2^x(4-x)=2x+4$.

Ответ: 0,1,2.

Решение: Заметим, что при $x>4$ левая часть уравнения отрицательна, а правая положительна, а при $x<-2$ - наоборот. Следовательно, равенство возможно только при $x\in\{-2,-1,0,1,2,3,4\}$. Далее перебор.

Критерии: Только полный ответ – 1 балл.

10.2. Можно ли найти такой выпуклый и невыпуклый четырёхугольники на плоскости, длины сторон которых в некотором порядке и длины диагоналей которых в некотором порядке совпадают?

Ответ. Можно. Примером такого выпуклого четырёхугольника является четырёхугольник с вершинами, заданными координатами A(6,0), B(0,-1),C(-2,0),D(0,4). Парный ему невыпуклый четырёхугольник получается, если заменить вершину B на симметричную ей относительно середины M(2,0) диагонали AC точку B'(4,1). При этом длины сторон и диагонали AC, очевидно, не изменятся, а длина B'D равна $\sqrt{4^2+3^2}=5$, как и длина BD. Также необходимо заметить, что тангенс угла B'AC меньше тангенса угла DAC, поэтому точка B' находится внутри треугольника ACD, следовательно, четырёхугольник AB'CD не самопересекающийся.

Критерии. Все попытки доказать противное: 0 баллов. Пример без чёткого обоснования: 2 балла. В обосновании должны быть аккуратно доказаны равенства длин всех соответствующих сторон и диагоналей четырёхугольников. Если это сделано неаккуратно: снижение от 1 до 3 баллов. Должно быть показано, что невыпуклый четырёхугольник не является самопересекающимся. Если этого не сделано – снижение на 2 балла.

10.3. Во вписанном четырёхугольнике *ABCD* равны длины *AB* и *AC*, а также длины *BC* и *CD.* Пусть точка *P* — середина дуги *CD* описанной окружности*,* не содержащей *A*, а *Q* –точка пересечения диагоналей *AC* и *BD*. Доказать, что прямые *PQ* и *AB* перпендикулярны.

Доказательство. Обозначим величины углов *BAC* и *DAC* за α, а угла *ABD*-за β. Тогда углы *DBC* и *CDB* также равны α, а угол *ACD* равен β, как вписанные, опирающиеся на те же дуги. В силу равнобедренности треугольника *ABC* получим 180-2α-β= α+β, откуда 3α+2β=180. Внешний угол *AQD* треугольника *CQD* равен α+β, а угол *ADB* равен 180-2α-β. Ввиду равенства 3α+2β=180 эти углы равны и треугольник *AQD* – равнобедренный. Тогда равнобедренный и подобный ему треугольник *BQC*. Точка *P* – середина дуги *CD,* значит, *AP* – биссектриса угла *QAD*, а *BP* – биссектриса угла *QBC*. В равнобедренном треугольнике биссектриса к основанию является высотой, поэтому в треугольнике *APB* прямые *AQ* и *BQ* являются перпендикулярами из вершин *A* и *B* соответственно к сторонам *BP* и *AP*. Значит, *Q* – точка пересечения высот треугольника *ABP*, поэтому *PQ* – третья высота этого треугольника и перпендикулярна *AB*.

Критерии. Доказана равнобедренность треугольников *AQD* и *BQC*: 2 балла. Доказана перпендикулярность *AQ* и *BQ* сторонам *BP* и *AP*: 2 балла.

10.4. Найти все функции, определённые на множестве всех действительных чисел, принимающие значения в нём же, и удовлетворяющие соотношению: $f\left((x-y)^2\right)=f(x)^2-2xf(y)+y^2$ для всех x и y.

Ответ. $f(x)=x$ или $f(x)=x+1$.

Решение. 1)Сначала подставим в уравнение $x=y=0$, получим $f(0)=f(0)^2$, откуда $f(0)=0$ или $f(0)=1$.

2) Затем подставим $x=y$, получим $f(0)=f(x)^2-2xf(x)+x^2$, откуда $(f(x)-x)^2=f(0), f(x)=x\pm f(0)$ При $f(0)=0$ имеем $f(x)=x$, при $f(0)=1$, будет $f(x)=x\pm 1$ для всех x..

3) Подставим $x=0$, получим $f(y^2)=1+y^2$, откуда $f(t)=1+t$ при всех неотрицательных t.

4) Подставим $y=0$, тогда $f(x^2)=x^2+1=f(x)^2-2x$, откуда $f(x)^2=(x+1)^2$ для всех x. С учётом пункта 2) получаем $f(x)=x+1$ для всех x.

Найденные варианты, как показывает проверка, являются решениями уравнения.

Критерии. Найдено $f(0)=0$ или $f(0)=1$: 1 балл. Найдены $f(x)=x$ и $f(x)=x+1$, но не проверены подстановкой в уравнение: 5 баллов. Найдены лишние решения: снимаем 2 балла. Угадано одно из решений $f(x$ и проверено: 1 балл. Угаданы оба решения и проверены: 2 балла.

10.5. Доказать, что из 11 различных двузначных чисел всегда можно выбрать два не пересекающихся подмножества, средние арифметические чисел в каждом из которых равны.

Доказательство. Рассмотрим все подмножества данного множества из пяти чисел, их будет $C_{11}^5=\frac{11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=462$, суммы чисел в них заключаются в пределах от $10+11+12+13+14=60$ до $95+96+97+98+99=485$. Всего эти суммы могут принимать не более $485-60+1=426$ различных значений, поэтому найдутся два разных пятиэлементных подмножества с одинаковыми суммами чисел. Удалив из них, если нужно, совпадающие числа, получим два подмножества, содержащие одинаковое количество чисел, суммы чисел в которых совпадают. Очевидно, что и средние арифметические чисел в этих подмножествах совпадают.

Критерии. Доказано только, что есть два не пересекающихся подмножества с равными суммами и разным числом элементов: 3 балла.

11 класс *Каждая задача оценивается в 7 баллов.*

11.1. Длины сторон вписанного четырехугольника в порядке следования по часовой стрелке равны, соответственно, $6, 3, 5, 4$. Найти угол между сторонами длины 6 и 3.

Ответ. $\arccos\frac{1}{19}$.

Решение. Обозначим вершины четырёхугольника через *ABCD*, причём *AB=6,* а дальше по порядку. Найдём длину диагонали *AC* по теореме косинусов в треугольниках *ABC* и *ADC,* учитывая, что величина угла *D* равна 180 градусов минус величина угла *B*. Получим $6^2 + 3^2 - 36CosB = 5^2 + 4^2 + 40CosB$, откуда $CosB = \frac{4}{76} = \frac{1}{19}$.

11.2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ - приведённые квадратные трёхчлены. График $g(x)$ повернули на 90° по часовой стрелке и сдвинули параллельно так, что он стал пересекать график $f(x)$ в некоторых четырёх различных точках. Доказать, что эти точки лежат на одной окружности.

Доказательство. График $f(x)$ задается уравнением $y = x^2 + ax + b$, а графика $g(x)$ после поворота - уравнением $x = y^2 + py + q$. Координаты точек, являющихся их пересечением, удовлетворяют обоим уравнениям, а, значит, и их сумме $x + y = x^2 + ax + b + y^2 + py + q$. Последнее можно переписать в виде $(x + \frac{a-1}{2})^2 + (y + \frac{p-1}{2})^2 = \frac{(a-1)^2}{4} + \frac{(p-1)^2}{4} - b - q$, что, очевидно, является уравнением окружности с центром $O(\frac{1-a}{2}, \frac{1-p}{2})$ и радиусом, равным корню квадратному из правой части. Её положительность обеспечивается наличием решений – точек пересечения.

Комментарий. Проведя оси системы координат через вершины парабол можно считать, что коэффициенты *a* и *p* равны 0.

Критерии. Правильное выписывание уравнений: 1 балл. Идея их сложения: 2 балла. Переписывание этой суммы в виде уравнения окружности: 3 балла. Указание её центра и радиуса: 1 балл.

11.3. Восемь теннисистов проводят турнир по олимпийской системе: они разбиты на 4 четвертьфинальных пары, победители в которых образуют две полуфинальных пары, победители которых играют финальную игру. Силы всех теннисистов равны, каждый из них побеждает в игре с любым другим с вероятностью ½, расписание игр составлено случайным образом. Проигравший очередную игру больше в турнире не участвует. Какова вероятность того, что Вася и Петя, участвующие в турнире, встретятся между собой?

Ответ. $\frac{1}{4}$.

Решение. Вася и Петя могут встретиться в четвертьфинале, полуфинале и финале. Чтобы встретиться в четвертьфинале, Пете нужно оказаться в той же четвертьфинальной паре, что и Вася, вероятность чего равна $\frac{1}{7}$. Чтобы встретиться в полуфинале, Пете нужно оказаться в той же группе выхода в финал, что и Вася, но не в той же паре, вероятность чего равна $\frac{2}{7}$, и оба должны выиграть четвертьфинальные игры, вероятность чего равна $\frac{1}{4}$, итого $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{7}=\frac{1}{14}$. Наконец, чтобы встретиться в финале, им обоим нужно выиграть четверть- и полуфинальные игры, и Петя должен быть в другой подгруппе выхода в финал, чем Вася, вероятность чего равна $\frac{1}{16}\cdot\frac{4}{7}=\frac{1}{28}$. В конечном итоге, вероятность того, что они встретятся в турнире, равна $\frac{1}{7}+\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=\frac{1}{4}$.

Критерии. При построении неверных моделей дальнейшие расчёты оцениваются в 0 баллов.

11.4. Найти все тройки натуральных чисел такие, что произведение любых двух из них при делении на третье даёт остаток 1.

Ответ. 2,3,5.

Решение. Обозначим искомые числа через a,b,c. По условию $ab-1$ делится на c, $ac-1$ делится на b, $bc-1$ делится на a, следовательно, $(ab-1)(bc-1)(ac-1)$ делится на abc и a,b,c взаимно просты. После раскрытия скобок и удаления слагаемых, очевидно делящихся на abc, получаем $ab+bc+ac-1$ делится на abc. В частности, это значит, что $ab+bc+ac>abc$. Разделив последнее неравенство на правую часть, получим $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>1$. Считая $a\le b\le c$, из взаимной простоты имеем $a<b<c$, тогда из оценки величины левой части получим $a=2, b=3, c=5$.

Критерии. Только ответ с проверкой: 1 балл. Доказательство взаимной простоты этих чисел: 1 балл. Замечание, что $ab+bc+ac-1$ делится на abc: 2 балла. Получение неравенства $ab+bc+ac>abc$: 2 балла.

11.5. Дан квадрат размера n на n, разбитый вертикальными и горизонтальными линиями сетки на n^2 единичных квадратиков. *Контуром* называется любая замкнутая ломаная без самопересечений, идущая по линиям сетки. Какое максимальное количество контуров можно провести в квадрате так, чтобы никакие два из них не содержали общего отрезка? Контуры могут иметь общие точки, некоторые из них могут содержать внутри себя частично или целиком другие контуры. **Ответ.** Целая часть числа $\frac{n^2+1}{2}$, равная самому $\frac{n^2+1}{2}$ при нечётном n, и $\frac{n^2}{2}$ - при чётном n. **Решение.** Из условия следует, что каждый из $(n-1)^2$ внутренних узлов получившейся прямоугольной сетки может лежать не более, чем в двух разных контурах, а каждый из 4n граничных узлов — не более чем в одном. Кроме того, каждый контур содержит не менее четырёх разных узлов сетки. Таким образом, контуров не может быть больше, чем

$\frac{2\cdot(n-1)^2+4n}{4}=\frac{n^2+1}{2}$. При нечётном n эта оценка точна, при чётном n. нужно взять её целую часть, равную $\frac{n^2}{2}$. Пример с соответствующим числом контуров получается шахматной раскраской полученной доски n на n и обведением контуров клеток того цвета, которого больше.**Критерии.** Только пример с правильным числом контуров: 1 балл. Любая неверная оценка: 0 баллов. Рассмотрение только случая какой-то одной чётности — снимаем 1 балл.