.

**Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2013-14 гг.**

**Второй этап** **11 класс**

*Каждая задача оценивается в 7 баллов.*

**11.1.** Пусть $f(x)=ax^2-x+c$ - квадратный трёхчлен такой, что уравнение $f(f(x))=x$ не имеет решений. Доказать, что тогда $ac>1$ .

**11.2.** Найти количество различных способов расстановки натуральных чисел от 1 до 9 по одному в каждой клетке таблицы 3 на 3 таких, что суммы чисел в каждой строке и каждом столбце нечётны. Таблица не крутится и не переворачивается.

**11.3.** Решить в целых числах систему уравнений: $x+y+z=1, x^3+y^3+z^2=1$ . (Внимание: во втором уравнении степень переменной z именно вторая!)

**11.4.** В треугольнике $ABC$ точка $K$ — середина стороны $BC$, а точка $L$ – середина медианы $AK$. Известно, что центр описанной окружности треугольника $KCL$ лежит на стороне $AC$ и окружность пересекает эту сторону в точке $M$ такой, что $AC:AM=3:1$. Найти отношение $AB:BC:AC$.

**11.5.** В министерстве некоторые из 43 сотрудников объединены в **квартеты** - преступные сообщества из четырёх человек, по предварительному сговору занимающиеся махинациями с подведомственными активами и взятками. Любые два различных квартета пересекаются не более, чем по одному общему сотруднику. Доказать, что министр, зная составы квартетов, всегда может составить из сотрудников министерства комиссию по борьбе с коррупцией в количестве 13 человек, не содержащую ни одного квартета целиком.

**Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2013-14 гг.**

**Второй этап** **10 класс**

*Каждая задача оценивается в 7 баллов.*

**10.1.** Можно ли расставить все натуральные чисел от 1 до 9 по одному в каждой клетке таблицы 3 на 3 так, что все суммы чисел в любых двух клетках, имеющих общую сторону, будут различными числами?

**10.2.** Решить в целых числах уравнение**:** $2y^2+xy=x+y+5$ **.**

**10.3.** В четырёхугольнике ABCD длины сторон AB и BC равны 1 см, а величины углов ABC и ADC равны $106°$ и $127°$ соответственно. Найти длину диагонали BD.

**10.4.** Пусть $x,y,z$ - произвольные неотрицательные числа такие, что $xy+yz+xz \geq 1$ . Найти минимальное значение суммы $x+y+z$ .

**10.5.** В министерстве некоторые из 46 руководящих сотрудников объединены в **триады** - преступные сообщества из трёх человек, по предварительному сговору занимающиесямахинациями с подведомственными активами и взятками. Любые две различные триады пересекаются не более, чем по одному общему сотруднику. Доказать, что министр, зная составы триад, всегда может составить из сотрудников министерства комиссию по борьбе с коррупцией в количестве 10 человек, не содержащую ни одну триаду целиком

**Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2013-14 гг.**

**Второй этап** **9 класс**

*Каждая задача оценивается в 7 баллов.*

**9.1.** Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 9 по одному в каждой клетке таблицы 3 на 3 так, что все суммы чисел в любых двух клетках, имеющих общую сторону, будут составными числами? Составные числа — это те, которые делятся не только на 1 и на самого себя.

**9.2.** В ёмкости смешали $a$ килограммов шестипроцентного раствора соли и $b$ килограммов двадцатипроцентного раствора соли. Полученный раствор обладает следующим свойством: при смешивании его с одним килограммом шестипроцентного раствора получается десятипроцентный раствор, а при смешивании с одним килограммом двадцатипроцентного раствора получается восемнадцатипроцентный раствор. Найти $a$ и $b$.

**9.3.** Можно ли из 12 квадратов и 19 равносторонних треугольников с единичными сторонами сложить выпуклый многоугольник? Должны быть использованы все квадраты и треугольники.

**9.4.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ величины углов при основании равны $40°$, а отрезок $AD$ — биссектриса угла $BAC$. Доказать, что $AC = AD + BD$.

**9.5.** Пусть $x,y,z$ - произвольные натуральные числа такие, что $x+y+z=100$. Найти максимальное значение выражения. $xy+yz+xz$.

**Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2013-14 гг.**

**Второй этап** **8 класс**

*Каждая задача оценивается в 7 баллов.*

**8.1.** В неверном равенстве $2\times3\times2+3\times4\times3=3\times2\times3+4\times3\times2$ расставьте скобки так, чтобы оно стало верным.

**8.2.** Мальчик врёт по воскресениям и говорит правду по вторникам и средам. Шесть дней подряд его просили назвать своё имя, ответы были такими: Максим, Игорь, Максим, Игорь, Олег, Игорь. Как зовут мальчика?

**8.3.** Гриша и Глеб лезут на две одинаковые ёлки. Вверх Глеб лезет в три раза медленнее, чем Гриша, а вниз Глеб лезет в два раза быстрее, чем Гриша. Начали и закончили они одновременно. Во сколько раз быстрее Гриша лезет вверх, чем вниз?

**8.4.** Дан равнобедренный треугольник $ABC$ с основанием $AC$. Из середины $D$ основания на сторону $BC$ опущен перпендикуляр $DH$. Отрезки $AH$ и $BD$ пересекаются в точке $E$. Какой из отрезков $BH$ и $BE$ длиннее?

**8.5.** На доске написано число 1234. Каждую секунду Маша находит сумму цифр числа, записанного на доске, и приписывает последнюю цифру этой суммы к числу справа, а самую левую цифру исходного числа стирает. Таким образом, сначала на доске было число 1234, затем 2340, 3409, 4096, 0969, 9694 и т.д. Появится ли на доске когда-нибудь число 2013?

**Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2013-14 гг.**

**Второй этап** **7 класс**

*Каждая задача оценивается в 7 баллов.*

**7.1.** Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 9 по одному в каждой клетке таблицы 3 на 3 так, что все суммы чисел в любых двух клетках, имеющих общую сторону, будут различными числами?

**7.2.** Мальчик врёт по воскресениям и говорит правду по вторникам и средам. Шесть дней подряд его просили назвать своё имя, ответы были такими: Максим, Игорь, Максим, Игорь, Олег, Игорь. Как зовут мальчика?

**7.3.** Гриша и Глеб лезут на две одинаковые ёлки. Вверх Глеб лезет в три раза медленнее, чем Гриша, а вниз Глеб лезет в два раза быстрее, чем Гриша. Начали и закончили они одновременно. Во сколько раз быстрее Гриша лезет вверх, чем вниз?

**7.4.** Можно ли из 12 квадратов и 19 равносторонних треугольников с единичными сторонами сложить выпуклый многоугольник? Должны быть использованы все квадраты и треугольники.

**7.5.** На доске написано число 1234. Каждую секунду Маша находит сумму цифр числа, записанного на доске, и приписывает последнюю цифру этой суммы к числу справа, а самую левую цифру исходного числа стирает. Таким образом, сначала на доске было число 1234, затем 2340, 3409, 4096, 0969, 9694 и т.д. Появится ли на доске когда-нибудь число 2013?