

11 класс

Время написания – 4 астрономических часа. Каждая задача оценивается в 7 баллов.

11.1. Шестизначное натуральное число начинается на единицу, а при перестановке этой единицы в конец увеличивается ровно в три раза. Найти это число.

11.2. Две одинаковые пересекающиеся окружности с центрами A и B расположены так, что центр каждой лежит вне другой. Обозначим их точки пересечения за P и Q , вторую точку пересечения луча AP со второй окружностью за L , а точку пересечения луча AB со второй окружностью за M , при этом B лежит между A и M . Доказать, что угол LBM втрое больше угла LAM .

11.3. На стороне AB квадрата $ABCD$ выбрана точка P так, что $AP:PB=1:2$. Через P и центр квадрата проведена прямая m . Доказать, что для любой точки K , расположенной внутри квадрата на прямой m , расстояния от K до сторон AB , AD , BC и CD , взятые в указанном порядке, образуют арифметическую прогрессию.

11.4. Дан квадратный трёхчлен $f(x)=2x^2-ax+7$. При каких значениях параметра a найдётся такое число φ из промежутка $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, что выполняется равенство $f(\sin \varphi)=f(\cos \varphi)$?

11.5. Числа от 1 до 600 выписаны в строчку в некотором порядке. Сумма любых двух соседних не превосходит 800. Докажите, что сумма каких-то двух чисел, стоящих через одно, будет больше 800.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2013-14 гг.

Первый этап

20 октября 2013г

10 класс

Время написания – 4 астрономических часа.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

10.1. Решить уравнение: $\max(x, 2-x) = \min(3x, 1+2x)$. Здесь $\min(a, b)$ и $\max(a, b)$ обозначают, соответственно, минимальное и максимальное из чисел a и b .

10.2. Через середину хорды AB некоторой окружности проведен диаметр. Обозначим точку пересечения его с окружностью за C , а точку пересечения его продолжения с касательной к окружности, проведенной в точке A - за E . При этом середина AB лежит между C и центром окружности. Доказать, что AC является биссектрисой угла BAE .

10.3. В трапеции $ABCD$ длина боковой стороны AB равна 5 см, биссектриса угла A пересекает боковую сторону CD в её середине P , длина AP равна 4 см. Найти длину отрезка BP .

10.4. Можно ли в клетках квадрата 3 на 3 расположить все натуральные числа от 1 до 9, по одному в каждой клетке так, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих в клетках, имеющих общую сторону, равнялась простому числу?

10.5. Обозначим через $p(n)$ произведение всех цифр натурального числа n . Вычислить сумму $p(1000) + p(1001) + \dots + p(2000)$.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2013-14 гг.

Первый этап

20 октября 2013г

9 класс

Время написания – 4 астрономических часа.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

9.1. На доске в строку записаны сто семёрок. Можно ли между некоторыми из них расставить знаки сложения, вычитания и умножения так, чтобы после выполнения всех указанных действий получилось число 2014? Последовательность семёрок, между которыми нет знаков действий, считается одним многозначным числом.

9.2. Можно ли разрезать квадрат со стороной 1 километр на 31 квадратик, один из которых имеет сторону не больше одного метра?

9.3. Шестизначное натуральное число начинается на единицу, а при перестановке этой единицы в конец увеличивается ровно в три раза. Найти это число.

9.4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC длина биссектрисы AK вдвое больше длины высоты AH . Найти углы этого треугольника.

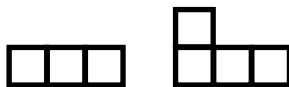
9.5. Обозначим через $p(n)$ произведение всех цифр натурального числа n . Вычислить сумму $p(1000) + p(1001) + \dots + p(2000)$.

8 класс

Время написания – 4 астрономических часа.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

8.1. Нарисуйте фигуру, состоящую из 12 клеток, которую можно разрезать как на прямоугольники 1×3 , так и на L-образные фигуры из 4 клеток (см. рисунок).



8.2. Борис завёл себе пса и отправился с ним гулять. Пёс дважды добежал до конца стометровой аллеи и вернулся обратно. В первый раз он сделал это за 4 минуты. Сколько минут пёс потратил на это во второй раз, если его скорость уменьшается вдвое каждые сто метров?

8.3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Однажды несколько жителей острова выстроились в ряд. Все они по очереди сделали по одному заявлению. Житель острова под номером k заявил: «Если не считать меня, то в этом ряду лжецов на k больше, чем рыцарей». Сколько жителей было в ряду, если известно, что их было больше двух?

8.4. Четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle BCD = \angle ABC = 120^\circ$ и $BC + CD = AD$. Докажите, что $AB = CD$.

8.5. Максим выписал в ряд натуральные числа от 1 до 10 в случайном порядке. Затем, он к каждому числу прибавил номер его места в ряду. Докажите, что после этого найдутся два числа, которые заканчиваются на одну и ту же цифру.

Всесибирская открытая олимпиада школьников по математике 2013-14 гг.

Первый этап

20 октября 2013г

7 класс

Время написания – 4 астрономических часа.

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

7.1. Борис завёл себе пса и отправился с ним гулять. Пёс дважды добежал до конца стометровой аллеи и вернулся обратно. В первый раз он сделал это за 4 минуты. Сколько минут пёс потратил на это во второй раз, если его скорость уменьшается вдвое каждые сто метров?

7.2. Как одним ломаным разрезом по линиям клеток разрезать прямоугольник размера 4 на 6 клеток на две части и сложить из них квадрат 5 на 5, из которого удалена центральная клетка?

7.3. Кузнецу нужно соединить 10 цепочек из 1, 2, 3,..., 10 звеньев в одну цепь. Какое наименьшее количество звеньев ему для этого нужно расковать и потом снова заковать? Все цепи и цепочки в задаче незамкнуты, их последнее звено не соединено с первым.

7.4. Вове и Лене сейчас вместе 26 лет, причем Лене в три раза меньше лет, чем будет Вове тогда, когда им вместе будет в пять раз больше лет, чем Вове сейчас. Сколько лет Вове?

7.5. Максим выписал в ряд натуральные числа от 1 до 10 в случайном порядке. Затем, он к каждому числу прибавил номер его места в ряду. Докажите, что после этого найдутся два числа, которые заканчиваются на одну и ту же цифру.