Критерии оценивания решений задач заочного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2013-14гг по математике

Общие принципы оценивания

Каждая задача оценивается из 7 баллов. Далее, по степени решённости задачи, баллы выставляются примерно так.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Некоторые шаги и моменты в решении задачи могут быть оценены составителями заранее и **не подлежат** пересмотру на местах. Они являются общими для всех площадок и указаны ниже. В случаях, прямо не подпадающих под указанные составителями конкретные критерии, нужно руководствоваться указанными выше общими принципами и здравым смыслом проверяющего.

Помимо этого следует проинформировать все жюри о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой обучающегося, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, но не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

7 класс

7.1. Только правильный ответ – 1 балл.

7.2.

7.3. Правильная схема расковывания и соединения: 3 балла. Доказательство минимальности 6 звеньев: 4 балла.

7.4. Только правильный ответ: 0 баллов**.** Правильный ответ с проверкой: 2 балла.

7.5. Если опущено объяснение, почему сумма 0+1+2+…+9 заканчивается на 5 (или что удвоенная сумма 1+2+..+10 оканчивается на 0), то не снимать баллы; за арифметические ошибки, не влияющие на логику, снимать 1 балл.

8 класс

8.1. Рисунок фигуры, которую можно разрезать таким образом, оценивается в полный балл даже если разрезания не приведены.
8.2. Только правильный ответ: 1 балл.
8.3. Доказательство, что рыцарь есть: 2 балла; что он ровно один: 2 балла; что $n-3$ -ий житель говорит правду: 3 балла.
8.4. Без объяснений принимается, что один из треугольников равносторонний – не больше 4 баллов.
8.5. Если опущено объяснение, почему сумма 0+1+2+…+9 заканчивается на 5 (или что удвоенная сумма 1+2+..+10 оканчивается на 0), то не снимать баллы; за арифметические ошибки, не влияющие на логику, снимать 1 балл.

9 класс

9.1. Нет чёткого объяснения, почему все числа в процессе делятся на 7 — снимаем 3 балла. **Достаточно пояснений типа:** число записанное только семёрками делится на 7, т. к. 77...7= 7·11...1, далее, сумма, разность и произведение чисел, делящихся на 7, тоже делится на 7. За отсутствие только части из указанного — снимаем 1 балл. Только ответ: 0 баллов.

9.2. Только ответ: 0 баллов.

9.3. Только ответ: 0 баллов. Ответ с проверкой: 2 балла.

9.4. Только ответ: 0 баллов. Ответ с проверкой: 2 балла. Не рассмотрен любой из случаев расположения точки К — снимаем 2 балла.

9.5. Только ответ: 0 баллов. Замечания о том, что можно рассматривать только числа, не содержащие в записи 0, т.е. записанные цифрами от 1 до 9, и что все оставшиеся рассматриваемые числа начинаются на 1, которую можно не учитывать: по 1 баллу за каждое.

10 класс

10.1. Не рассмотрен или неверно рассмотрен один из случаев $x\leq 1$ или $x>1$ или во втором случае не отброшен посторонний корень - снимаем 4 балла.

10.2. Замечание о том, что вписанный угол окружности СВА опирается на хорду СА, поэтому равен углу САЕ между этой хордой и касательной АЕ: 3 балла.
Замечание о том, что что углы СВА и САВ равны, поэтому углы САВ и САЕ равны: 3 балла.

10.3. Только ответ: 0 баллов. Ответ с примером, или разбор частного случая: 1 балл.
Построение точки Q и доказательство равенства $BP=PQ$: 2 балла.

Замечено, что ABQ - равнобедренный и AP - его высота: 2 балла.

Замечено, что треугольник APB - прямоугольный с гипотенузой AB = 5 см и катетом AP =4 см: 2 балла.

10.4. Только ответ и рассмотрение частных случаев: 0 баллов.
Замечание о том, что попарные суммы различных чисел 1,2,..,9 лежат в интервале от 3 до 17, поэтому суммы чисел в соседних клетках должны быть нечётными простыми числами: 2 балла.
Показано, что числа 1,3,5,7,9 не могут стоять в соседних клетках, значит, они расположены в угловых и центральной клетках квадрата, а числа 2,4,6,8 стоят в клетках, примыкающих к серединам сторон и все соседствуют с центральной: 2 балла.

Замечание о том, что для каждого нечётного числа 1,3,5,7,9 найдётся соответствующее ему чётное число 8,6,4,2,6 соответственно, дающее в сумме с ним составное: 3 балла.

10.5. Только ответ: 0 баллов. Замечания о том, что можно рассматривать только числа, не содержащие в записи 0, т.е. записанные цифрами от 1 до 9, и что все оставшиеся рассматриваемые числа начинаются на 1, которую можно не учитывать: по 1 баллу за каждое.

11 класс

11.1. Только ответ: 0 баллов. Ответ с проверкой: 1 балл.

11.2. Только ответ: 0 баллов. Рассмотрены частные случаи: 1 балл. Замечено, что отрезки AP,PB и BL равны, как радиусы одинаковых окружностей, и треугольники APB и PBL — равнобедренные: 2 балла.

11.3. Отсутствие упоминания о двух случаях расположения точки K относительно центра квадрата и о двух типах поведения арифметической прогрессии соответственно: снимаем 2 балла.

11.4. Только ответ: 0 баллов. Замечено, что $f(x)$ - квадратный трёхчлен, равенство $f(\sin\varphi)=f(\cos\varphi)$ возможно только, если $\sin\varphi=\cos\varphi$, (аргументы равны) или $\sin\varphi+\cos\varphi=\frac{a}{2}$ (аргументы симметричны относительно оси симметрии параболы): 2 балла.

Замечено, что первое на интервале $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ невозможно, следовательно, имеет место второй случай: 1 балл.

Замечено, что множество значений параметра a совпадает со множеством значений функции $g(\varphi)=2(\sin\varphi+\cos\varphi)$ на интервале $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$: 2 балла.

Строго показано, что множеством значений функции является промежуток $a\in(2,2\sqrt{2})$: 2 балла.

11.5. Рассмотрение частных случаев: 0 баллов.

Решения задач первого этапа Всесибирской открытой олимпиады школьников по математике 2013-14 года

7 класс

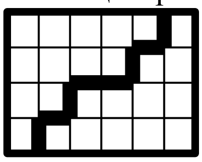
7.1. Борис завёл себе пса и отправился с ним гулять. Пёс дважды добежал до конца стометровой аллеи и вернулся обратно. В первый раз он сделал это за 4 минуты. Сколько минут пёс потратил на это во второй раз, если его скорость уменьшается вдвое каждые сто метров?

Ответ: 16 минут.

Решение: Если на первый сто метров пёс потратил x минут, то затем он тратил $2x$, $4x$, $8x$ минут, соответственно. Значит, $3x = 4$, а надо найти значение $12x$. Очевидно, $12x = 16$.

Критерии: только правильный ответ – 1 балл.

7.2. Это надо делать, как показано на рисунке. Сдвигая верхнюю половинку на клетку вверх и вправо, получим квадрат 5 на 5 без центральной клетки.



7.3. Ответ: 6 звеньев.

Решение: Расковываем все звенья цепочек с одним, двумя и тремя звеньями и соединяем ими оставшиеся семь цепочек в одну. Если расковать меньшее число звеньев, то останется не меньше восьми не соединённых цепочек, иначе были бы раскованы все звенья не менее, чем трёх цепочек, что в сумме составляет не менее шести звеньев. Очевидно, восемь цепочек нельзя соединить в одну цепь, чем семью звеньями.

Критерии: Правильная схема расковывания и соединения: 3 балла. Доказательство минимальности 6 звеньев: 4 балла.

7.4. Ответ: 14 лет.

Решение: Пусть Вове сейчас x лет, тогда Лене $26-x$ лет, а разность их возрастов равна $2x-26$ лет. В грядущем Вове будет $3(26-x)=78-3x$ лет, а Лене $3(26-x)-(2x-26)=104-5x$ лет. По условию, $78-3x+104-5x=5x$, откуда $x=14$.

Критерии: только правильный ответ: 0 баллов**.** Правильный ответ с проверкой: 2 балла.

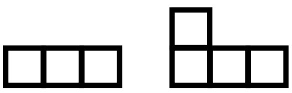
7.5. Максим выписал в ряд натуральные числа от 1 до 10 в случайном порядке. Затем, он к каждому числу прибавил номер его места в ряду. Докажите, что после этого найдутся два числа, которые заканчиваются на одну и ту же цифру.

Решение: Если все новые числа заканчиваются на разные цифры, то последняя цифра суммы этих чисел совпадает с последней цифрой суммы 0+1+2+…+9 и равна 5. С другой стороны, общая сумма этих чисел складывается из суммы старых чисел (1+2+..+10) и суммы номеров мест (1+2+..+10) и равна 110. Так как 110 не заканчивается на 5, то наше предположение, что все новые числа заканчиваются на разные цифры, неверно.

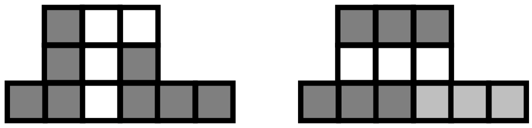
Критерии: если опущено объяснение, почему сумма 0+1+2+…+9 заканчивается на 5 (или что удвоенная сумма 1+2+..+10 оканчивается на 0), то не снимать баллы; за арифметические ошибки, не влияющие на логику, снимать 1 балл.

8 класс

8.1. Нарисуйте фигуру, состоящую из 12 клеток, которую можно разрезать как на прямоугольники 1×3, так и на L-образные фигуры из 4 клеток (см. рисунок).



Ответ: Возможны другие решения.



Критерии: рисунок фигуры, которую можно разрезать таким образом, оценивается в полный балл даже если разрезания не приведены.

8.2. Борис завёл себе пса и отправился с ним гулять. Пёс дважды добежал до конца стометровой аллеи и вернулся обратно. В первый раз он сделал это за 4 минуты. Сколько минут пёс потратил на это во второй раз, если его скорость уменьшается вдвое каждые сто метров?

Ответ: 16 минут.

Решение: Если на первый сто метров пёс потратил x минут, то затем он тратил $2x$, $4x$, $8x$ минут, соответственно. Значит, $3x = 4$, а надо найти значение $12x$. Очевидно, $12x = 16$.

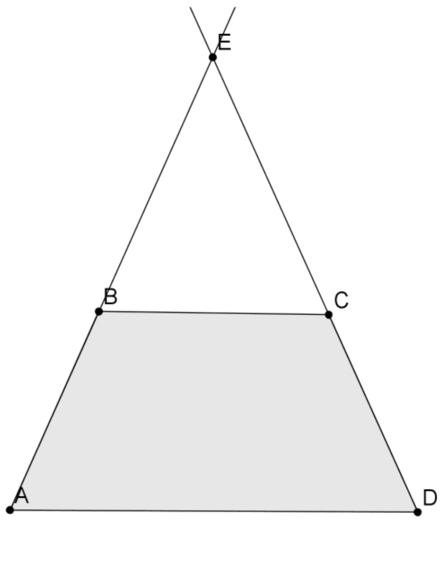
Критерии: только правильный ответ – 1 балл.

8.3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Однажды несколько жителей острова выстроились в ряд. Все они по очереди сделали по одному заявлению. Житель острова под номером k заявил: «Если не считать меня, то в этом ряду лжецов на k больше, чем рыцарей». Сколько жителей было в ряду, если известно, что их было больше двух?

Ответ: 3.

Решение: Допустим, что в ряду нет ни одного рыцаря, тогда предпоследний говорящий сделал верное замечание, а значит, не может быть лжецом. Значит, в ряду есть хотя бы один рыцарь. Допустим, рыцарей несколько. Тогда их высказывания противоречат друг другу. Таким образом, в ряду ровно один рыцарь, который стоит на предпоследнем месте. При этом, если в ряду n человек, то, если не считать произвольного лжеца, в ряду лжецов на $n-3$ больше, чем рыцарей. Значит, житель, стоящий на $n-3$ месте, говорит правду, но этого не может быть. Следовательно, этого места нет, а всего мест не больше 3. По условию, их больше двух, значит, их ровно три.

Критерии: доказательство, что рыцарь есть – 2 балла; что он ровно один – 2 балла; что $n-3$ житель говорит правду – 3 балла.



8.4. Четырёхугольник $ABCD$ таков, что $\angle BCD = \angle ABC = 120°$ и $BC + CD = AD$. Докажите, что $AB = CD$.

Решение: Продолжим стороны AB и CD до пересечения в точке E. В треугольнике BED два угла равны $60°$, значит, треугольник равносторонний. Следовательно, $ED = EC + CD = BC + CD = AD$, то есть, треугольник AED – равнобедренный с углом в $60°$, а значит, треугольник AED равносторонний. Таким образом, $AE = ED$ (из треугольника AED), $BE = EC$ (из треугольника BEC), и следовательно, $AB = AE - BE = DE - CE = CD$.

Критерии: без объяснений принимается, что один из треугольников равносторонний – не больше 4 баллов.

8.5. Максим выписал в ряд натуральные числа от 1 до 10 в случайном порядке. Затем, он к каждому числу прибавил номер его места в ряду. Докажите, что после этого найдутся два числа, которые заканчиваются на одну и ту же цифру.

Решение: Если все новые числа заканчиваются на разные цифры, то последняя цифра суммы

этих чисел совпадает с последней цифрой суммы 0+1+2+…+9 и равна 5. С другой стороны, общая сумма этих чисел складывается из суммы старых чисел (1+2+..+10) и суммы номеров мест (1+2+..+10) и равна 110. Так как 110 не заканчивается на 5, то наше предположение, что все новые числа заканчиваются на разные цифры, неверно.
Критерии: если опущено объяснение, почему сумма 0+1+2+…+9 заканчивается на 5 (или что удвоенная сумма 1+2+..+10 оканчивается на 0), то не снимать баллы; за арифметические ошибки, не влияющие на логику, снимать 1 балл.

9 класс

9.1. **Ответ.** Нельзя.
Очевидно, что после произвольной расстановки знаков все числа, с которыми нужно проделать операции сложения, вычитания и умножения, делятся на 7, поэтому и результат должен делиться на 7, а это противоречит тому, что 2014 на 7 не делится.
9.2. Ответ. Да, можно.
Сначала разобьём исходный квадрат на четыре равных со сторонами $\frac{1}{2}$ км, затем один из них – на четыре равных со сторонами $\frac{1}{4}$ км и т.д. После десяти таких шагов последовательного разбиения одного из наименьших квадратиков на 4 равных, у нас будет 31 квадратик, а стороны четырёх самых маленьких из них будут равны $\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}$ км, что меньше одного метра.
9.3. **Ответ.** 142857.
Первое решение. Обозначим искомое число за А, полученное перестановкой первой единицы в конец – за В, по условию, В получается из А умножением на 3. Последняя цифра В равна 1, следовательно, последняя цифра А равна 7, при этом в следующий разряд переходит 2. Предпоследняя цифра В равна 7 и 2 пришла из правого разряда, следовательно, предпоследней цифрой А является 5, при этом в следующий разряд переходит 1, и т.д. Ответ единственный.
Второе решение. Обозначим искомое число за 10^5+x, где x - пятизначное число, получающееся из исходного стиранием первой единицы. После перестановки единицы в конец числа получим: $3(10^5+x)=10x+1$, откуда $x=\frac{3\cdot 10^5-1}{7}=42857$.
9.4. **Ответ.** 20, 20 и 140 градусов.
Обозначим угол при основании треугольника ABC за φ. Рассмотрим три случая. 1) Треугольник ABC остроугольный и К расположена между В и Н. Тогда $90-\varphi\leq\frac{\varphi}{2}$, $\varphi\geq 60$. Далее, из условия $\angle AKH=30$ и $\varphi+\frac{\varphi}{2}+30=180$, откуда $\varphi=100$, чего не может быть. 2) Треугольник ABC остроугольный и Н расположена между В и К, тогда $45\leq\varphi\leq 60$. При этом $\angle AKC=150$ и $\varphi+\frac{\varphi}{2}+150=180$, откуда $\varphi=20$, что нам не подходит . 3) Треугольник ABC тупоугольный. Аналогично случаю 2) получаем $\varphi=20$ - подходит. Значит, углы треугольника равны 20, 20 и 140 градусов.
9.5. **Ответ.** $45^3=91125$.
Во-первых, можно рассматривать только числа, не содержащие в записи 0, т.е. записанные цифрами от 1 до 9. Далее, все оставшиеся рассматриваемые числа начинаются на 1, которую можно не учитывать, а на остальных трёх местах стоят всевозможные комбинации трёх цифр от 1 до 9. Если мы запишем произведение трёх скобок, каждая из которых содержит сумму $1+2+3+\ldots+9=45$, и раскроем эти скобки, то получим в точности сумму произведений всевозможных упорядоченных комбинаций трёх цифр от 1 до 9, то – есть как

раз то, что нам нужно.

10 класс

10.1 . Ответ. $x=\frac{1}{2}$ **.**

Раскрываем скобки в правой и левой частях уравнения. При $x\le 1$ левая часть равна $2-x$, а правая $3x$, получим $x=\frac{1}{2}\le 1$ - соответствует рассматриваемому случаю. При $x>1$ левая часть равна x , а правая $1+2x$, откуда $x=-1<1$ - посторонний корень.

10.2. Вписанный угол окружности CBA опирается на хорду CA, поэтому равен углу CAE между этой хордой и касательной AE. С другой стороны очевидно, что углы CBA и CAB равны, поэтому углы CAB и CAE равны и AC – биссектриса угла BAE.

10.3. **Ответ.** $BP=3$ см.

Продолжим прямую BP до пересечения с прямой AD в точке Q . Прямые *CB* и *AD* параллельны, и P - середина отрезка *CB,* следовательно $BP=PQ$. Значит, в треугольнике ABQ отрезок AP является биссектрисой и медианой, следовательно ABQ - равнобедренный и AP - его высота. Тогда треугольник APB - прямоугольный с гипотенузой AB = 5 см и катетом AP =4 см. По теореме Пифагора, $BP=3$.

10.4. **Ответ.** Нет.

Попарные суммы различных чисел 1,2,..,9 лежат в интервале от 3 до 17, поэтому суммы чисел в соседних клетках должны быть нечётными простыми числами. Следовательно, нечётные числа 1,3,5,7,9 не могут стоять в соседних клетках, значит, они расположены в угловых и центральной клетках квадрата, а числа 2,4,6,8 стоят в клетках, примыкающих к серединам сторон и все соседствуют с центральной. Несложно заметить, что для каждого нечётного числа 1,3,5,7,9 найдётся соответствующее ему чётное число 8,6,4,2,6 соответственно, дающее в сумме с ним составное, поэтому в центральной клетке не может стоять ни одно нечётное число – противоречие.

10.5. **Ответ.** $45^3=91125$.

Во-первых, можно рассматривать только числа, не содержащие в записи 0, т.е. записанные цифрами от 1 до 9. Далее, все оставшиеся рассматриваемые числа начинаются на 1, которую можно не учитывать, а на остальных трёх местах стоят всевозможные комбинации трёх цифр от 1 до 9. Если мы запишем произведение трёх скобок, каждая из которых содержит сумму $1+2+3+\ldots+9=45$, и раскроем эти скобки, то получим в точности сумму произведений всевозможных упорядоченных комбинаций трёх цифр от 1 до 9, то – есть как раз то, что нам нужно.

11 класс

11.1. Ответ. 142857.

Обозначим искомое число за А, полученное перестановкой первой единицы в конец – за В, по условию, В получается из А умножением на 3. Последняя цифра В равна 1, следовательно, последняя цифра А равна 7, при этом в следующий разряд переходит 2. Предпоследняя цифра В равна 7 и 2 пришла из правого разряда, следовательно, предпоследней цифрой А является 5, при этом в следующий разряд переходит 1, и т.д. Ответ единственный.

11.2. Заметим, что отрезки *AP,PB* и *BL* равны, как радиусы одинаковых окружностей, и треугольники *APB* и *PBL* - равнобедренные. Следовательно, обозначив угол *PAB* за φ , получим $\angle LAM=\angle ABP=\varphi, \angle BPL=2\varphi=\angle BLP, \angle PBL=\pi-4\varphi, \angle LBM=$
$=\pi-(\pi-4\varphi)-\varphi=3\varphi=3\angle LAM$, что и требовалось доказать.

11.3. Считаем, что центр квадрата O лежит между K и P. Проведём через O прямую ***a***, параллельную стороне BC, а через точку K прямую ***b***, параллельную стороне AB. Точку пересечения AB и ***a*** обозначим за M, а точку пересечения ***a*** и ***b*** - за N. Если считать длину стороны квадрата за 1 см. то $OM=\frac{1}{2}, PM=\frac{1}{6}$, расстояние от N до сторон BC и AD равны $\frac{1}{2}$.

Пусть $KN=x$, из подобия треугольников OMP и ONB следует $ON=3x$. Тогда расстояния от *K* до сторон *AB, AD, BC* и *CD* равны, соответственно, $\frac{1}{2}+3x, \frac{1}{2}+x, \frac{1}{2}-x, \frac{1}{2}-3x$, то - есть образуют убывающую арифметическую прогрессию с разностью $2x$.

11.4. Ответ. $a\in(2,2\sqrt{2})$.

С учётом того, что $f(x)$ - квадратный трёхчлен, равенство $f(\sin\varphi)=f(\cos\varphi)$ возможно только, если $\sin\varphi=\cos\varphi$, (аргументы равны) или $\sin\varphi+\cos\varphi=\frac{a}{2}$ (аргументы симметричны относительно оси симметрии параболы). Первое на интервале $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$ невозможно, следовательно, имеет место второй случай и множество значений параметра a совпадает со множеством значений функции $g(\varphi)=2(\sin\varphi+\cos\varphi)$ на интервале $(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$. Используя дополнительный аргумент, перепишем $2(\sin\varphi+\cos\varphi)=2\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4}),\varphi\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$. Полученная функция монотонно убывает на всём промежутке, и $g(\frac{\pi}{4})=2\sqrt{2},g(\frac{\pi}{2})=2$, поэтому множеством её значений является промежуток $a\in(2,2\sqrt{2})$

11.5. Рассмотрим числа 400,401,…,600, их всего 201 штука. Разобьём строку из 600 выписанных чисел на 200 троек соседних чисел. В одной из них будет находиться не меньше двух чисел от 400 до 600, их сумма, очевидно, больше 800. Два числа в тройке могут быть либо соседними, либо идти через одно. Первое, по условию, невозможно, поэтому найденные числа будут идти через одно и давать в сумме больше 800, что и требовалось доказать.