Решения и критерии проверки задач Заключительного этапа

Всесибирской олимпиады школьников 2012-2013 г.г. по математике

Указанные ниже рекомендации по оцениванию этапов решения допускают снижение оценок при наличии дополнительных погрешностей. Особенно тщательно нужно проверять обоснованность рассуждений в задачах по геометрии, задачах 9.4, 9.5, 10.3, 10.5. **Каждое полное верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.** Некрасивость решения не повод для снижения оценки.

Общие рекомендации по оцениванию.

Верное и полное решение с правильным ответом: 7 баллов,

Верное решение с небольшими погрешностями типа арифметических ошибок: 6 баллов,

Верное в целом решение с заметными пробелами типа нерассмотренных частных случаев: 4-5 баллов,

Высказана идея решения, которая может быть реализована, но сам автор её не довёл до конца: 2-3 балла,

Имеются некоторые технические действия, вроде вычисления каких-то промежуточных цифр, относящихся к решению, либо угадан ответ без доказательства ответ: 0-1 балл.

В ряде задач приведены более конкретные замечания по оцениванию именно этих задач. Там, где их нет, нужно руководствоваться общими рекомендациями по оцениванию и здравым смыслом. Да пребудет с нами сила!

9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Какие две цифры нужно дописать справа к числу 2013, чтобы полученное шестизначное число делилось на 101? Найти все возможные варианты ответа.

Ответ. 94 полученное число будет равно 201394.

Решение. Остаток от деления числа $\overline{2013xy}$ на 101 равен $\overline{xy}+7$ и это должно делиться на 101. Это больше 0, но меньше 202, поэтому $\overline{xy}+7=101, \overline{xy}=94, x=9, y=4$.

Оценивание. Просто ответ с проверкой: 1 балл. Необоснование $\overline{xy}+7=101$ - минус балл.

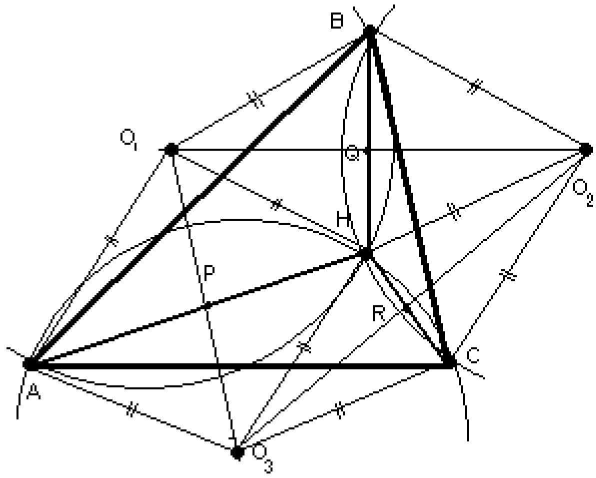
9.2. Найти максимальное нечётное натуральное число, которое нельзя представить в виде суммы трёх различных составных чисел.

Ответ. 17.

Решение. Нечётное число даёт при делении на 4 остатки 1 или 3. В первом случае искомое представление имеет вид $n=4k+1=4(k-4)+8+9, k\geq 5, n\geq 21$, во втором - $n=4k+3=4(k-3)+6+9, k\geq 4, n\geq 19$. С другой стороны, тремя наименьшими составными числами являются 4,6,8, сумма которых равна 18, поэтому число 17 представить в требуемом виде нельзя. Оно и является ответом задачи.

Оценивание. Просто ответ с проверкой: 0 баллов. Необоснование непредставимости 17 в искомом виде - минус 2 балла.

9.3. В остроугольном треугольнике *ABC* выбрана точка *H* такая, что радиусы описанных окружностей треугольников *AHB*, *BHC* и *CHA* равны. Доказать, что *H* является точкой пересечения высот треугольника *ABC*.



Решение. Обозначим середины отрезков *AH, BH* и *CH* через *P,Q* и *R* соответственно, а центры описанных окружностей треугольников *AHB, BHC* и *CHA* через O_1, O_2, O_3 соответственно. Из условия следует, что четырёхугольники $AO_1HO_3, BO_2HO_1, CO_3HO_2$ являются ромбами, поэтому точки *P,Q* и *R* являются серединами отрезков *AH, BH* и *CH,* а отрезки, соединяющие центры окружностей, им соответственно перпендикулярны и тоже делятся ими пополам. Тогда отрезок *PQ,* например, является одновременно средней линией в треугольниках *AHB* и $O_1O_2O_3$, следовательно, сторона *AB* и отрезок O_2O_3 равны и параллельны. В ромбе CO_3HO_2 диагональ *HC* перпендикулярна диагонали O_2O_3, следовательно, *HC* перпендикулярна стороне треугольника *AB.* Последнее означает, что *H* лежит на высоте треугольника, опущенной из вершины *C.* Аналогично доказывается, что *H* лежит и на остальных высотах, то есть является их точкой пересечения, именуемой в народе ортоцентром.

Оценивание. Доказательство в «обратную сторону» хорошо известного факта, что если H – ортоцентр, то радиусы описанных окружностей равны: 1 балл.

9.4. Доказать, что, если $x^2+xy+xz<0$, то $y^2>4xz$.

Решение. Представим исходное неравенство в виде $x(x+y+z)<0$.

1) В случае $x<0$, имеем $x+y+z>0$ и $y>-x-z$. Если $-x-z<0$, то $x+z>0$, следовательно, $z>0$, значит $y^2\ge 0>4xz$. Если $-x-z\ge 0$, то

$y^2>(-x-z)^2=x^2+z^2+2xz\ge 2|x||z|+2xz\ge 4xz$.

2) В случае $x>0$, имеем $x+y+z<0$ и $y+z<-x<0$. Если при этом $z<0$, то $y^2\ge 0>4xz$. Если же $z\ge 0$, то $y<-x-z<0$, и $-y>x+z>0$, поэтому

$y^2>(x+z)^2\ge 4xz$.

Оценивание. В каждом переходе нужно тщательно следить, как школьник работает со знаками сторон неравенства. При возведении их в квадрат без проверок – оценка не выше 4 баллов. Если таких мест более одного – оценка не выше 1 балла.

9.5. В клетках доски 8 на 8 расставлены фишки так, что для каждой фишки горизонталь либо вертикаль доски, в которых она лежит, содержит всего не более трёх фишек. Каково максимально возможное количество фишек на доске?

Ответ. 30.

Решение. Переставив вертикали и горизонтали местами, считаем, что только левые x вертикалей и нижние y горизонталей содержат больше, чем по 3 фишки. Из условия следует, что в левом нижнем прямоугольнике на пересечении этих вертикалей и горизонталей фишек нет вообще. Каждая вертикаль, проходящая через фишки в этих горизонталях, содержит не более трёх фишек, и каждая горизонталь, проходящая через фишки в этих вертикалях, содержит не более трёх фишек. Тогда общее количество фишек на доске не превосходит $3(8-x)+3(8-y)=48-3(x+y)$, что не превосходит 30 при $x+y\geq 6$.

Пусть далее $x+y\leq 5$ и $x\leq y$, тогда $x\leq 2$. Оценим сверху общее количество фишек на доске, как $3(8-x)+x(8-y)=24+5x-xy$. При $x=2$ это не больше 30, при $x=1, x=0$ - не больше 29 и 24 соответственно.

Пример расстановки 30 фишек: заполнены все клетки трёх левых вертикалей и трёх нижних горизонталей, кроме левого нижнего квадрата 3 на 3 клетки.

Оценивание. Оценка 5 баллов. Пример 2 балла. Любая неверная оценка с любыми рассуждениями – 0 баллов.

Решения задач Заключительного этапа

Всесибирской олимпиады школьников 2012-2013 г.г. по математике

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Какие две цифры нужно дописать справа к числу 2013, чтобы полученное шестизначное число делилось на 101? Найти все возможные варианты ответа.

Ответ. 94, полученное число будет равно 201394.

Решение. Остаток от деления числа $\overline{2013xy}$ на 101 равен $\overline{xy}+7$ и это должно делиться на 101. Это больше 0, но меньше 202, поэтому $\overline{xy}+7=101, \overline{xy}=94, x=9, y=4$.

Оценивание. Просто ответ с проверкой: 1 балл. Необоснование $\overline{xy}+7=101$ - минус балл.

10.2. Решить уравнение: $\sqrt[3]{20-x}-\sqrt[3]{13-x}=\sqrt[3]{7}$.

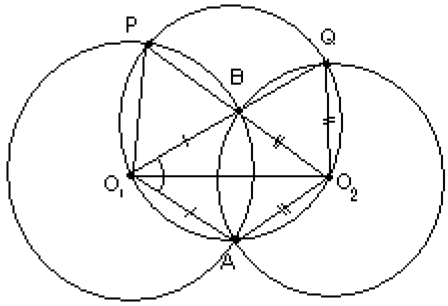
Ответ. 20 и 13.

Решение. Если всё тупо возвести в куб и привести подобные, получим $\sqrt[3]{20-x}\sqrt[3]{13-x}(\sqrt[3]{20-x}-\sqrt[3]{13-x})=0$. Скобка не равна 0, поэтому либо $x=20$, либо $x=13$.

Оценивание. Просто ответ с проверкой: 1 балл. Потеря решения – минус 3 балла.

10.3. Окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в двух точках A и B. Пусть P и Q - точки пересечения окружности, описанной вокруг треугольника

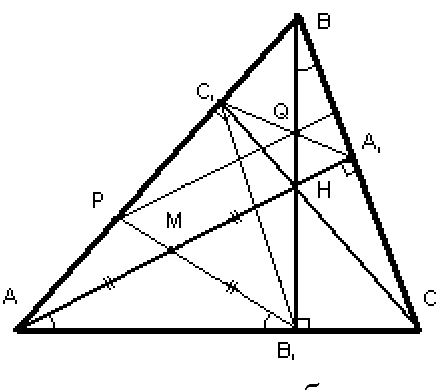
O_1AO_2 с первой и второй окружностями соответственно. Доказать, что отрезки O_1Q и O_2P пересекаются в точке B.



Решение. Нам достаточно доказать, что точка B принадлежит отрезкам O_1Q и O_2P.
Треугольники O_2O_1B и O_2O_1A равны по трём сторонам, поэтому $\angle O_2O_1B = \angle O_2O_1A$. С другой стороны, отрезки O_2A и O_2Q равны, как радиусы, поэтому $\angle O_2O_1A = \angle O_2O_1Q$, как опирающиеся на одинаковые дуги в окружности, описанной около треугольника O_2O_1A. Следовательно, $\angle O_2O_1B = \angle O_2O_1A = \angle O_2O_1Q$, поэтому точки O_1, B и Q лежат на одной прямой. Аналогично доказывается, что точки O_2, B и P тоже лежат на одной прямой.

10.4. В клетках доски 8 на 8 расставлены фишки так, что для каждой фишки горизонталь либо вертикаль доски, в которых она лежит, содержит всего одну фишку. Каково максимально возможное количество фишек на доске?
Ответ. 14.
Решение. Сопоставим каждой фишке ту горизонталь либо вертикаль доски, в которой она единственна. Если она единственна в них обеих, сопоставим горизонталь. Из условия следует, что разным фишкам сопоставлены разные горизонтали и вертикали. Если не все горизонтали и не все вертикали сопоставлены, то их общее число не превосходит 14, в каждой из них не более одной фишки, всего фишек не более 14. Если же сопоставлены, скажем, все горизонтали, то в каждой горизонтали стоит по фишке – всего 8.
Пример расстановки 14 фишек: заполнены все клетки левой вертикали и нижней горизонтали, кроме левой нижней угловой клетки.
Оценивание. Оценка 5 баллов. Пример 2 балла. Любая неверная оценка с любыми рассуждениями – 0 баллов.

10.5. В остроугольном треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 являются основаниями высот, опущенных из вершин A, B, C соответственно, а H — точка пересечения высот. Точка M — середина AH, Q — точка пересечения отрезков BH и A_1C_1, а P - точка пересечения прямой B_1M и стороны AB. Доказать, что прямая PQ перпендикулярна стороне BC.



Решение. Достаточно показать, что PQ параллельна AA_1. Последнее равносильно тому, что $AP : PC_1 = A_1Q : QC_1$. Хорошо известен факт подобия между собой треугольников $ABC, AB_1C_1, BC_1A_1, CA_1B_1$, то есть исходного и трёх, каждый из которых образован соответствующей вершиной исходного и двумя основаниями высот. Подобие, например ABC и BC_1A_1, короче всего может быть доказано с помощь отношений: $A_1B : AB = \cos\angle B = C_1B : CB$ соответствующих сторон при общем угле B. Из данных подобий вытекает подобие треугольников AB_1C_1 и A_1BC_1, при котором соответствующими являются вершины A и A_1, B и B_1. Далее

заметим, что из равенства углов
$\angle AB_1P = \angle MB_1A = \angle MAB_1 = 90 - \angle C = \angle A_1BB_1 = \angle A_1BQ$ вытекает, что точки P и Q тоже являются соответствующими при данном подобии. Отсюда сразу следует требуемое отношение $AP : PC_1 = A_1Q : QC_1$.

Оценивание. Доказано подобие треугольников AB_1C_1 и A_1BC_1 : 2 балла. Замечено равенство $\angle AB_1P = \angle A_1BQ$: 1 балл.

.

Решения задач Заключительного этапа

Всесибирской олимпиады школьников 2012-2013 г.г. по математике

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Какие три цифры нужно дописать справа к числу 579, чтобы полученное шестизначное число делилось на 5, на 7 и на 9? Найти все возможные варианты ответа.

Ответ. (6,0,0),(2,8,5) или (9,1,5). Полученное число будет соответственно, равно 579600, 579285 или 579915.

Решение. Обозначим цифры, которые нужно приписать, как x, y, z по порядку слева направо, полученное 6-значное число будет таким: $\overline{579xyz}$. По признаку делимости на 5 имеем $z = 0$ или $z = 5$. По признаку делимости на 9 в первом случае $x + y$ даёт при делении на 9 остаток 6, а во втором случае остаток 1.

В первом случае $x + y$ равно 6 или 15. Остаток от деления числа $\overline{579xy0}$ столбиком на 7 равен остатку от деления на 7 числа $2 + 2x + 3y$. Следовательно, либо $2 + 2x + 3y = 2 + 2x + 3(6 - x) = 20 - x$ делится на 7, откуда $x = 6, y = 0$, либо $2 + 2x + 3y = 2 + 2x + 3(15 - x) = 47 - x$ делится на 7, откуда $x = 5, y = 10$, что невозможно.

Во втором случае $x + y$ равно 1 или 10. Остаток от деления числа $\overline{579xy5}$ столбиком на 7 равен остатку от деления на 7 числа $2x + 3y$. Следовательно, либо $2x + 3y = 2x + 3(1 - x) = 3 - x$ делится на 7, откуда $x = 3, y = -2$, что невозможно, либо $2x + 3y = 2x + 3(10 - x) = 30 - x$ делится на 7, откуда $x = 2, y = 8$, или $x = 9, y = 1$.

Оценивание. Просто ответ с проверкой: 1 балл. Потеря каждого решения – минус 2 балла. Необоснованность заявлений типа «$x + y$ равно 6 или 15» - минус 1 балл.

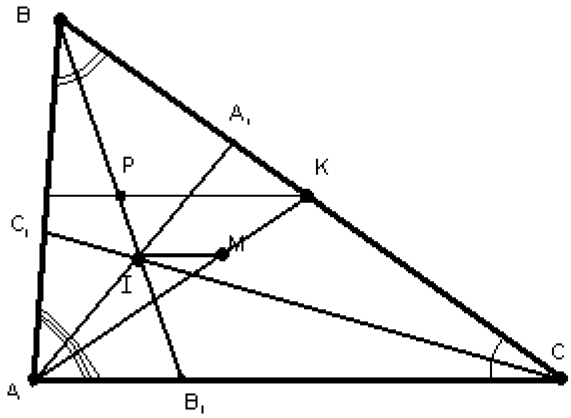
11.2. Найдите все тройки действительных чисел таких, что каждое из этих чисел равно квадрату разности двух других.

Ответ. (0,0,0), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1).

Решение. Запишем условие в виде системы уравнений от искомых неизвестных x, y, z так: $x = (y - z)^2, y = (x - z)^2, z = (x - y)^2$. Вычтем второе уравнение из первого, третье из первого и третье из второго, получим три уравнения – следствия:
$x - y = (x - y)(2z - x - y), x - z = (x - z)(2y - x - z), y - z = (y - z)(2x - y - z)$. Если переменные попарно не равны, то, сокращая первые скобки, получим:
$2z - x - y = 2y - x - z = 2x - y - z = 1$. Сложив три полученных равенства, имеем 0=3 – противоречие. Следовательно, среди переменных есть равные. Пусть,

скажем, $x = y$. Тогда из третьего уравнения исходной системы $z = 0$, и из первого $x = x^2$, откуда $x = y = 0$ или $x = y = 1$. Аналогично рассматриваются равенства остальных переменных. Проверка показывает, что найденные тройки чисел являются решениями системы.
Оценивание. Просто ответ с проверкой: 0 баллов. Потеря каждого решения – минус 2 балла. Необоснованные сокращения скобок – минус 3 балла.

11.3. Периметр треугольника *ABC* равен 24 см, а отрезок, соединяющий точку пересечения его медиан с точкой пересечения его биссектрис, параллелен стороне *AC*. Найти длину *AC*.
Ответ. 8 см.
Решение. Обозначим через АК медиану из вершины А, через М - точку пересечения медиан АВС, через I – точку пересечения его биссектрис AA_1, BB_1, CC_1. Проведём через К прямую параллельно АС, пересекающую биссектрису BB_1 в точке Р – её середине. По теореме Фалеса, $PI : IB_1 = KM : MA = 1:2$, поэтому $BI : IB_1 = 2:1$. По свойству биссектрис AI и CI в треугольниках ABB_1 и CBB_1 имеем $AB : AB_1 = BI : IB_1 = CB : CB_1 = 2:1$. Отсюда $AC = \frac{1}{2}(AB + BC) = \frac{1}{3}(AB + BC + AC) = 8$.



Оценивание. Просто ответ: 0 баллов. Нахождение отношения $BI : IB_1 = 2:1$: 3 балла. Нахождение отношений $AB : AB_1 = BI : IB_1 = CB : CB_1 = 2:1$: 2 балла.

11.4. На сфере отмечена точка *M*. Рассмотрим все тройки точек *A,B,C* на сфере, отличных от *M,* таких, что отрезки *MA, MB, MC* попарно перпендикулярны, и для каждой такой тройки рассмотрим плоскость, проходящую через *A,B,C.* Докажите, что все эти плоскости проходят через некоторую общую точку.
Решение. Рассмотрим произвольную тройку точек *A, B, C*, удовлетворяющую условию и точку *N*, лежащую в плоскости *MAB*, являющуюся вместе с точками *M, A, B* четвёртой вершиной прямоугольника *MABN.* Точка *N* лежит на окружности с диаметром *AB*, то есть, на описанной окружности треугольника *MAB.* Данная окружность является сечением сферы плоскостью *MAB* и лежит на сфере. Следовательно, точка *N* тоже лежит на сфере. Проделав подобные рассуждения ещё пять раз, мы получим, что вершины прямоугольного параллелепипеда, построенного на репере *MABC*, лежат на сфере. Центр *O* этого параллелепипеда равноудалён от его вершин, значит, совпадает с центром сферы. Теперь используем известное свойство параллелепипеда: плоскость *ABC* делит его главную диагональ с началом в *M* в отношении 1 к 2, считая от *M.* Значит, данная плоскость делит отрезок *MO* в отношении 2 к 1, считая от *M.* Таким образом, произвольная рассматриваемая в условии плоскость проходит через общую точку *P*, делящую отрезок *MO* в отношении 2 к 1, считая от *M.*

Оценивание. Построен параллелепипед и доказано, что все его вершины лежат на сфере: 2 балла. Показано, что центры параллелепипеда и сферы совпадают: 1 балл.
Замечание: Задача без особых проблем решается координатным методом: вводим систему координат с началом M, осями MA, MB и MC, записываем уравнение плоскости ABC в отрезках на осях и параметрическое уравнение прямой MO, находим, что данная плоскость делит отрезок MO в отношении 2 к 1, считая от M. Тогда, за введение таких координат: 0 баллов, за уравнение плоскости: 2 балла, за уравнение прямой MO: 1 балл.

11.5. Доказать, что среди пяти произвольных вершин правильного (все стороны и все углы которого равны) 15-ти угольника всегда найдутся три, являющихся вершинами равнобедренного треугольника.
Решение. Длины сторон и диагоналей правильного 15-угольника могут принимать 7 возможных значений. Пять выбранных вершин соединяются между собой десятью отрезками, поэтому между их длинами будут совпадения.
1) Если равны длины трёх из этих отрезков, то два из них имеют общую вершину, их концы и образуют равнобедренный треугольник.
2) Если совпадают только длины пар отрезков, то есть не менее трёх разных пар равных по длине отрезков, в каждой паре концы отрезков различны. Заметим, что в четырёхугольнике, образованном концами двух отрезков AB и CD равной длины, есть ещё пара отрезков равной длины и два отрезка разной длины. Если AB и CD стороны этого четырёхугольника, то совпадать по длине будут ещё и его диагонали, а не совпадать – другая пара сторон. А если AB и CD – диагонали, то совпадать по длине будет ещё одна из пар сторон, а не совпадать – другая – это следует из нечётности количества сторон в правильном 15-угольнике. Кроме того, в любом треугольнике, образованном тремя из вершин A,B,C,D есть по одному отрезку из каждой пары равных.
Поскольку пар равных отрезков не менее трёх, то есть не менее двух четырёхугольников с вершинами в некоторых из выбранных 5 вершин, в каждом из которых по две пары равных отрезков, соединяющих вершины.
В таком случае в треугольнике, лежащем в обоих этих четырёхугольниках, есть представители четырёх пар отрезков равных длин. По принципу Дирихле это значит, что есть не менее трёх отрезков равной длины с концами в выбранных 5 вершинах, два из которых и образуют, как показано в п. 1), искомый равнобедренный треугольник.
Оценивание. Замечено, что три равных диагонали приводят к равнобедренному треугольнику: 1 балл.
Замечено, что в четырёхугольнике, образованном концами двух отрезков AB и CD равной длины, есть ещё пара отрезков равной длины и два отрезка разной длины: 2 балла. Замечено, что в любом треугольнике, образованном тремя из вершин A,B,C,D есть по одному отрезку из каждой пары равных: 1 балл.

7 класс

7.1 Разрежьте квадрат 5×5 на прямоугольники 1×3 и 1×4.
Решение:

1	1	1	1	2
4	5	6	7	2
4	5	6	7	2
4	5	6	7	2
4	3	3	3	3

Возможны и другие решения!

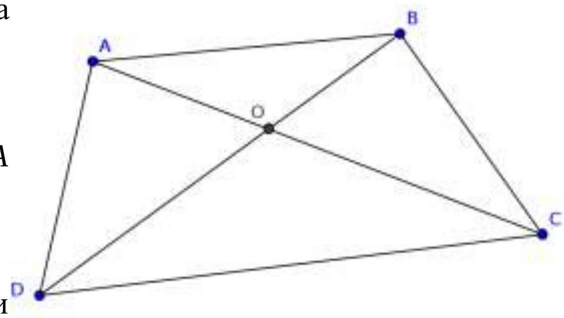
7.2 Для того чтобы купить квартиру, нужно взять или ровно 9 маленьких, 6 средних и один большой кредиты, или ровно 3 маленьких, 2 средних и 3 больших кредита. Какое количество только больших кредитов потребуется, чтобы купить квартиру?
Ответ: 4 больших кредита.
Решение: Маленький, средний и большой кредиты обозначим буквами **м**, **с** и **б** соответственно. Перепишем условие в этих обозначениях:

$$9м + 6с + б = 3м + 2с + 3б.$$

Сократив, получим $6м + 4с = 2б$ или $3м + 2с = б$, а значит, $3м + 2с + 3б = 4б$.
Критерии: Только ответ — 0 баллов.
Верно составленное уравнение — 1 балла.

7.3 Среди 9 монет есть 4 фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково, фальшивые же отличаются по весу друг от друга и от настоящих. Используя только чашечные весы без гирь, найдите хотя бы одну настоящую монету за четыре взвешивания.
Решение: Обозначим монеты числами от 1 до 9. Будем взвешивать монеты парами: 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, 7 и 8. Если в одном из этих взвешиваний получили равенство чаш, значит обе монеты, участвующие в нём, настоящие. Иначе, настоящих монет в первых четырех взвешиваниях не больше четырех, следовательно, последняя монета — настоящая.
Критерии: Верный алгоритм — не менее 5 баллов.

7.4 Диагонали AC и BD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Известно, что периметр треугольника ABC равен периметру треугольника ABD. Кроме того, периметр ACD равен периметру треугольника BCD. Докажите, что $AO = OB$.
Решение: Запишем равенство периметров, сложим два равенства и приведем подобные:



$$AB + BC + AC = BD + AB + AD$$
$$AC+CD+AD = BC + CD + BD$$
$$AB + BC + AC + AC + CD + AD = BC + CD +BD + BD + AB + AD$$
$$AC + AC = BD + BD$$
$$AC = BD$$

Используя это, приведем подобные в первом равенстве и получим

$$BC = AD.$$

Итак, $AC = BD$, $BC = AD$. Значит, треугольники ABC и BAD равны по трем сторонам. Таким образом, углы ABC и BAD равны, что значит, что треугольник ABO равнобедренный, и $AO = OB$.
Критерии: Доказано, что $AC = BD$ — 3 балла.
Выписано равенство периметров, дальнейших продвижений нет — 0 баллов.

7.5 В клетках квадрата 7×7 расставлены плюсы и минусы. Разрешается менять все знаки на противоположные в любой строке или любом столбце. Докажите, что такими действиями можно добиться того, чтобы в каждой строке и в каждом столбце плюсов было больше, чем минусов.

Решение: Рассмотрим какую-нибудь расстановку плюсов и минусов. Если в ней есть столбец (или строка), в котором плюсов меньше, чем минусов, то поменяем в нем (ней) все знаки на противоположные. При этом количество плюсов увеличится. Поступая так и далее, мы будем увеличивать количество плюсов в таблице. Поступать так бесконечно мы не можем (максимально возможное количество плюсов — 49), значит, когда-нибудь процесс остановится. Значит, мы получили расстановку, в которой в каждой строке и столбце количество плюсов больше числа минусов.

Критерии: В решении описан процесс, увеличивающий количество плюсов — не менее 5 баллов.

8 класс

8.1 Роман хочет купить футбольный клуб, яхту и небольшой особняк. Есть купить только футбольный клуб, то останется 2 миллиарда, если только яхту, то — 3 миллиарда, а если только особняк, то — 6 миллиардов. Сможет ли Роман купить клуб, яхту и особняк одновременно? Ответ обоснуйте.

Ответ: не сможет.

Решение: Пусть особняк стоит x миллиардов, тогда яхта стоит $x + 3$ миллиарда, а клуб — $x + 4$, всего же у Романа — $x + 6$ миллиардов. Сравним эту сумму с общей стоимостью клуба, яхты и особняка:

$$x + x + 3 + x + 4 > x + 6$$
$$3x + 7 > x + 6$$
$$2x + 1 > 0.$$

Итак, суммарная стоимость больше суммы, которой располагает Роман.

Критерии: Только ответ — 0 баллов.

Верно составленное неравенство — 2 балл.

8.2 Сергей расставил по кругу несколько (больше двух) попарно различных вещественных чисел так, что каждое число оказалось равно произведению своих соседей. Сколько чисел мог расставить Сергей?

Ответ: 6.

Решение: Обозначим два числа, стоящих рядом, за a и b. Тогда рядом с ними стоит b/a, дальше $1/a$, $1/b$, a/b и снова a. Таким образом, больше 6 чисел расставить нельзя.

Если можно расставить 3 числа, то $a = 1/a$, значит, a равно 1 или -1. В первом случае b и b/a совпадают. Во втором случае получаем тройку: -1, b, $-b$, в которой $-1 = b * (-b)$, значит это тройка -1, 1, -1.

Если можно расставить 4 числа, то $a = 1/b$, получается четверка чисел a, $1/a$, $1/a^2$, $1/a$. Есть повторяющиеся числа.

Если можно расставить 5 чисел, то $a = a/b$, то есть $b = 1$. Получается пятерка чисел a, 1, $1/a$, $1/a$, 1. Есть повторяющиеся числа.

И наконец, 6 чисел расставить можно: 2, 3, 3/2, 1/2, 1/3, 2/3.

Критерии: Доказано, что чисел не больше 6 — 3 балла.

За рассмотрение каждого из случаев — по одному баллу.

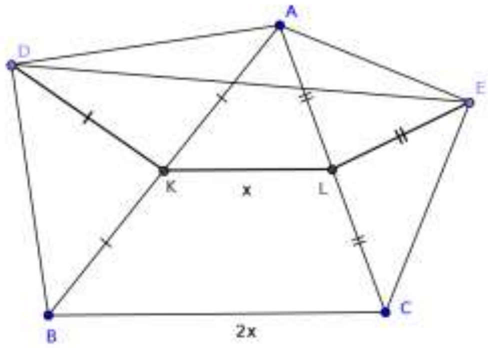
8.3 Имеется двадцать одинаковых на вид монет, одна из них весит 9,9 г, две другие — по 9,8 г, а все оставшиеся — по 10 г. Можно ли за два взвешивания на чашечных весах без гирь выявить хотя бы одну десятиграммовую монету?

Ответ: можно.
Решение: Обозначим монеты числами от 1 до 20. Взвесим монеты 1, 2 с монетами 3 и 4. Среди этих четырех монет есть хотя бы одна настоящая.

В случае равенства, на каждой чаше либо две настоящих монеты, либо по одной настоящей и по одной в 9,8 г. Эти случаи разделим вторым взвешиванием: взвесим 1 и 2 монету.

Если при первом взвешивании одна из чаш перевесила, то в более тяжелой чаше есть настоящая монета. Взвесим между собой две монеты с более тяжелой чаши. В случае равенства — обе настоящие, в случае неравенства — выберем более тяжелую монету.
Критерии: Неверный алгоритм или упущение более одного случая — 0 баллов.
Упущен один случай — не более 3 баллов.
Только алгоритм взвешивания без обоснования — не менее 5 баллов.

8.4 Даны треугольник ABC и такие точки D и E, что углы ADB и CEB прямые. Докажите, что длина отрезка DE не больше полупериметра треугольника ABC.
Решение: Отметим середины AB и BC — точки K и L. Заметим, что треугольники ADB и CEB прямоугольные, значит, медианы в них равны половине гипотенузы: $DK = AB/2$, $EL = CB/2$. Кроме того, $KL = AC/2$ как средняя линия. Отсюда получаем, что $DE \leq DK + KL + LE = AB/2 + AC/2 + CB/2 = P_{ABC}/2$.



Критерии: выполнено верное доп. построение — не менее 2 баллов.
В решении существенно используется расположение точек D и E — снять 2 балла.

8.5 Миссис Хадсон и Доктор Ватсон загадали по натуральному числу. Каждый из них посчитал сумму всех делителей своего числа (включая 1 и само число) и сумму чисел, обратных к делителям. Когда Шерлок Холмс узнал, что и первые, и вторые суммы его друзей совпали, он сразу догадался, что миссис Хадсон и доктор Ватсон загадали одно и то же число. Докажите, что Шерлок Холмс прав.
Решение: Пусть миссис Хадсон загадала число n. Докажем, что первая сумма миссис Хадсон в n раз больше второй. Пусть a — делитель n, который входит в первую сумму. Тогда во вторую сумму входит слагаемое $1 / a$ соответственною После увеличения второй суммы в n раз, то слагаемое $1 / a$ станет равно n / a. С другой стороны, n / a — это тоже некоторый делитель числа n. Значит, после увеличения в n раз, вторая сумма тоже будет представлять из себя сумму делителей числа (но в другом порядке). Несложно убедится в том, что в увеличенной сумме каждый делитель также встречается ровно один раз. Значит изначальные сумму отличались ровно в n раз. Утверждение доказано.

Как было доказано, число, загаданное каждым из персонажей, равно частному его первой суммы на вторую. Т.к. суммы у них совпадают, то совпадают и загаданные числа.
Критерии: условие переписано в алгебраическом виде — 0 баллов.
Недоказанное утверждение о том, что первая сумма отличается от второй ровно в n раз — 3 балла.
Верное решение, но не доказано взаимно-однозначное соответствие слагаемых первой суммы и второй — снять 1 балл.