

Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г.г. по математике
Второй этап
7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Разрежьте фигуру на рисунке на четыре равные части так, чтобы в каждой части была ровно одна звёздочка.

	*		
	*		*
	*		

7.2. Найдите значение выражения $(1+1/2)(1+1/3)...(1+1/2012)$.

7.3. На контрольной работе по математике каждый из 25 учеников мог получить одну из четырёх оценок: 2, 3, 4 или 5. Оказалось, получивших четвёрки на 4 больше тех, кто получил тройки. Сколько человек получили двойки, если известно, что сумма всех оценок за эту контрольную равна 121?

7.4. Найдите наименьшее натуральное число, оканчивающееся цифрой 4, которое увеличивается в 4 раза при перенесении его последней цифры в начало числа.

7.5. У 10 девочек было по 10 конвертов. Каждая девочка подписала и отправила несколько конвертов другим девочкам (конверт нельзя подписать дважды). В результате у всех девочек оказалось разное число конвертов. Докажите, что у какой-то девочки общее число конвертов в итоге оказалось больше, чем число конвертов, которые она отправила.

Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г.г. по математике
Второй этап
8 класс

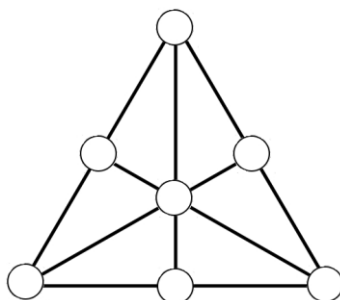
Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Разрежьте фигуру на рисунке на четыре равные части так, чтобы в каждой части была ровно одна звёздочка.

	*		
	*		*
	*		

8.2. Кот Бегемот начинает есть мороженое, а через минуту такое же мороженое начинает есть девочка Рита. Ещё через две минуты девочка Рита съела столько, сколько осталось съесть коту Бегемоту. Смогли бы они вдвоём съесть такое мороженое за три минуты?

8.3. Можно ли расставить числа 1, 2, ..., 7 на картинке снизу так, чтобы суммы чисел на каждой стороне и каждой медиане были одинаковы?



8.4. P и Q – середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$ соответственно. Оказалось, что $AB = BC$, а точка P лежит на биссектрисе угла B . Докажите, что $BD = 2PQ$.

8.5. Найдите все целые числа x и y для которых верно $x^2 + xy - y = 2$. Ответ обоснуйте.

Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г.г. по математике
Второй этап
9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Какие натуральные числа можно представить в виде дроби $\frac{x^2}{y^3}$, где x и y - некоторые натуральные числа?

9.2. Решить систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 = 4y^2 + 19, \\ xy + 2y^2 = 18. \end{cases}$$

9.3. В треугольнике ABC величина угла A равна 30 градусов, а длина медианы, проведённой из вершины B , равна длине высоты, проведённой из вершины C . Найти величины углов B и C .

9.4. Доказать, что из любых 18 последовательных трёхзначных чисел всегда можно выбрать число, делящееся нацело на сумму своих цифр. Привести пример 17 последовательных трёхзначных чисел, ни одно из которых не делится на сумму своих цифр.

9.5. По кругу выписаны 100 чисел с суммой 100. Сумма любых 6 идущих подряд чисел не превосходит 6. Одно из записанных чисел равно 6. Найдите остальные числа.

Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г.г. по математике
Второй этап
10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Какие натуральные числа можно представить в виде дроби $\frac{x^3}{y^4}$, где x и y - некоторые натуральные числа?

10.2. В треугольнике ABC величина угла A равна 30 градусов, а длина медианы, проведённой из вершины B , равна длине высоты, проведённой из вершины C . Найти величины углов B и C .

10.3. Найти наименьшее натуральное число, делящееся на 99 , все цифры которого чётны.

10.4. В четырёх клетках квадрата 5 на 5 записаны 4 числа, как показано на рисунке. Расставить в свободных клетках квадрата ещё двадцать одно число так, чтобы пять чисел каждой строки и пять чисел каждого столбца были последовательными членами соответствующих арифметических прогрессий.

	74			
				166
		103		
0				

10.5. Действительные числа x и y удовлетворяют неравенствам $|x + y| \leq 1, |xy + x + y| \leq 1$. Найти максимальное значение x .

Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г.г. по математике
Второй этап
11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Какие натуральные числа можно представить в виде дроби $\frac{x^3}{y^4}$, где x и y - некоторые натуральные числа?

11.2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC угол между биссектрисой и высотой, проведёнными из вершины A , равен 60 градусов. Найти углы треугольника ABC .

11.3. Найти все решения уравнения: $\frac{1}{[x]} + \frac{1}{[2x]} = \{x\} + \frac{1}{3}$ в действительных числах. Здесь $[x]$ - целая часть x - обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x , а $\{x\}$ - дробная часть x - равна $x - [x]$. Например, $[\sqrt{2}] = 1, \left[-\frac{1}{2}\right] = -1, \{\sqrt{10}\} = \sqrt{10} - 3$.

11.4. Известно, что длины сторон треугольника - последовательные натуральные числа, а радиус его вписанной окружности равен 4 . Найти радиус описанной окружности этого треугольника.

11.5. Найти все решения уравнения $(1 + \frac{1}{a})(1 + \frac{1}{b})(1 + \frac{1}{c}) = 3$ в целых числах.