

Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г.г. по математике
Первый этап
7 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

- 7.1.** Килограмм мяса с костями стоит 165 рублей, килограмм мяса без костей стоит 240 рублей, а килограмм костей стоит 40 рублей. Сколько граммов костей в килограмме мяса с костями?
- 7.2.** В семье трое братьев. Известно, что Коля родился на следующий год после того года, когда до рождения младшего из братьев оставалось 5 лет, а Ваня родился на два года раньше, чем среднему исполнилось 3 года. Сейчас Пете 10 лет. Сколько лет Ване и Коле?
- 7.3.** На клетчатой доске размера 5 на 5 отмечено несколько клеток так, что каждый квадрат 3 на 3 клетки содержит ровно одну отмеченную клетку. Какое количество клеток может быть отмечено? Привести все возможные ответы.
- 7.4.** От шоссе к четырем поселкам А,В,С,Д последовательно отходят четыре дороги. Известно, что путь по дороге/шоссе/дороге от А до В равен 9 км, от А до С — 13 км, от В до С — 8 км, от В до D — 14 км. Найдите длину пути по дороге/шоссе/дороге от А до D. Ответ объясните.
- 7.5.** Какой может быть сумма цифр натурального числа, делящегося на 7?

Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г.г. по математике
Первый этап
8 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

- 8.1.** Найти все трёхзначные числа, делящиеся на 4, в которых отношение первой цифры ко второй равно отношению второй цифры к третьей.
- 8.2.** Из двух городов, расстояние между которыми 105 км, вышли одновременно навстречу друг другу с постоянными скоростями два пешехода и встретились через 7,5 часов. Определить скорость каждого из них, зная, что, если бы первый шёл в 1,5 раза скорее, а второй в 2 раза медленнее, то они бы встретились через $8\frac{1}{13}$ часа.
- 8.3.** Какой может быть сумма цифр натурального числа, делящегося на 7?
- 8.4.** На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно такие, что $\angle ACB = 2\angle BED$. Доказать, что $AC + EC > AD$.
- 8.5.** На клеточной доске размера 10 на 10 отмечены некоторые 10 клеток. При каком наибольшем n независимо от того, какие клетки отмечены, всегда можно найти прямоугольник из нескольких клеток, периметр которого будет не меньше n ? Длина или ширина прямоугольника может равняться одной клетке.

Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г.г. по математике
Первый этап
9 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Из двух городов, расстояние между которыми 105 км, вышли одновременно навстречу друг другу с постоянными скоростями два пешехода и встретились через 7,5 часов. Определить скорость каждого из них зная, что, если бы первый шёл в 1,5 раза скорее, а второй в 2 раза медленнее, то они бы встретились через $8\frac{1}{13}$ часа.

9.2. На доске записаны несколько последовательных натуральных чисел. Известно, что 48% из них чётны, а 36% из них меньше 30. Найти наименьшее из выписанных чисел.

9.3. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно такие, что $\angle ACB = 2\angle BED$. Доказать, что $AC + EC > AD$.

9.4. Назовём натуральное число *подходящим*, если оно минимальное среди всех натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Найти все подходящие числа, являющиеся точными квадратами натуральных чисел.

9.5. На клетчатой доске размера 10 на 10 отмечено несколько клеток так, что каждый квадрат 3 на 3 клетки содержит ровно одну отмеченную клетку. Какое количество клеток может быть отмечено?

Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г. по математике
Первый этап
10 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. В воду два раза добавляли соль, причём так, что прирост массы раствора в процентах во второй раз был таким же, как и в первый раз. Какова была начальная масса воды и каков был прирост массы раствора каждый раз, если конечная масса раствора была равна 850 г, а конечная концентрация составила 36%?

10.2. Доказать, что для любого $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ выполнено неравенство: $1 + \operatorname{tg} x < \frac{1}{1 - \sin x}$.

10.3. Найти все точки плоскости, координаты x, y которых удовлетворяют уравнению:
 $\max \{ |x + y|, |x - y| \} = 1$.

10.4. На прямой l отмечены две различные точки A и B . Рассматриваются всевозможные пары окружностей, касающихся друг друга и прямой l в точках A и B соответственно. Для каждой пары через M обозначим середину отрезка внешней касательной к этим окружностям, не лежащей на l . Найти геометрическое место точек M .

10.5. По кругу в некотором порядке записаны все натуральные числа от 1 до 100. Для каждой пары соседних чисел подсчитана сумма. Из ста полученных чисел какое максимальное количество может делиться на 7?

Всесибирская олимпиада школьников 2012-2013 г. по математике
Первый этап
11 класс

Время выполнения задания 4 астрономических часа

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Добытая руда содержит 21% меди, обогащённая - 45% меди. Известно, что в процессе обогащения 60% добытой руды идёт в отходы. Определить процентное содержание меди в отходах.

11.2. Сколько решений имеет система уравнений
$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ (x - a)^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$
 в зависимости от

параметра a ?

11.3. Доказать, что для всех действительных x выполнено неравенство $x^4 + 3x^2 + 2x + 2 > 0$.

11.4. Внутри прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4 и 5 см расположены две окружности, отношение радиусов которых равно 9 к 4. Окружности касаются друг друга внешним образом, обе касаются гипотенузы, одна – одного катета, другая – другого. Найти радиусы окружностей.

11.5. Найти количество различных расстановок в ряд всех натуральных чисел от 1 до 10 таких, что сумма любых трёх подряд идущих чисел делится на 3.