Решения задач первого этапа Всесибирской олимпиады школьников 2012-2013 г. по математике
7 класс

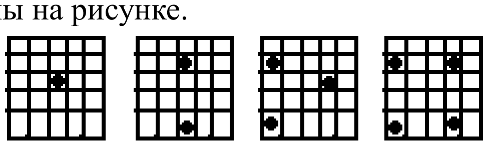
7.1. Килограмм мяса с костями стоит 165 рублей, килограмм мяса без костей стоит 240 рублей, а килограмм костей стоит 40 рублей. Сколько граммов костей в килограмме мяса с костями?
Ответ. 375 граммов.
Решение. Пусть в килограмме мяса с костями x кило костей. Тогда $40x+240(1-x)=165$, откуда $x=0{,}375$.

7.2. В семье трое братьев. Известно, что Коля родился на следующий год после того года, когда до рождения младшего из братьев оставалось 5 лет, а Ваня родился на два года раньше, чем среднему исполнилось 3 года. Сейчас Пете 10 лет. Сколько лет Ване и Коле?
Ответ. Ване сейчас 9 лет, а Коле – 13 лет.
Решение. Из второго условия про Ваню следует, что он младше среднего брата на 1 год, поэтому Ваня – младший. Коля же старше младшего на 4 года, поэтому он старший. Значит, Петя – средний, тогда Ване сейчас 9 лет, а Коле – 13 лет.

7.3. От шоссе к четырем поселкам A,B,C,D последовательно отходят четыре дороги. Известно, что путь по дороге/шоссе/дороге от A до B равен 9 км, от A до C — 13 км, от B до C — 8 км, от B до D — 14 км. Найдите длину пути по дороге/шоссе/дороге от A до D. Ответ объясните.
Ответ: 19 км.
Решение. Сложим пути от *A* до *C* и от *B* до *D*. Тогда участок шоссе от поворота на *B* до поворота на *C* будет сосчитан дважды, а участки шоссе от поворота на *A* до поворота на *B* и от поворота на *C* до поворота на *D*, а также все четыре дороги от шоссе до посёлков — по одному разу. Поэтому, если мы теперь вычтем из получившейся суммы путь из *B* в *C*, в полученной разности будут учтены по одному разу все три отрезка шоссе и подъездные дороги до *A* и *D*, то есть как раз то, что составляет путь из *A* в *D*. Стало быть, длина этого пути равна 13+14–8 = 19 км.

7.4. Какой может быть сумма цифр числа, делящегося на 7?
Ответ. Любое натуральное число, больше, либо равное 2.
Решение. Заметим, что числа 21 и 1001 делятся на 7, суммы их цифр равны 3 и 2 соответственно. Значит, чтобы получить сумму цифр, равную чётному числу n, нужно взять число, десятичная запись которого состоит из $\frac{n}{2}$ групп цифр 1001. Соответственно, чтобы получить сумму цифр, равную нечётному числу $2n+1$, нужно взять число, десятичная запись которого состоит из $\frac{n}{2}-1$ групп цифр 1001 и одной группы цифр 21. Сумма же цифр, равная 1, получиться не может, потому что степени десятки на 7 не делятся.

7.5. На клетчатой доске размера 5 на 5 отмечено несколько клеток так, что каждый квадрат 3 на 3 клетки содержит ровно одну отмеченную клетку. Какое количество клеток может быть отмечено?
Ответ. Любое от 1 до 4.
Решение. Ясно, что хоть одна клетка быть должна. С другой стороны, четыре угловых квадрата 3 на 3 полностью покрывают квадрат 5 на 5, и каждый из них содержит ровно 1 отмеченную клетку, следовательно, всего отмеченных клеток не более 4. Примеры для количеств от 1 до 4 приведены на рисунке.



8 класс

8.1. Найти все трёхзначные числа, делящиеся на 4, в которых отношение первой цифры ко второй равно отношению второй цифры к третьей.
Ответ. 124, 248, 444, 888, 964**.**
Решение. Пусть искомое число $n=\overline{abc}$. Из условия следует, что квадрат средней цифры равен произведению крайних, и последняя цифра чётная. Отсюда сразу следует, что и средняя цифра чётная. Переберём возможные средние цифры и найдём все разложения их квадратов в подходящие произведения $b^2=a\cdot c$, сомножители которых не превосходят 9.
1) $b=2, b^2=4=1\cdot 4=2\cdot 2=4\cdot 1$. Первое разложение даёт подходящее число 124, второе и третье на 4 не делятся.
2) $b=4, b^2=16=2\cdot 8=4\cdot 4=8\cdot 2$. Первые два разложения дают подходящие числа 248 и 444, последнее не делится на 4.
3) $b=6, b^2=36=4\cdot 9=6\cdot 6=9\cdot 4$. Третье разложение даёт подходящие числа 964, первое и второе не делятся на 4.
4) $b=8, b^2=64=8\cdot 8$, получаем подходящее число 888.

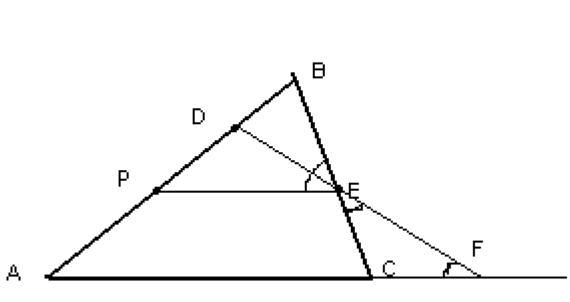
8.2. Из двух городов, расстояние между которыми 105 км, вышли одновременно навстречу друг другу с постоянными скоростями два пешехода и встретились через 7,5 часов. Определить скорость каждого из них, зная, что, если бы первый шёл в 1,5 раза быстрее, а второй в 2 раза медленнее, то они бы встретились через $8\frac{1}{13}$ часа.

Ответ. 6 и 8 км в час.

Решение. Обозначим скорости их за x и y км в час соответственно. Из условия получаем: $\frac{15}{2}(x+y)=105, \frac{105}{13}\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y\right)=105$, откуда $x=6, y=8$.

8.3. Какой может быть сумма цифр числа, делящегося на 7?
Ответ. Любое натуральное число, больше либо равное 2.
Решение. Заметим, что числа 21 и 1001 делятся на 7, суммы их цифр равны 3 и 2 соответственно. Значит, чтобы получить сумму цифр, равную чётному числу n, нужно взять число, десятичная запись которого состоит из $\frac{n}{2}$ групп цифр 1001. Соответственно, чтобы получить сумму цифр, равную нечётному числу $2n+1$, нужно взять число, десятичная запись которого состоит из $\frac{n}{2}-1$ групп цифр 1001 и одной группы цифр 21. Сумма же цифр, равная 1, получиться не может, потому что степени десятки на 7 не делятся.

8.4. На сторонах *AB* и *BC* треугольника *ABC* отмечены точки *D* и *E* соответственно такие, что $\angle ACB = 2\angle BED$. Доказать, что $AC+EC>AD$.



Доказательство. Продолжим DE до пересечения с продолжением стороны AC, и PE параллельно стороне AC . Тогда угол CFE равен углу PED, а PED равен углу BED по условию. Следовательно, угол CFE равен углу FEC и CE = CF, AC+CE=AF. В треугольнике DEP угол PDE больше угла DEP, потому, что он равен сумме BED=DEP и EBD, как внешний угол в треугольнике BDE. Следовательно, и угол ADF больше угла AFD, значит отрезок AF, лежащий против большего угла ADF, больше отрезка AD, лежащего против меньшего угла AFD.

8.5. На клеточной доске размера 10 на 10 отмечены некоторые 10 клеток. При каком наибольшем n независимо от того, какие клетки отмечены, всегда можно найти прямоугольник из нескольких клеток, периметр которого будет не меньше n ? Длина или ширина прямоугольника может равняться одной клетке.
Ответ. n = 20.
Решение. Сначала докажем, что при n = 20 найти такой прямоугольник всегда возможно. Пусть закрашено 10 клеток. Если есть столбец или строка без закрашенных клеток, то из неё можно вырезать прямоугольник 1×9 периметра 20 (даже 1 на 10 периметра 22). Пусть теперь в каждом столбце и в каждой строке есть закрашенная клетка. Если в верхней строке закрашенная клетка стоит в столбце под номером *k,* то из этого столбца можно снизу вырезать прямоугольник 1×9 периметра 20.
При n=22 требуемое получится не всегда. Для этого закрасим клеточки по диагонали. При этом прямоугольник можно вырезать только из нижней (или только из верхней части), но тогда сумма длины и ширины не может превышать 10, а весь периметр – 20.

9 класс

9.1. Из двух городов, расстояние между которыми 105 км, вышли одновременно навстречу друг другу с постоянными скоростями два пешехода и встретились через 7,5 часов. Определить скорость каждого из них, зная, что, если бы первый шёл в 1,5 раза скорее, а второй в 2 раза медленнее, то они бы встретились через $8\frac{1}{13}$ часа.

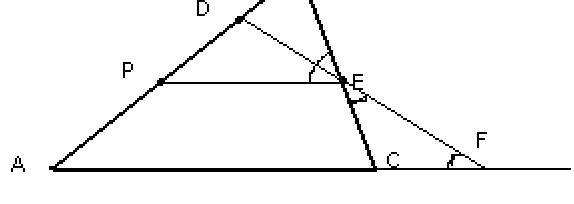
Ответ. 6 и 8 км в час.

Решение. Обозначим скорости их за x и y км в час соответственно. Из условия получаем: $\frac{15}{2}(x+y)=105, \frac{105}{13}\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}y\right)=105$, откуда $x=6, y=8$.

9.2. На доске записаны несколько последовательных натуральных чисел. Известно, что 48% из них чётны, а 36% из них меньше 30. Найти наименьшее из выписанных чисел.
Ответ. 21.

Решение. $\frac{48}{100}=\frac{12}{25}, \frac{36}{100}=\frac{9}{25}$ - несократимые дроби**,** поэтому общее количество чисел делится на 25. Если бы их было 50 или более, то, по условию, чётных было бы минимум на 2 меньше, чем нечётных, что невозможно для идущих подряд натуральных чисел. Следовательно, их 25, и ровно 9 из них меньше 30. Значит, первое из них равно 21.

9.3. На сторонах *AB* и *BC* треугольника *ABC* отмечены точки *D* и *E* соответственно такие, что $\angle ACB=2\angle BED$. Доказать, что $AC+EC>AD$.



Доказательство. Продолжим DE до пересечения с продолжением стороны AC, и PE параллельно стороне AC . Тогда угол CFE равен углу PED, а PED равен углу BED по условию. Следовательно, угол CFE равен углу FEC и CE = CF, AC+CE=AF. В треугольнике DEP угол PDE больше угла DEP, потому, что он равен сумме BED=DEP и EBD, как внешний угол в треугольнике BDE. Следовательно, и угол ADF больше угла AFD, значит отрезок AF, лежащий против большего угла ADF, больше отрезка AD, лежащего против меньшего угла AFD.

9.4. Назовём натуральное число *подходящим*, если оно минимальное среди всех натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Найти все подходящие числа, являющиеся точными квадратами натуральных чисел.
Ответ. 1, 4, 9, 49.

Решение. В любом подходящем числе все цифры, кроме первой, равны 9. В противном случае, перекинув единицу из старшего разряда в тот, где не 9, получим меньшее число с той же суммой цифр (возможно, с меньшим числом цифр). Все однозначные числа подходящие, поэтому 1,4,9 удовлетворяют условию. Далее, если квадрат числа оканчивается на 9, то само оно оканчивается на 3, или на 7. Если предпоследняя цифра числа равна a, то предпоследняя цифра квадрата будет $6a$ или $4a+4$ - чётной. Следовательно, само число будет двузначным. Из них подходит только 49.

9.5. На клетчатой доске размера 10 на 10 отмечено несколько клеток так, что каждый квадрат 3 на 3 клетки содержит ровно одну отмеченную клетку. Какое количество клеток может быть отмечено?

Ответ. Любое от 9 до 16.

Решение. Разобьём доску 3-ей, 6-ой и 9-ой горизонтальными линиями и 3-ей, 6-ой и 9-ой вертикальными линиями на девять квадратов 3 на 3 слева снизу, три вертикальных полоски 1 на 3 в крайнем правом столбце, три горизонтальных полоски в верхней строке и верхнюю правую угловую клетку. В каждом из квадратов 3 на 3 должна быть одна отмеченная клетка, поэтому всего их не меньше 9. С другой стороны, каждый из 16 элементов разбиения может быть накрыт одним квадратом 3 на 3, поэтому не может содержать больше одной отмеченной клетки, следовательно, их не больше 16.

Построим примеры для каждого количества клеток. Выделим 3-ий, 6-ой и 9-ый столбики. Каждый квадрат 3 на 3 на доске пересекается ровно с одним из выделенных столбиков по полоске 3 на 1 клетку. Следовательно, если отметить в этих столбиках каждую третью, начиная с некоторой, клетку, получим искомый пример. Если начинать с первой, в столбике будет четыре отмеченных клетки, если со второй или третьей — то по три. Варьируя выбор в столбиках, получим все количества отмеченных клеток от 9 до 12. Теперь выберем 1-ый, 4-ый, 7-ой и 10-ый столбики и сделаем в них то же самое. Получим все количества выбранных клеток от 12 до 16.

10 класс

10.1. В воду два раза добавляли соль, причём так, что прирост массы раствора в процентах во второй раз был таким же, как и в первый раз. Какова была начальная масса воды и каков был прирост массы раствора каждый раз, если конечная масса раствора была равна 850 г, а конечная концентрация составила 36%?
Ответ. Начальная масса воды 544 г, прирост массы каждый раз 25%.
Решение. Обозначим начальную массу воды за x г, а прирост массы раствора за один раз — за p %. После второго раза масса будет $\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 x$, а масса соли в нём $\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^2-1\right)x$.

Тогда $\left(\left(1+\frac{p}{100}\right)^2-1\right)x=\frac{36}{100}\left(1+\frac{p}{100}\right)^2 x$, откуда $p=25$. Следовательно, $\frac{25}{16}x=850,\ x=544$.

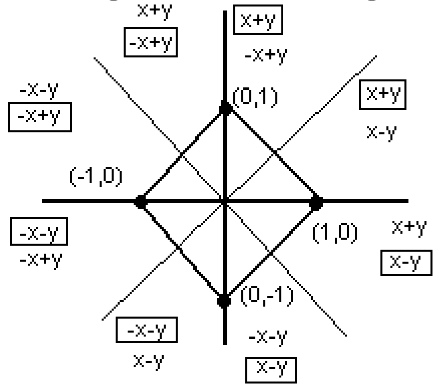
10.2. Доказать, что для любого $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ выполнено неравенство: $1+tgx<\frac{1}{1-\sin x}$.

Решение. Все выражения положительны, избавляемся от знаменателей, приводим подобные и делим на $\sin(x)$, приходим к эквивалентному выражению $1<\sin(x)+\cos(x)$. Правая часть положительна, возведя в квадрат, получим эквивалентное неравенство: $1<(\sin(x)+\cos(x))^2=1+2\sin(x)\cos(x)$, очевидно верное на промежутке $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

10.3. Найти все точки плоскости, координаты (x,y) которых удовлетворяют уравнению: $\max\{|x+y|,|x-y|\}=1$.

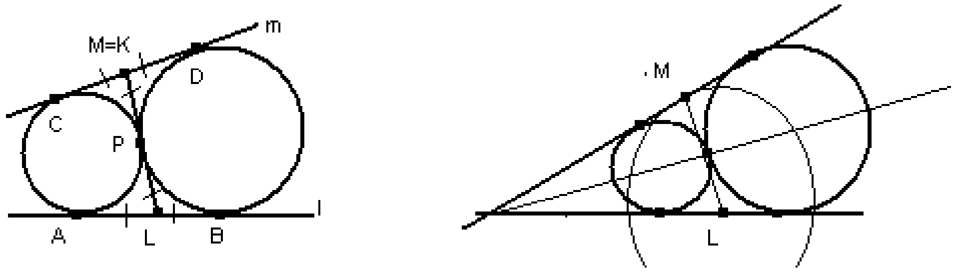
Ответ. Ромб с вершинами $((-1,0),(1,0),(0,-1),(0,1),)$.

Решение. Раскроем модули выражений, на рисунке всюду верхним указан $|x+y|$, нижним — модуль $|x-y|$, максимальное из выражений обведено рамкой:



10.4. На прямой l отмечены две различные точки A и B. Рассматриваются всевозможные пары окружностей, касающихся друг друга и прямой l в точках A и B. Для каждой пары через M обозначим середину отрезка внешней касательной к этим окружностям, не лежащей на l. Найти геометрическое место точек M.

Ответ. Окружность с центром в середине AB и радиусом, равным AB, исключая точки, лежащие на l.



Решение. Внешние касательные AB и CD равны в силу осевой симметрии относительно линии, проходящей через центры окружностей. Проведём через точку касания окружностей P их общую внутреннюю касательную LK . Тогда $AL=PL=BL=\frac{AB}{2}$ и $CK=PK=DK=\frac{CD}{2}=\frac{AB}{2}$, как отрезки касательных, проведённых из одной точки. Следовательно, K совпадает с M и $LM=2\cdot PL=AB$. Учитывая, что окружности могут располагаться с обеих сторон от прямой l, получим множество из ответа.

Покажем, что каждая точка M этого множества действительно подходит в ответ. Пусть, как и раньше L - середина отрезка AB. Точка M не лежит на l, построим серединный перпендикуляр к отрезку LM и отразим прямую l относительно него (см. рисунок). Впишем в получившиеся треугольник и угол окружности, они касаются LM в середине, значит, касаются друг друга. С другой стороны, $LM=AB$ по построению, поэтому окружности коснутся прямой l на расстоянии $\frac{LM}{2}=\frac{AB}{2}$ от L , то есть, в точках A и B. Следовательно, это требуемая в условии пара окружностей и точка M принадлежит ответу.

10.5. По кругу в некотором порядке записаны все натуральные числа от 1 до 100. Для каждой пары соседних чисел подсчитана сумма. Из ста полученных чисел какое максимальное количество может делиться на 7?

Ответ. 96.

Решение. Для того, чтобы сумма пары соседних чисел делилась на 7, нужно, чтобы их остатки от деления на 7 в сумме давали 7: 0+0, 1+6, 2+5 и 3+4. Назовём такие пары остатков *подходящими парами*. Чисел от 1 до 100 с остатками 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно 14, 15, 15,14,14,14,14 штук. Последовательность чисел с чередующимися подходящими парными остатками назовём *правильной серией*. Если подряд идёт, чередуясь, правильная серия из x чисел, она даст $x-1$ сумму, делящуюся на 7. Если таких серий n, они дадут $15+14-n=29-n$ или $14+14-n=28-n$ таких сумм. Аналогично рассуждаем для других групп остатков, видим, что общее число сумм, делящихся на 7, равно 100 минус количество правильных серий, на которые разбиты все числа от 1 до 100. Для каждой пары подходящих остатков не менее одной правильной серии, поэтому общее число сумм, делящихся на 7, не превосходит 100 - 4 =96.

Пример для 96 строится несложно: сначала идут подряд все числа, делящиеся на 7, затем, чередуясь, числа, с остатками 1 и 6, после этого, чередуясь, с остатками 2 и 5, и, наконец, чередуясь, все числа с остатками 3 и 4. Поскольку количества чисел в группах с разными остатками различаются не более, чем на 1, это сделать можно.

11 класс

11.1. Добытая руда содержит 21% меди, обогащённая - 45% меди. Известно, что в процессе обогащения 60% добытой руды идёт в отходы. Определить процентное содержание руды в отходах.

Ответ. 5%.

Решение. В добытых 100 кг руды содержится 21 кг меди. Из этих 100 кг обогащённой руды получится 40 кг, в ней будет содержаться 18 кг меди. Следовательно, ушедшие в отвал 60 кг отходов содержат 3 кг меди, то есть 5%.

11.2. Сколько решений имеет система уравнений $\begin{cases} x^2-y^2=0, \\ (x-a)^2+y^2=1. \end{cases}$ в зависимости от параметра a ?

Ответ. а) при $(a)>\sqrt{2}$ - 0 штук, б) при $(a)=\sqrt{2}$ - 2 штуки, в) при $1<(a)<\sqrt{2}$ - 4 штуки, г) при $(a)=1$ - 3 штуки, д) при $(a)<1$ - 6 штук..

Решение. Воспользуемся графическим методом. Первое уравнение системы задаёт на координатной плоскости две прямые $x=\pm y$ - биссектрисы координатных углов. Второе уравнение системы задаёт окружность единичного радиуса с центром $O(a,0)$ на оси абсцисс. Число решений зависит от количества точек пересечения и касания этих двух прямых и окружности. Несложно найти, что их будет:

а) при $(a)>\sqrt{2}$ - 0 штук, б) при $(a)=\sqrt{2}$ - 2 штуки, в) при $1<(a)<\sqrt{2}$ ∨¿ - 4 штуки, г) при $(a)=1$ - 3 штуки, д) при $(a)<1$ - 6 штук.

11.3. Доказать, что для всех действительных x выполнено неравенство $x^4+3x^2+2x+2>0$.

Решение. Достаточно заметить, что: $x^4+3x^2+2x+2=(x^2+1)^2+(x+1)^2>0$.

11.4. Внутри прямоугольного треугольника со сторонами 3, 4 и 5 см расположены две окружности, отношение радиусов которых равно 9 к 4. Окружности касаются друг друга внешним образом, обе касаются гипотенузы, одна – одного катета, другая – другого. Найти радиусы окружностей.

Ответ. $\frac{20}{47}$ см и $\frac{45}{47}$ см.

Решение. Пусть радиусы окружностей равны $4x$ и $9x$ соответственно и касаются катетов они так, как показано на рисунке 2. Выразим через x расстояние y между точками касания окружностей с гипотенузой треугольника (см рис.1).

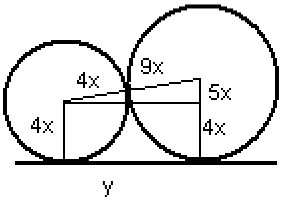


Рисунок 1

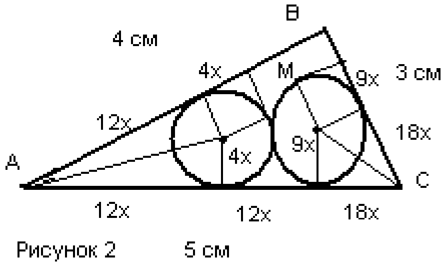


Рисунок 2

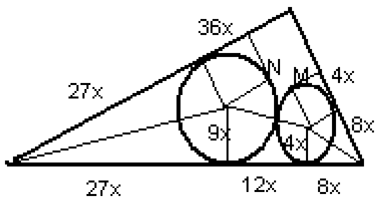


Рисунок 3

По теореме Пифагора, $(9x+4x)^2=(9x-4x)^2+y^2$, откуда $y=12x$. По формуле тангенса двойного угла найдём тангенсы половин углов A и C: $\tan\left(\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{3}, \tan\left(\frac{C}{2}\right)=\frac{1}{2}$, выразим через x длину гипотенузы AC: $AC=42x$. Следовательно, $x=\frac{5}{42}$. Но в таком случае, правая окружность выйдет за край треугольника, поскольку проекция точки M на сторону BC отстоит от C на $\frac{5\cdot 27}{42}=\frac{135}{42}>3$ см. Этот вариант расположения окружностей нам не подходит. Аналогичное рассмотрение второго варианта, когда окружности меняются местами (см. рисунок 3), даёт $x=\frac{5}{47}$ см. Поскольку $\frac{5\cdot 36}{47}=180\cdot 47<4$ и $\frac{5\cdot 12}{47}=60\cdot 47<3$, то окружности в этом случае не выходят за пределы треугольника.

11.5. Найти количество различных расстановок в ряд всех натуральных чисел от 1 до 10 таких, что сумма любых трёх подряд идущих чисел делится на 3.

Ответ. $4!\cdot 2\cdot 3!\cdot 3!=1728$.

Решение. Из условия следует, что остатки от деления на 3 чисел, стоящих через 2, равны. Следовательно, равные остатки от деления на 3 имеют числа, стоящие на 1,4,7 и 10 местах, а также стоящие на 2, 5 и 8 местах, и на 3,6 и 9 местах. Среди чисел от 1 до 10 четыре одинаковых остатка 1 дают только 1,4,7 и 10, следовательно, на местах 1,4,7,10 стоит любая перестановка этих чисел, всего 4! вариантов. Аналогично, на местах 2,5,8 стоит любая расстановка чисел 2,5,8, либо чисел 3,6 и 9, а на местах 3,6,9 — наоборот. Всего получаем 4!3!3!2 вариантов.