Критерии оценивания решений задач заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 201-12гг по математике

Каждая задача оценивается из 7 баллов

7 класс

7.1. Получение кучки крупы весом 4400 граммов: 2 балла.
Получение кучки крупы весом 2200 граммов: ещё 2 балла.

7.2. Полностью правильный ответ: 7 баллов.
Если хотя бы одна сумма не равна другим: 0 баллов.

7.3. Только ответ: 3 балла.
Ответ с полной проверкой: 7 баллов.

7.4. Частные случаи: 0 баллов.

7.5. Доказательство минимальности числа 9: 4 балла.
Пример с 9 квадратами с обоснованием: 3 балла.

8 класс

8.1. Правильно составлена система уравнений: 3 балла.
Правильно решена система уравнений: 4 балла.
Только ответ с проверкой: 1 балл

8.2. Только ответ: 3 балла.
Ответ с полной проверкой: 7 баллов.

8.5. Доказательство минимальности числа 9: 4 балла.
Пример с 9 квадратами с обоснованием: 3 балла.

9 класс

9.1. Правильно составлена система уравнений: 3 балла.
Правильно решена система уравнений: 4 балла.
Только ответ с проверкой: 1 балл.

9.2. Полностью правильный ответ: 7 баллов.
Если хотя бы одна сумма не равна другим: 0 баллов.

9.4. Доказательство минимальности числа 9: 4 балла.
Пример с 9 квадратами с обоснованием: 3 балла.

9.5. Если доказано, что до удаления гири суммарный вес всех гирь делится на 7^2: 2 балла.
Если после этого доказано, что вес каждой хорошей гири делится на 7^2: ещё 1 балл.

10 класс

10.1. Нулевая серия решений: 1 балл.
Каждая из остальных двух серий: 3 балла.

10.2. Ответ с полной проверкой: 7 баллов.

10.3. Верный пример: 7 баллов.
Остальное, включая доказательство невозможности: 0 баллов.

10.4. Рассмотрение частных случаев: 0 баллов.

10.5. Доказана максимальность числа 11: 4 балла.
Пример, когда сумма 11 достигается: 3 балла.
Остальное, включая доказательства и примеры других оценок: 0 баллов.

11 класс

11.1. Правильно составлена система уравнений: 3 балла.
Правильно решена система уравнений: 4 балла.
Только ответ: 0 баллов.
Ответ с полной проверкой: 1 балл.

11.2. Нахождение нескольких частных решений с проверкой: 1 балл.
Нахождение отрезка решений с проверкой: 2 балла.
Правильное построение графика левой части: 2 балла.
Включение углов треугольника в ответ: снимаем 2 балла.

11.3. Рассуждение с суммами 3,4,5,6 проведено без учёта того, что одной из этих сумм может не быть: 3 балла.
Указан диапазон значений сумм: 1 балл.
Замечено, что нет ровно одной суммы: 1 балл.
Показано, что нет суммы, равной 9: 1 балл. Для второго решения это не обязательно, и за недоказательство этого ничего не снимаем.

11.4. Верно составлено уравнение с радикалами для нахождения длины: 3 балла.
Верно составлено квадратное уравнение для нахождения длины: ещё 3 балла.

11.5. Только ответы: 0 баллов.
Каждая серия ответов с проверкой: 1 балл.
Собственно решение, то есть доказательство того, что других решений нет: 4 балла.
При этом за непояснение того, что $z > x, y$, значит $z!$ делится на $x!, y!$: снимаем 1 балл.
За неаккуратное объяснение, чему равно, например $\frac{y!}{x!}$: снимаем 1 балл.
Потеря каждой из серий решений: снимаем 2 балла

11.6. Только рассмотрение частных случаев: 0 баллов.
При проведение процесса разложения в сумму дробей требуемого типа оцениваем
а) доказательство того, что он остановится за конечное число шагов: 2 балла,
б) доказательство того, что знаменатели дробей различны: 3 балла.

Решения задач заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2011-2012 г. по математике
7 класс

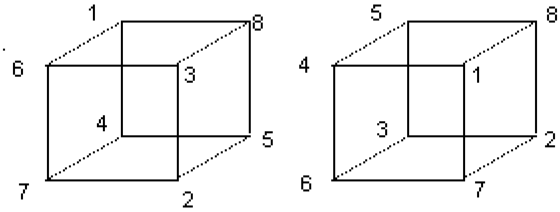
Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Имеются 9 кг крупы, чашечные весы и гиря весом 200 г. Можно ли отвесить 2 кг крупы за 3 взвешивания? Напоминаем, что чашечные весы показывают только, равны ли веса грузов на левой и правой чашках.

Решение. Первым взвешиванием положим гирю на правую чашку и насыплем всю крупу так, чтобы чашки уравновесились, справа получим 4400 граммов. Вторым взвешиванием разделим 4400 граммов крупы пополам. Третьим взвешиванием кладём гирю на правую чашку и крупой из кучки в 2200 граммов уравновешиваем её. В итоге в кучке останется ровно 2000 грамм.

7.2. Можно ли записать в каждой вершине куба одно из чисел 1, 2,…,8 так, чтобы суммы чисел в вершинах каждой грани были одинаковы?

Ответ. Да, два примера требуемого расположения приведены на рисунке:



7.3. Расположите в ряд натуральные числа от 1 до 10 в некотором порядке так, чтобы после сложения каждого числа с его порядковым номером (считая слева направо) и перемножения полученных десяти сумм, получился куб натурального числа.

Ответ. 3,2,1,4,7,6,5,10,9,8.

Решение. Мы разбиваем все числа на три тройки и одно число 4. В каждой тройке переставим числа в обратном порядке. При сложении со своим порядковым номером они дадут по три одинаковых числа на каждом месте, а 4+4=8, поэтому

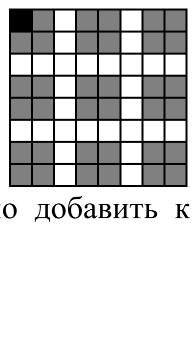
$$(1+3)(2+2)(3+1)(4+4)(5+7)(6+6)(7+5)(8+10)(9+9)(10+8)=4^3\cdot 8\cdot 12^3\cdot 18^3=$$
$$=(4\cdot 2\cdot 12\cdot 18)^3.$$

7.4. Пусть $a<b<c<d$ – натуральные числа. Доказать, что наименьшее общее кратное этих чисел не меньше, чем $4a$. Напоминаем, что наименьшим общим кратным нескольких натуральных чисел называется наименьшее натуральное число, делящееся нацело на каждое из этих чисел.

Решение. Обозначим наименьшее общее кратное этих чисел за A. Если $A<4a$, то 4 различных натуральных чисел $\frac{A}{d}<\frac{A}{c}<\frac{A}{b}<\frac{A}{a}$ будут меньше 4 – противоречие.

7.5. Найти наименьшее N такое, что на доске 8 на 8 можно расположить N квадратов 2 на 2 клетки так, чтобы больше нельзя было добавить ни одного такого же квадрата, чтобы он не пересекался ни с одним из уже положенных. Стороны квадратов 2 на 2 должны идти по линиям доски, квадраты считаются пересекающимися, если они покрывают хотя бы одну общую клетку.

Ответ. $N=9$.



Решение. Если расположить 9 квадратов 2 на 2 так, как показано на рисунке, то ни одного нового добавить будет уже нельзя. С другой стороны, заметим, что любой квадрат 2 на 2 на доске перекрывается ровно с одним из показанных на рисунке квадратов, поэтому, если на доске уложено не более 8 квадратов 2 на 2, то один из отмеченных на рисунке квадратов не перекрывается ни одним из них. Следовательно, его можно добавить к уложенным, поэтому $N=9$ - минимально.

8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Андрей вышел из пункта А в 10 часов 18 минут и, двигаясь с постоянной скоростью, пришёл в пункт Б в 13 часов 30 минут. В тот же день Борис вышел из Б в 9 часов 00 минут и, идя по той же дороге с постоянной скоростью, пришёл в А в 11 часов 40 минут. Дорога пересекает реку, Андрей и Борис одновременно подошли к мосту через эту реку, каждый со своей стороны. Андрей ушёл с моста на одну минуту позже Бориса. Когда они подошли к мосту?

Ответ. В 11 часов ровно.

Решение. Андрей тратит на дорогу из А в Б 192 минуты, а Борис на такую же дорогу из Б в А - 160 минут, на 32 минуты меньше. По мосту Борис проходит на 1 минуту быстрее, поэтому мост составляет $\frac{1}{32}$ часть пути. Скорости Андрея и Бориса равны $\frac{1}{192}$ и $\frac{1}{160}$ пути в минуту. В 10 часов 18 минут, когда Андрей вышел из А, Борис уже преодолел $\frac{78}{160}=\frac{39}{80}$ пути. Если оставшееся теперь время до прихода каждого из них на мост равно x минут, то $x(\frac{1}{160}+\frac{1}{192})+\frac{1}{32}=\frac{41}{80}$, откуда $x=42$. Значит, они подошли к мосту в 11 часов ровно.

8.2. Расположите в ряд натуральные числа от 1 до 11 в некотором порядке так, чтобы после сложения каждого числа с его порядковым номером (считая слева направо) и перемножения полученных одиннадцати чисел получился куб натурального числа.

Ответ. 1,2,5,4,3,8,7,6,11,10,9.

Решение. Мы разбиваем все числа на три тройки и два числа 1,2. В каждой тройке переставим числа в обратном порядке. При сложении со своим порядковым номером они дадут по три одинаковых числа на каждом месте, а 1+1=2,2+2=4, поэтому

$$(1+1)(2+2)(5+3)(4+4)(3+5)(8+6)(7+7)(6+8)(11+9)(10+10)(9+11)=8\cdot 8^3\cdot 14^3\cdot 20^3=$$
$$=(2\cdot 8\cdot 14\cdot 20)^3.$$

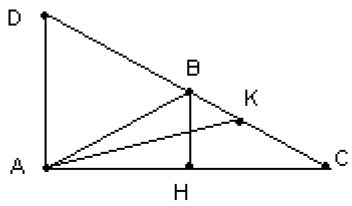
8.3. Можно ли разрезать квадрат на 1000-угольник и 199 пятиугольников? При этом считается, что никакие две соседние стороны никакого из многоугольников разбиения не лежат на одной прямой. Многоугольники могут быть выпуклыми или невыпуклыми.

Ответ. Нельзя.

Решение. Будем считать вершины многоугольников, на которые хотим разрезать. Понятно, что у 1000-угольника вершин ровно 1000, из них только 4 могут совпасть с вершинами квадрата, остальные 996 тогда должны быть вершинами пятиугольников. Но у 199-ти пятиугольников суммарно может быть не более 995 различных вершин. Следовательно, такое разрезание невозможно.

8.4. Найдите величины углов треугольника *ABC,* в котором *AB=BC,* а высота *BH* вдвое короче биссектрисы *AK*.

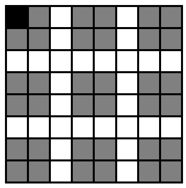
Ответ. $36^\circ, 36^\circ, 108^\circ$.



Решение. Достроим треугольник ABC до прямоугольного треугольника ABD. Равнобедренность ABC влечёт $DB = BC = AB, AD = 2BH = AK$, значит, треугольник ADK - равнобедренный. Обозначим $\angle BAC = \angle ACB = x$. Тогда $\angle KDA = \angle DKA = 90^\circ - x$, а $\angle DAK = 2x$. Следовательно, $\angle DAK + \angle KAC = \angle DAK + \frac{1}{2}\angle BAC = 2x + \frac{x}{2} = 90$, откуда $x = 36^\circ$.

8.5. Найти наименьшее N такое, что на доске 8 на 8 можно расположить N квадратов 2 на 2 клетки так, чтобы больше нельзя было добавить ни одного такого же квадрата, чтобы он не пересекался ни с одним из уже положенных. Стороны квадратов 2 на 2 должны идти по линиям доски, квадраты считаются пересекающимися, если они покрывают хотя бы одну общую клетку.

Ответ. $N = 9$.



Решение. Если расположить 9 квадратов 2 на 2 так, как показано на рисунке, то ни одного нового добавить будет уже нельзя. С другой стороны, заметим, что любой квадрат 2 на 2 на доске перекрывается ровно с одним из показанных на рисунке квадратов, поэтому, если на доске уложено не более 8 квадратов 2 на 2, то один из отмеченных на рисунке квадратов не перекрывается ни одним из них. Следовательно, его можно добавить к уложенным, поэтому $N = 9$ - минимально.

9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

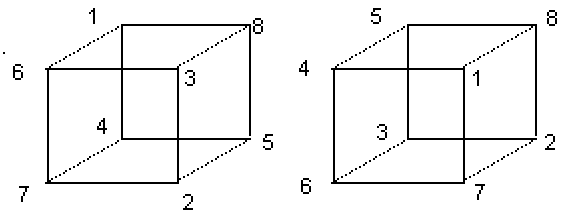
9.1. Андрей вышел из пункта А в 10 часов 18 минут и, двигаясь с постоянной скоростью, пришёл в пункт Б в 13 часов 30 минут. В тот же день Борис вышел из Б в 9 часов 00 минут и, идя по той же дороге с постоянной скоростью, пришёл в А в 11 часов 40 минут. Дорога пересекает реку, Андрей и Борис одновременно подошли к мосту через эту реку, каждый со своей стороны. Андрей ушёл с моста на одну минуту позже Бориса. Когда они подошли к мосту?

Ответ. В 11 часов ровно.

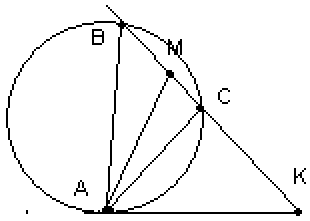
Решение. Андрей тратит на дорогу из А в Б 192 минуты, а Борис на такую же дорогу из Б в А - 160 минут, на 32 минуты меньше. По мосту Борис проходит на 1 минуту быстрее, поэтому мост составляет $\frac{1}{32}$ часть пути. Скорости Андрея и Бориса равны $\frac{1}{192}$ и $\frac{1}{160}$ пути в минуту. В 10 часов 18 минут, когда Андрей вышел из А, Борис уже преодолел $\frac{78}{160} = \frac{39}{80}$ пути. Если оставшееся теперь время до прихода каждого из них на мост равно x минут, то $x(\frac{1}{160} + \frac{1}{192}) + \frac{1}{32} = \frac{41}{80}$, откуда $x = 42$. Значит, они подошли к мосту в 11 часов ровно.

9.2. Можно ли записать в каждой вершине куба одно из чисел 1, 2,…,8 так, чтобы суммы чисел в вершинах каждой грани были одинаковы?

Ответ. Да, два примера требуемого расположения приведены на рисунке:



9.3. Прямая, касающаяся описанной окружности треугольника ABC в точке A, пересекается с прямой BC в точке K. На прямой BC от точки K в сторону точек B и C отложен отрезок KM, длина которого равна длине AK. Доказать, что AM является биссектрисой угла BAC.

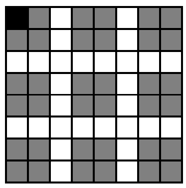


Решение. Прямая AK касается окружности в точке A, поэтому $\angle ABC = \angle CAK$. Из треугольника ABK выражаем $\angle AKM = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC - \angle CAK =$
$= 180^\circ - \angle BAC - 2\angle ABC$. В равнобедренном треугольнике AKM имеем $\angle KAM = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle AKM) = \angle ABC + \frac{1}{2}\angle BAC$.

Следовательно, $\angle MAC = \angle KAM - \angle CAK = \angle KAM - \angle ABC = \frac{1}{2}\angle BAC$, что и требовалось, доказать.

9.4. Найти наименьшее N такое, что на доске 8 на 8 можно расположить N квадратов 2 на 2 клетки так, чтобы больше нельзя было добавить ни одного такого же квадрата, чтобы он не пересекался ни с одним из уже положенных. Стороны квадратов 2 на 2 должны идти по линиям доски, квадраты считаются пересекающимися, если они покрывают хотя бы одну общую клетку.

Ответ. $N = 9$.



Решение. Если расположить 9 квадратов 2 на 2 так, как показано на рисунке, то ни одного нового добавить будет уже нельзя. С другой стороны, заметим, что любой квадрат 2 на 2 на доске перекрывается ровно с одним из показанных на рисунке квадратов, поэтому, если на доске уложено не более 8 квадратов 2 на 2, то один из отмеченных на рисунке квадратов не перекрывается ни одним из них. Следовательно, его можно добавить к уложенным, поэтому $N = 9$ - минимально.

9.5. Сто гирь, масса каждой из которых – натуральное число граммов, разложены на 7 равных по массе кучек. Докажите, что можно не менее, чем 7 различными способами убрать одну из гирь так, чтобы оставшиеся 99 гирь уже нельзя было разложить на 7 равных по массе кучек.

Решение. Если гиря такова, что после её удаления оставшиеся нельзя разложить на 7 равных по массе кучек, назовём её *плохой*, в противном случае – *хорошей*. Количество плохих гирь обозначим за p. Заметим, что, если до и после удаления гири оставшиеся можно разложить на 7 равных по массе кучек, то вес всех гирь до удаления и после него делится на 7, поэтому вес хорошей гири делится на 7.

Предположим, что $p < 7$. Рассмотрим любую хорошую гирю, после её удаления оставшиеся можно разложить на 7 равных по массе кучек. Ввиду того, что $p < 7$, в одной из этих кучек будут только хорошие гири, значит, вес этой и всех остальных кучек делится на 7. Всего кучек 7, следовательно, суммарный вес всех гирь, кроме удалённой, делится на 7^2. Рассуждая аналогично, получим, что и до удаления этой гири суммарный вес всех гирь делится на 7^2. Следовательно, вес каждой хорошей гири делится на 7^2. Повторяя это рассуждение, получим, что вес каждой хорошей гири делится на $7^2, 7^3, 7^4, \ldots$

– на любую натуральную степень 7 – противоречие. Следовательно, число плохих гирь не меньше 7.

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^3 = 2x + y, \\ y^3 = x + 2y. \end{cases}$

Ответ. 1) $x = y = 0$, 2) , $x = \pm 1, y = \mp 1$, 3) $x = \pm\sqrt{3}, y = \pm\sqrt{3}$.

Решение. Сложим оба уравнения: $(x+y)(x^2 - xy + y^2) = 3(x+y)$, откуда либо $x + y = 0$, либо $x^2 - xy + y^2 = 3$. Вычтем из первого уравнения второе: $(x-y)(x^2 + xy + y^2) = x - y$, откуда либо $x - y = 0$, либо $x^2 + xy + y^2 = 1$.

1) Пусть $x + y = 0$, тогда $x^3 = x$ и $x = 0$ либо $x = \pm 1$. Это даёт три решения: $x = y = 0$ и $x = \pm 1, y = \mp 1$.

2) Пусть $x - y = 0$, тогда $x^3 = 3x$ и $x = 0$ либо $x = \pm\sqrt{3}$. Это даёт два новых решения: $x = \pm\sqrt{3}, y = \pm\sqrt{3}$.

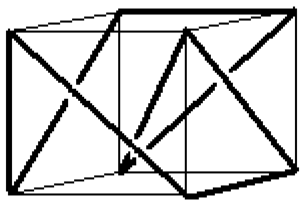
3) Пусть $x + y, x - y \neq 0$, тогда $x^2 - xy + y^2 = 3$ и $x^2 + xy + y^2 = 1$. Складывая, получим $x^2 + y^2 = 2$, вычитая, получим $xy = -1$. Тогда $(x+y)^2 = 2 + (-2) = 0$, откуда $x + y = 0$. - противоречие. В рассматриваемом случае решений нет.

10.2. Пусть $a_1 < a_2 < ... < a_n$ - натуральные числа. Доказать, что наименьшее общее кратное этих чисел не меньше, чем na_1.

Решение. Обозначим наименьшее общее кратное этих чисел за A. Если $A < na_1$, то n различных натуральных чисел $\frac{A}{a_n} < \frac{A}{a_{n-1}} < ... < \frac{A}{a_1}$ будут меньше n – противоречие.

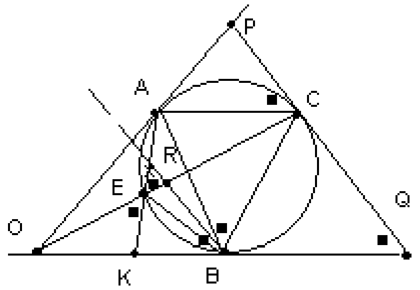
10.3. Можно ли соединить вершины куба восемью отрезками так, чтобы они образовали замкнутую восьмизвенную ломаную и при этом были попарно не параллельны, и пересекались только в вершинах?

Ответ. Да, например, как показано на рисунке.



10.4. В угол с вершиной O вписана окружность, касающаяся его сторон в точках A и B соответственно. Из точки A параллельно OB проведена прямая, пересекающая окружность в точке C, а отрезок OC пересекает окружность в точке E. Пусть прямая AE пересекает отрезок OB в точке K. Доказать, что K – середина OB.

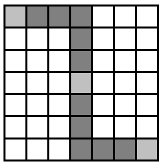
Решение. Достроим чертёж, проведя в точке C касательную к окружности, треугольник OPQ – равнобедренный, а B – середина OQ. Заметим, что $\angle OEK = \angle AEC$, как вертикальные, $\angle AEC = \angle ABC$, как вписанные, опирающиеся на общую дугу AC, $\angle ABC = \angle PCA$, как угол, опирающийся на хорду AC и



касательной PQ к окружности в точке C. Наконец, $\angle PCA = \angle PQO$, как углы при пересечении параллельных. На рисунке равные углы отмечены чёрным квадратиком. Далее, из равенства $\angle OBE = \angle OCB$ следует подобие треугольников OBE и OCB. Проведём в ΔOCB через вершину B прямую BR, параллельную PQ, она будет средней линией в ΔOQC и медианой в ΔOCB. В силу подобия треугольников OBE и OCB и того, что $\angle OEK = \angle PQO = \angle OBR$, отрезок EK будет медианой треугольника OBE.

10.5. В клетках таблицы 7 на 7 расставлены числа 0, 1 и –1 так, что в каждом квадрате 3 на 3 сумма чисел равна 0. Найти наибольшее возможное значение суммы всех чисел таблицы.

Ответ. 11



1	1	0	1	1	0	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	1	0	1	1	0	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	0	1	1	0	1	1

Решение. Рассмотрим левый квадрат на рисунке. Белые клетки разбиваются на 4 квадрата 3 на 3, поэтому сумма чисел в них равна 0. Далее, каждая пятёрка более тёмных клеток сверху и снизу лежат в одном квадрате 3 на 3, кроме них в этих квадратах ещё 4 клетки, в которых записано число, не менее -1. Следовательно, сумма чисел в каждой более тёмной пятёрке клеток не превосходит 4. Числа в оставшихся трёх более светлых клетках не больше 1, поэтому общая сумма не больше 11.
В правом квадрате приведён пример правильного заполнения квадрата с суммой 11.

11 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

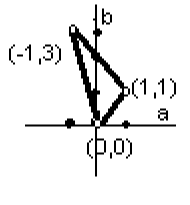
11.1. Из пункта Б в сторону, противоположную пункту А, выходит пешеход. В то же самое время из пункта А в направлении к Б выезжает автомобиль и догоняет пешехода через 20 минут. Если бы скорость автомобиля была на 30% выше, то он догнал бы пешехода через 15 минут. На сколько процентов ниже исходной должна быть скорость автомобиля, чтобы он догнал пешехода за 25 минут?

Ответ. На 18%.

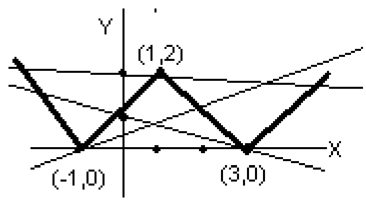
Решение. Обозначим расстояние между пунктами за S, скорости автомобиля и пешехода за x и y км в час соответственно. Тогда $\frac{x}{3} = S + \frac{y}{3}$ и $\frac{13/10}{4}x = S + \frac{y}{4}$, откуда $S = 3y, x = 10y$. За 25 минут пешеход пройдёт $\frac{5}{12}y$ км, а автомобилю нужно будет проехать $\frac{5}{12}y + 3y = \frac{41}{12}y$. Скорость его при этом должна равняться $\frac{41}{12}y / \frac{5}{12} = \frac{41}{5}y$, то есть быть ниже исходной на $10y - \frac{41}{5}y = \frac{9}{5}y$, что составляет $\frac{9}{5}/10 = 18\%$ от исходной.

11.2. При каких значениях параметров a и b уравнение $||x-1|-2| = ax+b$ имеет ровно три решения? Изобразите множество этих значений на координатной плоскости с осями a и b.

Ответ. 1) При $a \in (-1{,}0), b = 2 - a$ или $b = -3a$, 2) $a \in [0{,}1), b = 2 - a$ или $b = a$. На рисунке это множество изображено на координатной плоскости с осями a и b в виде треугольника с вершинами



(0,0),(-1,3),(1,1): При этом сами вершины треугольника в решение не входят.



Решение. Воспользуемся графическим методом. Построим график левой части уравнения и посмотрим, сколько точек пересечения с этим графиком имеет прямая $y = ax + b$ в зависимости от a и b, это и будет число решений в соответствующем случае. Графиком левой части будет ломаная с вершинами (-1,0),(1,2),(3,0), поэтому прямая $y = ax + b$ имеет иметь с ней ровно 3 точки пересечения тогда и только тогда, когда проходит через одну из её вершин, как показано на рисунке. Для этого координаты соответствующей вершины должны удовлетворять уравнению $y = ax + b$ и прямая должна иметь соответствующий угловой коэффициент.

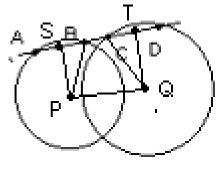
Для вершины (-1,0) получим $-a + b = 0, a \in (0,1)$, для вершины (1,2) получим $a + b = 2, a \in (-1,1)$, и для вершины (3,0) будет $3a + b = 0, a \in (-1,0)$.

11.3. Все вершины куба в некотором порядке занумерованы числами от 1 до 8 включительно. Доказать, что найдутся два разных ребра, суммы номеров концов которых равны.

Решение. Рассмотрим произвольную нумерацию вершин куба числами от1 до 8. Для каждого ребра куба выпишем сумму номеров его концов и предположим, что все 12 выписанных чисел различны. Каждое из них является натуральным числом, не меньшим, чем 1+2=3 и не большим, чем 7+8=15, то есть может принимать 13 различных значений. Следовательно, ровно одно число из интервала от 3 до 15 не является суммой номеров рёбер куба. Сложим 12 выписанных чисел, номер каждой вершины в этой сумме учитывается трижды, поэтому их сумма равна 3(1+2+…+8)=108. С другой стороны, сумма всех чисел от 3 до 15 равна 117, поэтому среди сумм номеров концов рёбер куба отсутствует число 9. Следовательно, среди рёбер куба есть рёбра, суммы номеров концов которых равны 3, 4, 5 и 6. Суммы 3 и 4 могут быть получены единственным способом, как 3=1+2 и 4=1+3, значит, вершины с номерами 2 и 3 являются соседними с вершиной номер 1 и не могут быть соседними друг с другом. Тогда сумма 5 может быть получена только как 5=1+4, поэтому вершина номер 4 тоже соседняя с вершиной номер 1 и не соседняя с 2 и 3. Но 6 можно получить только как 6=1+5=2+4, оба способа невозможны, поскольку вершины 2 и 4 не соседние, а 5 – не соседняя с 1. Противоречие с предположением о том, что все 12 сумм номеров концов рёбер куба при данной нумерации различны.

Замечание. Можно и не доказывать, что отсутствует сумма 9. достаточно заметить, что отсутствует всего одна сумма. Тогда, если присутствуют суммы 3,4,5,6, то поступаем, как в решении. Если одна из них отсутствует, то присутствуют все суммы 14,15,16,17 и указанную конструкцию можно построить для вершин с номерами 6,7,8,9.

11.4. Даны две пересекающиеся окружности радиусов $\sqrt{2}$ см и $\sqrt{17}$ см, расстояние между центрами которых равно 5 см. Прямая пересекает эти окружности в точках A,B,C и D так, как это показано на рисунке, причём длины отрезков AB,BC и CD равны. Найти длину этих отрезков.



Ответ. 2 см.

Решение. Обозначим длины искомых отрезков за $2x$, отметим центры P и Q окружностей и опустим из них перпендикуляры PS и QT на прямую AB, обозначим их длины за p и q соответственно. По теореме Пифагора имеем: $x^2 + p^2 = 2, x^2 + q^2 = 17$, и $16x^2 + (q-p)^2 = 25$. Отсюда $16x^2 + (\sqrt{17 - x^2} - \sqrt{2 - x^2})^2 = 25$, преобразуем это уравнение в биквадратное $48x^4 - 23x^2 - 25 = 0$. Находим $x^2 = \dfrac{23 \pm \sqrt{5329}}{96} = \dfrac{23 \pm 73}{96} = -\dfrac{25}{48}, 1$, поэтому единственный положительный корень $x=1$. Следовательно, длины отрезков AB, BC и CD равны 2 см.

11.5. Найти все решения в натуральных числах уравнения: $12\cdot x!+2\cdot y!=z!$. Здесь $n!$ обозначает произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно.

Ответ. 1) $x=y=13, z=14$, 2) $x=3, y=4, z=5$, 3) $x=1, y=3, z=4$.

Решение. Сразу заметим, что $z>x,y$, значит $z!$ делится на $x!, y!$. Рассмотрим три случая.

1) $x=y$. Тогда $14=\frac{z!}{x!}=z(z-1)\cdot\ldots\cdot(x+1)$ -целое число. Легко убедиться, что 14 не представляется в виде произведения более, чем одного последовательного числа, поэтому $z=x+1$ и $x=y=13, z=14$.

2) $x<y$. Тогда $\frac{z!}{y!}=2+\frac{12}{y!/x!}$ - целое число, откуда $\frac{y!}{x!}\in\{2,3,4,6,12\}$. Проверяем, разлагая соответствующие числа в произведение нескольких последовательных. В первом и втором случаях $y=2, x=1$ и $y=3, x=2$ соответственно, тогда $z!=16$ или $z!=36$, что невозможно. В третьем случае $y=4, x=3$, тогда $z!=120$ и $z=5$- решение. В четвёртом случае либо $y=6, x=5$ и $z!=4\cdot 6!$, что невозможно, либо $y=3, x=1$ и $z!=24$, откуда $z=4$- решение. В пятом случае либо $y=12, x=11$ и $z!=3\cdot 12!$, что невозможно, потому, что $12!<3\cdot 12!<13!$, либо $y=4, x=2$ и $z!=3\cdot 4!$, что опять – таки невозможно.

3) $x>y$. Тогда $\frac{z!}{x!}=12+\frac{2}{x!/y!}$ - целое число, откуда $\frac{x!}{y!}=2$. При этом $x=2, y=1, z=13\cdot 2$ - что невозможно.

11.6. Доказать, что каждую правильную дробь $\frac{a}{b}$, где $a<b$- натуральные числа, можно представить в виде суммы дробей $\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}$ с различными натуральными знаменателями $x_1,\ldots,x_n$.

Решение. Построим последовательность дробей $\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\frac{a_3}{b_3},\ldots$ следующим образом. Пусть $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{b}$, если уже определены дроби $\frac{a_1}{b_1},\frac{a_2}{b_2},\frac{a_3}{b_3},\ldots,\frac{a_k}{b_k}$, положим $\frac{1}{x_k}=\max\{\frac{1}{n}\mid\frac{1}{n}\le\frac{a_k}{b_k}\}$. Если $\frac{1}{x_k}=\frac{a_k}{b_k}$, то процесс построения дробей останавливается, в противном случае полагаем $\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}=\frac{a_k}{b_k}-\frac{1}{x_k}=\frac{a_kx_k-b_k}{b_kx_k}$, сокращаем полученную дробь, если необходимо, и переходим к следующему k. При этом $\frac{1}{x_k}<\frac{a_k}{b_k}<\frac{1}{x_k-1}$, поэтому $a_k(x_k-1)<b_k<a_kx_k$, значит, $0<a_kx_k-b_k<a_k$. Следовательно, на каждом шаге числители дробей $\frac{a_k}{b_k}$ строго убывают, поэтому процесс остановится после конечного числа шагов. Кроме того, $\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}=\frac{a_k}{b_k}-\frac{1}{x_k}<\frac{1}{x_k-1}-\frac{1}{x_k}=\frac{1}{x_k(x_k-1)}$, поэтому $\frac{1}{x_{k+1}}\le\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}<\frac{1}{x_k(x_k-1)}$. Значит,

$x_{k+1} > x_k(x_k - 1) \geq x_k$, и все x_k различны. Легко убедиться, что, если процесс остановится на n-ом шаге, то $\frac{a}{b} = \frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_n}$.