Всесибирская олимпиада школьников 2011-2012 г. по математике
Второй (заочный) этап

7 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

7.1. Найти минимальное натуральное x такое, что $x = a+b+c = d+e+f$ для некоторых различных натуральных чисел a,b,c,d,e,f .

7.2. Найти минимальное натуральное число, десятичная запись которого оканчивается на 6, причём, после перестановки этой шестёрки на первое место в записи, число увеличивается в 4 раза.

7.3. Магазин продал рулон ткани за 4 дня. В первый день было продано $\frac{1}{6}$ всего рулона и ещё 5 метров, во второй 20% остатка и ещё 10 метров, в третий день 25% остатка и ещё 3 метра, а в четвёртый - $\frac{1}{3}$ остатка и остальные 13 метров. Сколько метров было в рулоне?

7.4. Нужно разрезать квадратную клетчатую доску 5×5 на единичные квадратики. Разрезы должны быть прямолинейными и идти вдоль линий сетки. Образовавшиеся после очередного разреза части можно перекладывать так, чтобы следующий разрез мог рассечь не одну, а сразу несколько частей. Какое наименьшее число разрезов потребуется?

7.5. Внутри произвольного прямоугольника *ABCD* взята некоторая точка *M*. Доказать, что, независимо от выбора *M*, среди отрезков *AM*,*BM*,*CM* и *DM* найдутся три, из которых можно составить треугольник.

Всесибирская олимпиада школьников 2011-2012 г. по математике
Второй (заочный) этап

8 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

8.1. Найти все решения в натуральных числах уравнения $2^x + 2^y = 2^z$.

8.2. Несколько рабочих выполняют работу за 14 дней. Если бы их было на 4 человека больше и каждый работал в день на 1 час дольше, то та же работа была бы сделана за 10 дней. Если же их было бы ещё на 6 человек больше и каждый работал бы в день ещё на 1 час дольше, то та же работа была бы сделана за 7 дней. Сколько было рабочих и сколько часов в день они работали?

8.3. Найти все наборы из четырёх целых чисел такие, что произведение любых трёх из них в сумме с четвёртым равно 2.

8.4. Нужно разрезать квадратную клетчатую доску 5×5 на единичные квадратики. Разрезы должны быть прямолинейными и идти вдоль линий сетки. Образовавшиеся после очередного разреза части можно перекладывать так, чтобы следующий разрез мог рассечь не одну, а сразу несколько частей. Какое наименьшее число разрезов потребуется?

8.5. Внутри произвольного прямоугольника $ABCD$ взята некоторая точка M. Доказать, что, независимо от выбора M, среди отрезков AM,BM,CM и DM найдутся три, из которых можно составить треугольник.

Всесибирская олимпиада школьников 2011-2012 г. по математике
Второй (заочный) этап

9 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

9.1. Несколько рабочих выполняют работу за 14 дней. Если бы их было на 4 человека больше и каждый работал в день на 1 час дольше, то та же работа была бы сделана за 10 дней. Если же их было бы ещё на 6 человек больше и каждый работал бы в день ещё на 1 час дольше, то та же работа была бы сделана за 7 дней. Сколько было рабочих и сколько часов в день они работали?

9.2. Упростить выражение: $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$. Итог не должен содержать «корня под корнем».

9.3. Найти все точки (x, y) координатной плоскости, через которые не проходит ни одна прямая из семейства $y=(2p+1)x-p^2$.

9.4. Квадрат 2012×2012 разделён на квадратики размеров 1×1, 2×2, 3×3 и 4×4. Может ли суммарное число квадратиков размеров 1×1, 2×2 и 4×4 равняться 2012?

9.5. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* длины сторон *AB* и *BC* равны 1 см, а величины углов *ABC* и *ADC* равны 102 и 129 градусов соответственно. Найти длину диагонали *BD*.

Всесибирская олимпиада школьников 2011-2012 г. по математике
Второй (заочный) этап

10 класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

10.1. Два лыжника стартовали из одного пункта с интервалом 2 минуты. Второй лыжник догнал первого на отметке 1 км от точки старта. Дойдя до поворота на отметке 5 км, второй повернул обратно и встретился с первым через 20 минут после старта первого. Найти скорость первого лыжника.

10.2. Упростить выражение: $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$. Итог не должен содержать «корня под корнем».

10.3. Найти все точки (x, y) координатной плоскости, через которые не проходит ни одна прямая из семейства $y=(2p+1)x-p^2$.

10.4. Найти все решения уравнения $(2^x+2^y)^2=2^z+2^t$ в натуральных числах.

10.5. На окружности отмечены три произвольные различные точки *A, B* и *C.* С помощь циркуля и линейки построить на окружности четвёртую точку *D* так, чтобы она вместе с *A, B* и *C* являлись вершинами описанного четырёхугольника.

Всесибирская олимпиада школьников 2011-2012 г. по математике
Второй (заочный) этап

11класс

Каждая задача оценивается в 7 баллов

11.1. Два лыжника стартовали из одного пункта с интервалом 2 минуты. Второй лыжник догнал первого на отметке 1 км от точки старта. Дойдя до поворота на отметке 5 км, второй повернул обратно и встретился с первым через 20 минут после старта первого. Найти скорость первого лыжника.

11.2. Упростить выражение: $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}-\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}$. Итог не должен содержать «корня под корнем».

11.3. Найти все точки (x, y) координатной плоскости, через которые не проходит ни одна кривая из семейства $y = p^2 + (4-2p)x - x^2$.

11.4. Найти все решения уравнения $(2^x + 2^y)^2 = 2^z + 2^t$ в натуральных числах.

11.5. На отрезке AB произвольно выберем точку M и по одну сторону от AB построим квадраты $AMCD$ и $BMFE$. Описанные окружности этих квадратов пересекаются в точках M и N.
а) Доказать, что прямые FA и BC пересекаются в точке N.
б) Доказать, что все отрезки MN проходят через одну точку, не зависящую от выбора M.