Критерии проверки решений задач
Всесибирская олимпиада школьников 2011-2012 г. по математике
Первый этап
7 класс

7.2. Только ответ: 0 баллов. Ответ с проверкой: 3 балла.

7.3. Только ответ: 0 баллов. Ответ с проверкой: 3 балла. Составление верного уравнения: 4 балла.

7.4. Догадка, что сумма периметров двух тёмных прямоугольников равна сумме периметров двух белых прямоугольников: 2 балла.

Использование этой догадки и получения правильного ответа: 4 балла.

Только ответ: 0 баллов.

Ответ с рассмотрением подтверждающего частного случая: 1 балл.

8 класс

8.1. Только ответ: 0 баллов. Ответ с проверкой: 2 балла. Составление верного уравнения: 3 балла.

8.2. Только ответ: 0 баллов. Ответ с проверкой: 2 балла. Составление верного уравнения: 3 балла.

8.3. Догадка, что сумма периметров двух тёмных прямоугольников равна сумме периметров двух белых прямоугольников: 2 балла.

Использование этой догадки и получения правильного ответа: 4 балла.

Только ответ: 0 баллов.

Ответ с рассмотрением подтверждающего частного случая: 1 балл.

8.4. Рассмотрение частного случая, когда числа учительницы целые: 2 балла.

9 класс

9.1. Только ответ: 0 баллов. Ответ с проверкой:1 балл

9.2. Только ответ: 0 баллов. Ответ с проверкой: 1 балл. Составление верного уравнения: 3 балла.

9.3. Только ответ: 0 баллов. Ответ с проверкой:1 балл. Составление верного уравнения: 3 балла.

9.5. Рассмотрение частных случаев: 1 балл.

10 класс

10.1. Использование теоремы Коши для непрерывной функции считать нормальным.

10.2. Только ответ: 0 баллов. Ответ с проверкой: 1 балл. Составление верного уравнения: 3 балла.

10.4. Необоснованный переход к рассмотрению только двух возможностей: $a=2, b=3, c=4$ и $a=2, b=3, c=5$: всё решение оценивается максимум из 4 баллов.

Упущение одной из этих возможностей: снимаем 3 балла.

Неполный перебор случаев для этих возможностей: снимаем 2-3 балла.

11 класс

11.2. Только ответ: 0 баллов. Ответ с проверкой: 1 балл. Составление верного уравнения: 3 балла.

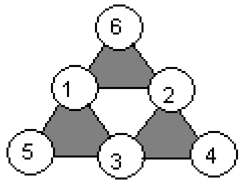
11.3. Упущение части ответов: снимаем 2 балла.

11.4. Ответ с проверкой рассмотрением частного случая: 1 балл.

11.5. Доказательство оценки $n \geq 9$: 2 балла. Доказательство оценки $n \leq 9$: 2 балла. Построение примера для $n=9$: 3 балла.

Решения задач первого этапа Всесибирской олимпиады школьников 2011-2012 г. по математике
7 класс

7.1. Ответ. Изображён на рисунке справа. Есть ещё, как минимум, три других варианта.

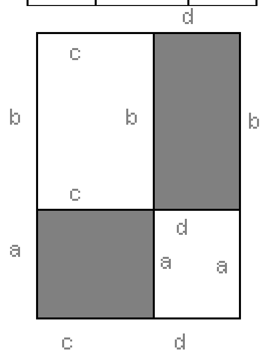


7.2. Ответ. 13 девочек.
Обозначим количество девочек в классе за n, тогда мальчиков в классе $28-n$. Если первая танцевала с 3 мальчиками, вторая – с 4,…, то последняя будет по номеру n -ой, и танцевать она должна с $28-n$ мальчиками. Следовательно, $n-1=(28-n)-3$, откуда $n=13$ - опасное число.

7.3. Ответ. 225 метров.
Обозначим расстояние от гнезда белки до орешника за x метров, тогда время от гнезда до орешника и обратно равно $\frac{x}{5}+\frac{x}{3}=120$, откуда $x=120\cdot\frac{15}{8}=225$ метров.

?		32
	35	40
9	21	

7.4. Ответ. 15.
Легко заметить, что, если прямоугольник разбит вертикальной и горизонтальной линиями на 4 прямоугольника, как показано на рисунке, то сумма периметров двух тёмных прямоугольников равна сумме периметров двух белых прямоугольников и равна периметру большого прямоугольника. Вооружившись этим приятным фактом, за три шага находим периметр искомого прямоугольника: сначала второго в левой колонке 9+35-21=23, затем верхнего в средней колонке 35+32-40=27, затем верхнего левого 23+27-35=15.



7.5. Ответ. Да, можно.
Делим все монеты на три кучки по 33, 33 и 35 монет. Первым взвешиванием сравниваем две первых кучки. Если их веса равны, то они состоят из настоящих монет, а фальшивая монета - в третьей кучке. Тогда добавляем к первой кучке 2 монеты из второй и сравниваем с третьей. Фальшивая монета тяжелее настоящей тогда и только тогда, когда третья кучка тяжелее кучки из 35 настоящих монет.
Если веса первой и второй кучек различны, то фальшивая монета в одной из них, а третья кучка содержит только настоящие монеты. Обозначим более лёгкую из двух первых кучек за А, более тяжёлую – за Б. Сравниваем теперь А и любые 33 монеты из третьей. В случае равенства весов фальшивая монета в Б и тяжелее настоящей. Если А легче, то фальшивая монета в А и легче настоящей. Случай, когда А тяжелее, невозможен, так как тогда веса А, Б и 33 монет третьей кучки различны, однако фальшивая монета может быть не более, чем в одной из них, значит, веса двух других совпадают - противоречие.

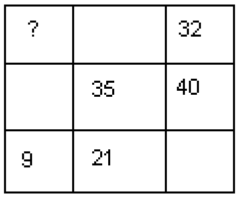
Решения задач первого этапа Всесибирской олимпиады школьников 2011-2012 г. по математике
8 класс

8.1. Ответ. 13 девочек.
Обозначим количество девочек в классе за n, тогда мальчиков в классе $28-n$. Если первая танцевала с 3 мальчиками, вторая – с 4,…, то последняя будет по номеру n -ой, и

танцевать она должна с $28-n$ мальчиками. Следовательно, $n-1=(28-n)-3$, откуда $n=13$ - опасное число.

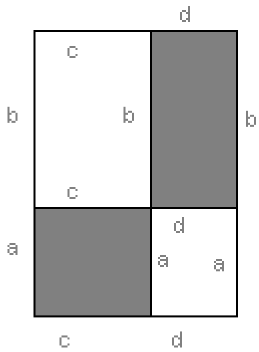
8.2. Ответ. 240 кг.

40 кг вод Тихого океана содержат $40\cdot\frac{35}{1000}=1{,}4$ кг соли. Для того, чтобы эта масса соли после добавления пресной воды составила $0{,}5\%=\frac{1}{200}$, нужно, чтобы общая масса воды стала равна $1{,}4\cdot 200=280$ кг. Значит, долить нужно 280-40=240 кг пресной воды.



8.3. Прямоугольник разбит двумя вертикальными и двумя горизонтальными линиями на 9 прямоугольников, периметры некоторых из которых указаны на рисунке. Найти периметр левого верхнего прямоугольника.

Ответ. 15.



Легко заметить, что, если прямоугольник разбит вертикальной и горизонтальной линиями на 4 прямоугольника, как показано на рисунке, то сумма периметров двух тёмных прямоугольников равна сумма периметров двух белых прямоугольников и равна периметру большого прямоугольника. Вооружившись этим приятным фактом, за три шага находим площадь периметр искомого прямоугольника: сначала второго в левой колонке 9+35-21=23. затем верхнего в средней колонке 35+32-40=27, затем верхнего левого 23+27-35=15.

8.4. Предположим, что Катя права, обозначим данные учительницей положительные числа за x, y, z, t. Тогда можно считать, что $x+y+z=3, x+y+t=4, x+z+t=7$. В таком случае $2x+2y+z+t=7=x+z+t$, следовательно $x+2y=0$, что противоречит положительности этих чисел.

8.5. Ответ. Да, можно.

Делим все монеты на три кучки по 33, 33 и 35 монет. Первым взвешиванием сравниваем две первых кучки. Если их веса равны, то они состоят из настоящих монет, а фальшивая монета - в третьей кучке. Тогда добавляем к первой кучке 2 монеты из второй и сравниваем с третьей. Фальшивая монета тяжелее настоящей тогда и только тогда, когда третья кучка тяжелее кучки из 35 настоящих монет.

Если веса первой и второй кучек различны, то фальшивая монета в одной из них, а третья кучка содержит только настоящие монеты. Обозначим более лёгкую из двух первых кучек за А, более тяжёлую – за Б. Сравниваем теперь А и любые 33 монеты из третьей. В случае равенства весов фальшивая монета в Б и тяжелее настоящей. Если А легче, то фальшивая монета в А и легче настоящей. Случай, когда А тяжелее, невозможен, так как тогда веса А, Б и 33 монет третьей кучки различны, однако фальшивая монета может быть не более, чем в одной из них, значит, веса двух других совпадают - противоречие.

Решения задач первого этапа Всесибирской олимпиады школьников 2011-2012 г. по математике
9 класс

9.1. Ответ. 20 брёвен.

Будем считать целые брёвна тоже чурками. Каждый новый распил добавляет новую чурку, поэтому сначала было 72-52=20 чурок=брёвен.

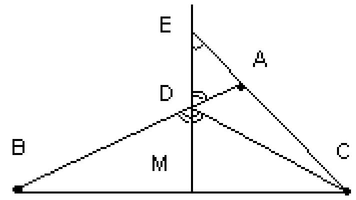
9.2. Ответ. 90%.

Сухие грибы содержат $2{,}5 \cdot \frac{12}{100} = 0{,}3$ кг воды, поэтому в них 2,2 кг твёрдого вещества. Столько же твёрдого вещества содержалось до усушки и в свежих грибах, но оно составляло там $100 \cdot \frac{2{,}2}{22} = 10\%$, следовательно, вода составляла в свежих грибах 90%.

9.3.. Ответ. 99 рублей 98 копеек.

Обозначим количество рублей и копеек, имевшихся у меня, за x и $2y < 100$ соответственно. По условию, я потратил столько же, сколько осталось, поэтому $2(100y + x) = 100x + 2y$, откуда $49x = 99y$. Числа 49 и 99 не имеют неединичных общих делителей, поэтому x делится на 99, а y делится на 49. Если $y = 0$, то и $x = 0$, что противоречит условию. При $y = 49$ получим $x = 99$ - ответ задачи. При остальных y число копеек будет больше 100.

9.4. Обозначим середину стороны BC за M. Проведём отрезок CD, тогда $CD = BD$ и треугольник BCD - равнобедренный, а треугольники BDM и CDM равны. Следовательно, $\angle EDA = \angle BDM = \angle CDM > \angle AED$, как внешний угол треугольника CDE. Значит, AD, как сторона треугольника ADE, лежащая против меньшего угла AED, меньше AE, как стороны треугольника ADE, лежащей против большего угла ADE.



9.5. Ответ. Да, верно.

Заметим, что 1+2+3+4+5+6=21 и -1-2+3-4+5+6=7 – делятся на 7. В первом выражении чётное число знаков «-», во втором – нечётное. Следовательно, если в начальной расстановке окажется чётное число минусов, то, заменяя их все парами на плюсы, можно получить первое выражение.

Если в начальной расстановке окажется нечётное число минусов, то, заменяя их парами на плюсы, можно сначала получить выражение, содержащее один минус. Если он не первый, то, меняя этот и первый знаки, получим выражение –1+2+3+4+5+6. Теперь осталось поменять второй и четвёртый знаки, чтобы получить-1-2+3-4+5+6=7.

Решения задач первого этапа Всесибирской олимпиады школьников 2011-2012 г. по математике
10 класс

10.1. Первое решение. Значение трёхчлена при $x = 0$ равно $-c$ -отрицательно, а при $x = 1$ равно $a + b - c$ - положительно, в силу неравенства треугольника. Следовательно, отрезок $(0,1)$ содержит ровно 1 корень трёхчлена. Если бы их было 2 или 0, то в силу вида графика квадратного трёхчлена, значения на концах интервала были бы положительны.

Второе решение. Честно находим корни $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$ уравнения $ax^2 + bx - c = 0$, замечаем, что корень с минусом отрицательный. Для корня с плюсом записываем неравенство $0 < \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} < 1$, которое при положительных a,b,c эквивалентно неравенству $a + b > c$, справедливому в силу неравенства треугольника.

10.2. Ответ. Через 10 минут.

Обозначим искомое время за t минут. В домне сначала было 1000 кг сплава, содержащего 100 кг меди, из первого ковша в домну льётся в минуту 100 кг сплава, содержащего 12 кг меди, а из второго 200 кг сплава, содержащего 10 кг меди. Значит, через t минут в домне процент меди будет составлять $\frac{100 + 12t + 10t}{1000 + 100t + 200t} = \frac{8}{100}$, откуда $t = 10$.

10.3. Из параллельности AD, FE, BC следуют равенства углов $\angle DFE = \angle ADF, \angle CFE = \angle BCF$. Осталось показать подобие прямоугольных треугольников ADF и BCF. Оно следует из подобия треугольников AED и CEB а также соотношений $\frac{AF}{BF} = \frac{AE}{CE} = \frac{AD}{BC}$, откуда $\frac{BF}{BC} = \frac{AF}{AD}$

10.4. Пусть числа в условии не равны, обозначим их за $m < n$, тогда $n = m(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c})$. где $a < b < c, a \geq 2, b \geq 3, c \geq 4$ - некоторые различные натуральные делители m, причём $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$. Лёгким перебором находим две возможности: $a = 2, b = 3, c = 4$ и $a = 2, b = 3, c = 5$.

В первом случае $n = \frac{13}{12}m$, во втором $n = \frac{31}{30}m$. Теперь запишем наоборот, $m = n(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z})$ где $x < y < z, x \geq 2, y \geq 3, z \geq 4$ - некоторые натуральные делители n, причём в первом случае $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{12}{13}$, а во втором $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{30}{31}$.

В первом случае, если $x \geq 3$, то $y \geq 4, z \geq 5$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{47}{60} < \frac{12}{13}$, следовательно, $x = 2$. Далее, если $y \geq 4$, то $z \geq 5$ и, либо $z \geq 6$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{11}{12} < \frac{12}{13}$, либо $z = 5$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{19}{20} \neq \frac{12}{13}$, следовательно, $y = 3$. Значит, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{6} + \frac{1}{z} = \frac{12}{13}$, откуда $z = \frac{78}{7}$ - не целое число.

Во втором случае в силу того, что $\frac{12}{13} < \frac{30}{31}$ все оценки для x и y остаются теми же, и в финале $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{5}{6} + \frac{1}{z} = \frac{30}{31}$, откуда $z = \frac{186}{25}$ - не целое число. Итого, предположение о неравенстве чисел m и n приводит к противоречию.

10.5. Допустим, изначально нет возможности проехать из города А в город Б. Из условия задачи следует, что тогда существует пара городов В и Г, изначально не соединённых дорогой. Отметим, что рассуждения ниже не требуют, чтобы города В и Г обязательно были отличны от А и Б. При добавлении дороги ВГ появляется возможность проезда из А в Б, причём, как легко понять, путь идёт из А в В, потом ВГ, затем из Г в Б. Отсюда следует, что изначально есть возможность проезда из А в В. При добавлении дороги ГВ тоже появляется возможность проезда из А в Б, причём, как легко понять, путь идёт из А в Г, потом ГВ, затем из В в Б. Отсюда следует, что изначально есть возможность проезда из В в Б. Значит, изначально есть возможность проезда из А в Б через В.

Решения задач первого этапа Всесибирской олимпиады школьников 2011-2012 г. по математике
11 класс

11.1. Известно, что минимальное значение трёхчлен ax^2+bx+c достигает в вершине параболы при $x=-\frac{b}{2a}$ и равно оно $c-\frac{b^2}{4a}$. Применяя эту формулу в нашей задаче, получим: $a-\frac{16}{b}+b-\frac{16}{a}=0$, откуда, с учётом $a+b>0$, имеем $ab=16, b=\frac{16}{a}$ Подставляя это в выражения для каждого минимума, получим $a-\frac{16}{b}=a-a=0=b-b=b-\frac{16}{a}$, что и требовалось доказать.

11.2. Ответ. 20 грамм.

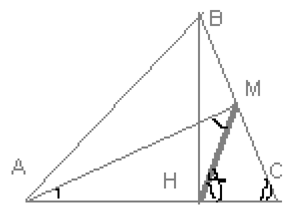
В колбе было $\frac{10}{100}\cdot 80=8$ граммов соли, столько же её останется и в конце, следовательно масса раствора после переливания из пробирки составит $\frac{100}{12}\cdot 8=\frac{200}{3}$ грамма, значит, в процессе выпаривания из пробирки испарилось $80-\frac{200}{3}=\frac{40}{3}$ грамма воды. Чтобы при выпаривании в пробирке процентное содержание соли выросло втрое, нужно, чтобы вес раствора в пробирке уменьшился втрое, то – есть испарилось две трети её начального веса. Значит, две трети начального веса пробирки равно $\frac{40}{3}$ грамм, поэтому полный вес отлитого в пробирку раствора равен $\frac{3}{2}\cdot\frac{40}{3}=20$ грамм.

11.3. Ответ. $(m,n)=(-2{,}1),(0{,}5),(2{,}1),(4{,}5)$.

Выразим m через n: $m=n+2-\frac{3}{n-1}$. Учитывая, что числа m и n целые, получим $n-1=-3,-1,1,3$, откуда $n=-2,0,2,4$ и $m=1,5,1,5$ соответственно.

11.4. Ответ. $BC=2$ см.

Проведём отрезок МН, он будет медианой прямоугольного треугольника BHC, проведённой к гипотенузе BC и равен её половине. Тогда ΔMHC равнобедренный, поэтому $\angle MHC=\angle MCH=2\angle MAC$, значит, $\angle HMA=\angle HAM$, поэтому $AH=HM=MC=1$ и $BC=2MC=2$ см.



11.5. Ответ. 9 участников.

Обозначим количество свистунов за n. По условию, первый из них набрал $\frac{1}{5}$, третий $\frac{1}{10}$ и n-ый $\frac{1}{11}$ от суммы баллов, набранных всеми участниками. Оценим n двумя способами. С одной стороны, второй участник набрал баллов меньше первого, то-есть меньше $\frac{1}{5}$, а участники с 4-ого по $n-1$ -ого меньше третьего, то-есть каждый меньше $\frac{1}{10}$ от суммы баллов, набранных всеми участниками. Следовательно, $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{n-3}{10}+\frac{1}{11}>1$, откуда $n>\frac{89}{11}$. Ввиду целочисленности $n\geq 9$. Аналогично, второй участник набрал баллов больше третьего, то-есть больше $\frac{1}{10}$, а участники с 4-ого по $n-1$ -ого больше n -ого, то-есть больше $\frac{1}{11}$ от суммы баллов, набранных всеми участниками. Следовательно, $\frac{1}{5}+\frac{2}{10}+\frac{n-3}{11}<1$, откуда $n<\frac{48}{5}$. Ввиду целочисленности $n \le 9$. Следовательно, единственная возможность $n=9$.

Приведём пример, когда это число участников реализуется: участники набрали соответственно 220, 135, 110, 109, 108, 107, 106, 105, 100 баллов. При отсутствии примера задача считается решённой наполовину, так как найденное единственно возможное $n=9$ могло и не реализоваться.