Решения задач Заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников по математике 2010 – 2011 г.г.
и критерии оценивания решений задач

Указанные ниже рекомендации по оцениванию этапов решения задач допускают снижение оценок при наличии дополнительных погрешностей. Особенно тщательно нужно проверять обоснованность рассуждений в задачах по комбинаторике и геометрии. **Каждое полное верное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.** Некрасивость решения – не повод для снижения оценки.

Общие рекомендации по оцениванию

1) Верное и полное решение с правильным ответом: 7 баллов,
2) Верное решение с небольшими погрешностями типа арифметических ошибок: 6 баллов,
3) Верное в целом решение с заметными пробелами типа нерассмотренных частных случаев: 4-5 баллов,
4) Высказана идея решения, которая может быть реализована, но сам автор её не довёл до конца: 2-3 балла.
5) Имеются некоторые технические действия, вроде вычисления каких-то промежуточных цифр, относящихся к решению, либо угадан без доказательства ответ: 0-1 балл.

В ряде задач приведены более конкретные замечания по оцениванию именно этих задач. Там, где их нет, нужно руководствоваться общими рекомендациями по оцениванию и здравым смыслом.

Желаем успеха!

8 класс

8.1. Не объяснена возможность деления на b - минус 2 балла.

8.2. Просто угадан ответ – 0 баллов.
Приведён ответ с проверкой – 2 балла.
Неверно составленные пропорции и т. д. – 0 баллов.

8.3. Доказано, что точки P,Q,R лежат на одной прямой: 3 балла.
Если задача полностью доказана, но в обратную сторону – тоже 3 балла.

8.5. Разобраны частные случаи: 0 баллов.

8.5. Просто приведен ответ $S(n) = 25$ при $n = 799$ с проверкой, оцениваем в 3 балла.

8.6. Верная оценка числа камней в наименьшей кучке: 3 балла.
Переход к верной оценке для наибольшей кучки: ещё 1 балл.
Пример для 28 камней в наибольшей кучке: 3 балла.

9 класс

9.1. Просто угадан ответ – 0 баллов.
Приведён ответ с проверкой – 2 балла.
Неверно составленные пропорции и т. д. – 0 баллов.

9.2. В решении должно быть чётко сказано, что общее количество посланных открыток равно общему количеству полученных открыток и явно сказано о разной чётности этих чисел в условии. Отсутствие каждого из этих моментов снижает оценку на 3 балла.

9.3. Замечание, что отрезки AD, AP, BC и BP являются касательными к окружности из условия, поэтому $AP = AD = 6$ см, $BP = BC = 3$см – стоит 1 балл.
Доказательство того, что отрезок OP параллелен основаниям трапеции – стоит 3 балла. Нахождение длины OP из подобия треугольников BOP и BDA – стоит 3 балла.

9.4. Просто приведен ответ $S(n) = 25$ при $n = 799$ с проверкой, оцениваем в 3 балла.

9.5. Не объяснено, что $c \geq 0$ - минус 2 балла.
Упущение случая $c = \frac{1}{4}$ - минус 1 балл.
Не рассмотрен случай $0 \leq c < \frac{1}{4}$ - минус 3 балла.

9.6. Перегонка крестиков в левый нижний угол 3 на 3 : 2 балла.
Перегонка крестиков в уголок из 5 клеток: ещё 1 балл.
Либо вместо этого перегонка крестиков в крест из 5 клеток: 3 балла.
Уменьшение числа крестиков до 0,1 или 2: ещё 2 балла. Не разобрана часть случаев – минус 1 балл.
Доказательство, что меньше 0,1 или 2 крестиков получить не всегда можно: 2 балла.

10 класс

10.1. В решении должно быть чётко сказано, что общее количество посланных открыток равно общему количеству полученных открыток и явно сказано о разной чётности этих чисел в условии. Отсутствие каждого из этих моментов снижает оценку на 3 балла.

10.2. Только верный ответ с проверкой: 1 балл.
Замечание, что при $x < 0$ левая часть отрицательна и решений нет: 2 балла.
Замечание, что при $0 \leq x < 1$ левая часть меньше 10 и решений нет: 2 балла.
Замечание, что при $x > 1$ левая часть больше 10 и решений нет: 2 балла.

10.3. Проверено, что $x + y \geq 0$ удовлетворяют условию: 2 балла.
Пропущен случай $x = y$ - снимаем 2 балла.

10.4. Доказано, что углы $\angle APR, \angle BQP, \angle CRQ$ такие же, как и в предположении, что P,Q и R - основания высот треугольника ABC: 3 балла.
Мутные рассуждения типа «сдвигаем точку сюда – с углами происходит то-то и то-то» стоит оценивать только, если есть точные и строгие объяснения.
Решение в противоположную требуемой в условии сторону (если P,Q и R - основания высот, то $\angle APR = \angle BPQ, \angle BQP = \angle CQR, \angle CRQ = \angle ARP$) : 2 балла.

10.5. Показано, что $n \leq 4$: 4 балла.
Пример для $n = 3$: 1 балл.
Пример для $n = 4$: 2 балла.
Случай $n = 3$ вообще упущен: минус 2 балла.

10.6. Только верный ответ с рассмотрением частных случаев: 1 балл.
Рассуждение про чёрные и белые клетки, покрытые домино: 3 балла.
Объяснение того, ломаная пересекает в точности домино, белые клетки которых лежат в Угле, а чёрные клетки не лежат в Угле: 3 балла.

11 класс

11.1. Только верный ответ с проверкой: 2 балла.

11.2. Только верный: 0 балла.
Доказательство того, что PQ лежит на средней линии трапеции: 3 балла.
Подсчёт длин отрезков MP и NQ : 3 балла.
Подсчёт длины PQ : 1 балл.

11.3. Первое преобразование: 4 балла.
Второе преобразование: 3 балла.

11.4. Не объяснено, что $c \geq 0$ - минус 2 балла.
Упущение случая $c = \frac{1}{4}$ - минус 1 балл.
Не рассмотрен случай $0 \leq c < \frac{1}{4}$ - минус 3 балла.

11.5. Первая подстановка вместо x числа $x - f(0)$, а вместо y числа 0: 3 балла.
Вторая подстановка вместо x число 0 : 1 балл.
Проверка найденного решения: 3 балла.
Решение с верным ответом в предположении, что $f(x)$ - многочлен или линейная функция: 1 балл.

11.6. Доказательство того, что число авиалиний не меньше 100: 4 балла.
Построение примера для 100 авиалиний: 3 балла.
Примеры и доказательства для других оценок: 0 баллов.

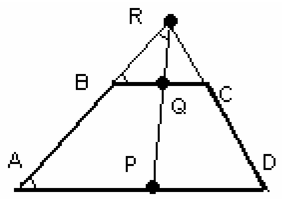
Решения задач заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2010-2011 г.г. по математике

8 класс

8.1. Раскроем скобки в первом равенстве: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + 10b$, откуда $b(2a+b) = 10b$. По условию, $b > 0$, поделив на него, получим $2a + b = 10$. Тогда, подставив $b = 10 - 2a$, получим $2a^2 + 10b = 2a^2 - 20a + 100 = 10a + b^2 + ab$ и второе равенство выполнено.

8.2. Ответ. 1 килограмм 12%-процентного раствора.
Обозначим массу исходного раствора за x кг, а концентрацию за a%. Добавляя 1 кг 20%--ого раствора, получим: $\left(\frac{ax}{100} + \frac{20}{100}\right) \Big/ (x+1) = 16/100$, откуда $ax + 4 = 16x$. В числителе левой части стоит сумма масс соли в исходном и добавленном растворах. Добавляя 2 кг 9%-ого раствора, получим: $\left(\frac{ax}{100} + \frac{18}{100}\right) \Big/ (x+2) = 10/100$, откуда $ax - 2 = 10x$. Отсюда $x = 1, a = 12$.

8.3. Обозначим пересечение продолжений сторон AB и CD за R. В прямоугольных треугольниках ARD и BRC длины медиан PR и QR равны, соответственно, $\frac{AD}{2}$ и $\frac{BC}{2}$. Следовательно, в треугольнике PQR имеем $PQ + QR = \frac{AD - BC}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AD}{2} = PR$, значит, этот треугольник вырожденный и все три точки лежат на одной прямой. Теперь стоит вспомнить, что треугольники RQB и RPA являются равнобедренными с вершинами Q и P соответственно. Следовательно, $\angle PAR = \angle PRA = \angle QRB = \angle QBR$. Таким образом, углы, образуемые прямой PQ при пересечении прямых AD и BC равны, поэтому они параллельны.



8.4. Обозначим количество крестиков в четырёх угловых клетках доски за x, в 12 не угловых клетках, примыкающих к горизонтальным сторонам доски за y, в 12 не угловых клетках, примыкающих к вертикальным сторонам доски за z, и в остальных 36 клетках – за t. Разбивая всю доску на 16 квадратов 2 на 2, получим $x + y + z + t = 32$, разбивая множество клеток, не примыкающих к горизонтальным сторонам доски на 12 квадратов 2 на 2, имеем $z + t = 24$, разбивая множество клеток, не примыкающих к вертикальным сторонам доски на 12 квадратов 2 на 2, имеем $y + t = 24$, разбивая множество клеток, вообще не примыкающих к сторонам доски на 9 квадратов 2 на 2, имеем $t = 18$. Отсюда $t = 18, y = z = 6, x = 2$.

8.5. Ответ. 24.
Рассмотрим наибольшие возможные суммы цифр трёхзначных чисел. Будем обозначать число за n, а сумму его цифр – за $S(n)$.
а) $S(n) = 27$, тогда $n = 999$. Остаток от деления n на $S(n)$ равен 0.
б) $S(n) = 26$, тогда $n = 998, 989, 899$. Остатки от деления n на $S(n)$ равны, соответственно, 10,1 и 15.

в) $S(n)=25$, тогда достаточно рассмотреть $n=799$. Остаток от деления n на $S(n)$ равен при этом 24, это и будет максимум. Большее значение могло быть только при большей $S(n)$, но мы их все уже рассмотрели.

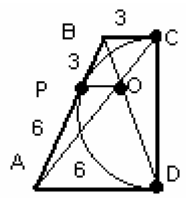
8.6. Ответ. 28.
Занумеруем кучки в порядке возрастания в них числа камней. Если раскладывать первую из кучек, то, чтобы уравнять остальные, в ней должно быть не менее 1+2+…+6=21 камня. Действительно, в седьмую, чтобы уравнять её с восьмой, нужно добавить не менее одного камня, в шестую – не менее двух,…, во вторую – не менее шести. Кроме того, поскольку все кучки различны, восьмая кучка превосходит первую не меньше, чем на семь камней. Итого, в ней должно быть не менее 28 камней.
Пример, когда это число достигается, привести несложно: в первой кучке 21 камень, во второй 22 камня,…, в восьмой 28 камней. Непосредственно проверяется, что при раскладывании каждой кучки по остальным можно получить во всех по 28 камней.

Решения задач заключительного этапа
Всесибирской олимпиады школьников 2010-2011 г.г. по математике
9 класс

9.1. Ответ. 1 килограмм 12%-процентного раствора.
Обозначим массу исходного раствора за x кг, а концентрацию за a%. Добавляя 1 кг 20%-ого раствора, получим: $\left(\frac{ax}{100}+\frac{20}{100}\right)\Big/(x+1)=16/100$, откуда $ax+4=16x$. В числителе левой части стоит сумма масс соли в исходном и добавленном растворах. Добавляя 2 кг 9%-ого раствора, получим: $\left(\frac{ax}{100}+\frac{18}{100}\right)\Big/(x+2)=10/100$, откуда $ax-2=10x$. Отсюда $x=1, a=12$.

9.2. Ответ. Нет, не мог.
Общее количество посланных открыток, очевидно, равно общему количеству полученных открыток. Если бы каждый получил по 3 открытки, общее число полученных открыток было бы равно $3\cdot 29=87$ - нечётному числу, в то время, как по условию каждый послал чётное количество открыток и общее количество посланных открыток должно было быть чётным – противоречие.

9.3. Ответ. 2 см.
Заметим, что отрезки *AD*, *AP*, *BC* и *BP* являются касательными к окружности из условия, поэтому $AP=AD=6$ см, $BP=BC=3$см. Из подобия треугольников *AOD* и *COB* следует, что $\frac{BO}{OD}=\frac{BC}{AD}=\frac{BP}{AP}=\frac{1}{2}$, следовательно, отрезок *OP* параллелен основаниям трапеции. Из подобия треугольников *BOP* и *BDA* получаем $OP=AD\cdot\frac{BP}{BA}=6\cdot\frac{3}{9}=2$ см.



9.4. Ответ. 24.
Рассмотрим наибольшие возможные суммы цифр трёхзначных чисел. Будем обозначать число за n, а сумму его цифр – за $S(n)$

а) $S(n)=27$, тогда $n=999$. Остаток от деления n на $S(n)$ равен 0.

б) $S(n)=26$, тогда $n=998{,}989{,}899$. Остатки от деления n на $S(n)$ равны, соответственно, 10,1 и 15.

в) $S(n) = 25$, тогда достаточно рассмотреть $n = 799$. Остаток от деления n на $S(n)$ равен при этом 24, это и будет максимум. Большее значение могло быть только при большей $S(n)$, но мы их все уже рассмотрели.

9.5. Ответ. $c \geq \dfrac{1}{4}$.

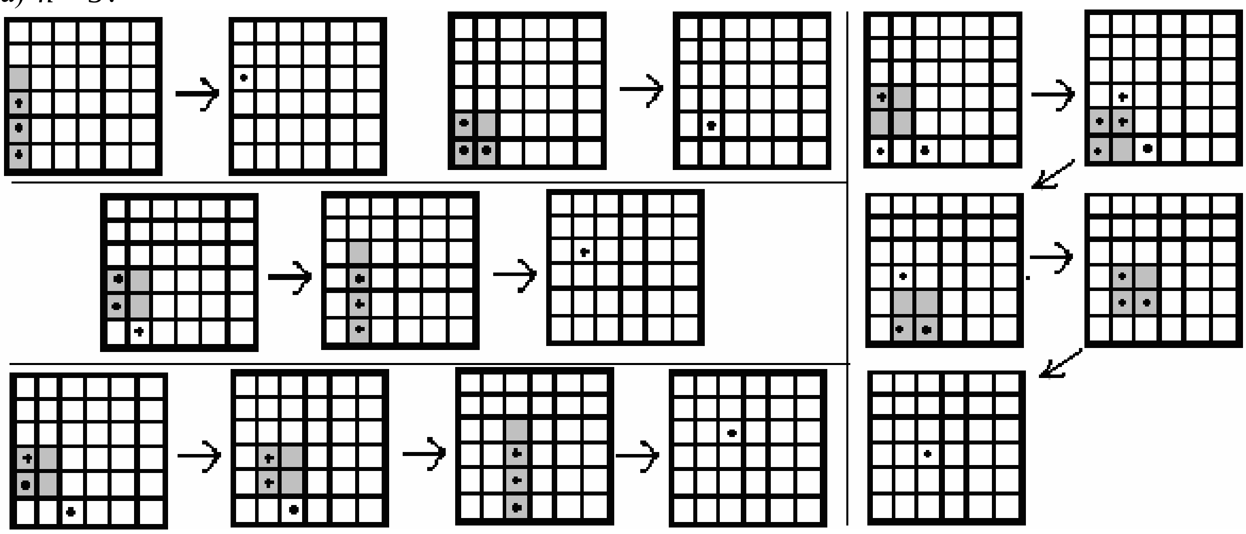
С самого начала отметим, что $c \geq 0$, в противном случае при $0 < b < a < |c|$ под корнями возникнут отрицательные выражения.

Перепишем исходное неравенство в виде $a - b > \sqrt{a+c} - \sqrt{b+c}$. Заметим, что $a - b = (a+c) - (b+c) = (\sqrt{a+c})^2 - (\sqrt{b+c})^2 = (\sqrt{a+c} - \sqrt{b+c})(\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c})$, поделим обе части на положительное число $\sqrt{a+c} - \sqrt{b+c}$. Получим, что исходное неравенство эквивалентно $\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c} > 1$. Очевидно, что при $c \geq \dfrac{1}{4}$ это неравенство выполнено. Если же $c < \dfrac{1}{4}$, то взяв любые $0 < b < a < \dfrac{1}{4} - c$, получим $\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c} < 1$.

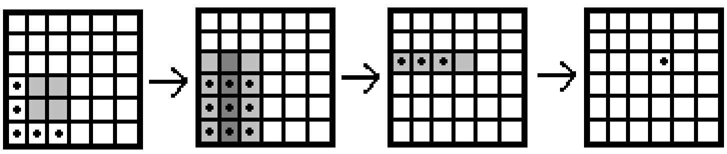
9.6. Ответ. Могут остаться 0,1 или 2 крестика.

Применим стратегию вытеснения крестиков в левый нижний угол доски. Изменяя, при необходимости, знаки под полосками длины 4, несложно добиться того, что во всех клетках доски, кроме квадрата 3 на 3 в левом нижнем углу, стояли нолики. Затем, изменяя, при необходимости, знаки под квадратами 2 на 2 в четырёх клетках правого верхнего угла этого квадрата 3 на 3, загоняем крестики в «уголок» из пяти клеток, три из которых составляют три левых клетки нижней горизонтали, и три – три нижних клетки левой вертикали. Далее рассмотрим, сколько крестиков могло остаться в этом уголке, обозначим их число за $0 \leq n \leq 5$. Покажем, что при $n \geq 3$ общее количество крестиков можно уменьшить до двух, или меньше. На рисунке ниже разобраны все возможные различные случаи. Крестики изображены точками, нолики – пустые клетки, операции – затемнённые клетки.

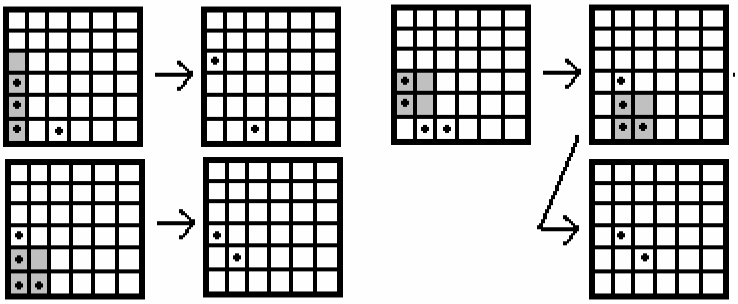
а) $n = 3$.



б) $n = 5$.



в) $n = 4$.



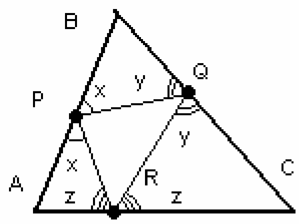
Итак, мы доказали, что должно остаться не более двух крестиков. Покажем теперь, что каждая из оставшихся возможностей реализуется. Раскрасим доску в шахматном порядке. При каждой операции мы меняем знаки в чётном количестве чёрных клеток и в чётном количестве белых клеток, поэтому чётность числа крестиков, стоящих в чёрных клетках и чётность числа крестиков, стоящих в белых клетках, не меняется. Следовательно, если на доске с самого начала стоит только один крестик, либо один чёрный и один белый крестик, то их количество уменьшить уже нельзя, поэтому 1 и 2 в качестве неуменьшаемого количества крестиков реализуются. Очевидно, реализуется и 0.

Решения задач заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2010-2011 г.г. по математике 10 класс

10.1. Ответ. Нет, не мог.
Общее количество посланных открыток, очевидно, равно общему количеству полученных открыток. Если бы каждый получил по 3 открытки, общее число полученных открыток было бы равно $3\cdot 29=87$ - нечётному числу, в то время, как по условию каждый послал чётное количество открыток и общее количество посланных открыток должно было быть чётным – противоречие.

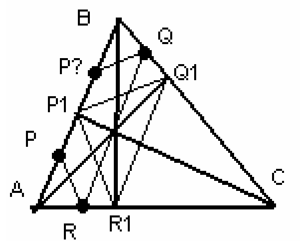
10.2. Ответ. $x=1$.
Очевидно, $x=1$ является решением исходного уравнения. Других решений у него быть не может. Действительно, при $x<0$ левая часть отрицательна, так как содержит только нечётные степени x с положительными коэффициентами. При $0\le x<1$ левая часть будет меньше суммы коэффициентов, равной 10, а при $x>1$ левая часть будет больше суммы коэффициентов, равной 10. Во всех трёх случаях равенство невозможно. Решающим моментом является монотонное возрастание функции $y=x^n$ при нечётном n.

10.3. Ответ. $x+y\ge 0$ либо $x=y$**.**
Перепишем исходное неравенство в виде $x+y-\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}=(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})^2\ge 0$, что, очевидно, эквивалентно $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\ge 0$ и $x+y\ge 0$, либо $\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=0$ и $x=y$.



10.4. Обозначим углы $\angle APR, \angle BQP, \angle CRQ$ треугольника ABC за x, y, z соответственно. Рассмотрев углы в треугольниках $\Delta APR, \Delta BQP, \Delta CRQ$, получаем для неизвестных x, y, z систему уравнений: $x+y=180^\circ-\angle B, y+z=180^\circ-\angle C, x+z=180^\circ-\angle A$, откуда $x=\angle C, y=\angle A, z=\angle B$.
Убедимся, что такими и должны быть эти углы в предположении, что P, Q и R - основания высот треугольника ABC. В этом случае углы APC и AQC - прямые, поэтому

четырёхугольник $APQC$ - вписанный, следовательно, $\angle BPQ = 180^\circ - \angle APQ = \angle ACQ = \angle C$ и $\angle BQP = 180^\circ - \angle PQC = \angle PAC = \angle A$ - совпадают, соответственно, с x и y. Аналогично с остальными углами.



Таким образом, стороны треугольника PQR параллельны сторонам треугольника, образованного основаниями высот треугольника ABC. Обозначим основания этих высот, опущенных на стороны AB, BC, AC , соответственно за P_1, Q_1, R_1. Допустим, точка P отлична от P_1, можно считать, P лежит внутри отрезка AP_1. Тогда $PR \parallel P_1R_1, RQ \parallel R_1Q_1, QP \parallel Q_1P_1$, поэтому R лежит внутри отрезка AR_1, Q лежит внутри отрезка BQ_1, P лежит внутри отрезка BP_1, чего быть не может. Полученное противоречие показывает, что точка P не лежит внутри отрезка AP_1. Аналогично доказывается, что точка P не лежит внутри отрезка BP_1, следовательно, P совпадает с P_1 и является основанием высоты к стороне AB. Так же рассуждаем для точек Q и R.

10.5. Ответ. $n = 3,4$.

По условию, $n \geq 3$. Покажем, что из любых пяти натуральных чисел всегда можно выбрать три, сумма которых делится на три. Рассмотрим остатки от деления этих чисел на 3. Если среди пяти чисел представлены все остатки 0,1 и 2, то, выбрав для каждого остатка по одному числу, получим 3 числа, сумма которых делится на 3. Если среди пяти чисел представлены не более двух из остатков 0,1 и 2, то один из остатков представлен не менее, чем тремя числами, взяв их, снова получим 3 числа, сумма которых делится на 3. Данное рассуждение доказывает, что $n \leq 4$.

Чтобы убедиться в верности ответа, нужно привести примеры для найденных значений n. Для $n = 3$ годится набор чисел 1,3,7, для $n = 4$ подходит набор чисел 1,3,7,9.

10.6. Ответ. Ломаная всегда пересекает 5 домино.

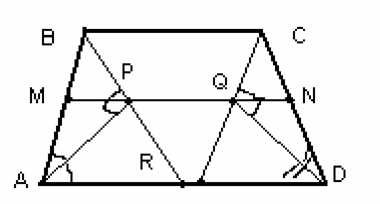
Окрасим доску в чёрный и белый цвета в шахматном порядке, считая левую нижнюю клетку чёрной. Каждое домино закрывает по одной белой и одной чёрной клетке. Часть доски, расположенная под ломаной в правом нижнем углу (далее будем называть его Углом), содержит 25 белых и 20 чёрных клеток. Домино, содержащие чёрные клетки Угла не могут пересекать ломаную, поэтому они содержат 20 чёрных и 20 белых клеток Угла. Следовательно, оставшиеся 5 белых клеток Угла накрыты домино, чёрные клетки которых не лежат в Угле. Естественно, в точности они и пересекаются ломаной.

Решения задач заключительного этапа Всесибирской олимпиады школьников 2010-2011 г.г. по математике 11 класс

11.1. Ответ. Васе 26 лет, Пете 20 лет.

Обозначим возрасты Васи и Пети в данный момент за x и y лет соответственно. В тот момент, когда сумма их возрастов будет вдвое больше, чем сейчас, им исполнится $\frac{3x+y}{2}$ и $\frac{x+3y}{2}$ лет соответственно. Далее, в тот момент, когда Васе было столько лет, сколько Пете сейчас, Пете было $y-(x-y)=2y-x$ лет, по условию, $\frac{3x+y}{2}=\frac{7}{2}(2y-x)$, откуда $x=\frac{13}{10}y$. А вот через 4 года Васе будет $\frac{13}{10}y+4=\frac{3}{2}y$ лет, откуда $y=20, x=26$ лет.

11.2. Ответ. PQ = 6 см.



Продлим BP до пересечения со стороной AD в точке R, тогда $\angle ARB = \angle RBC = \angle ABR$, и треугольник ABR – равнобедренный. Следовательно, биссектриса AP является и медианой к стороне BR, значит, точка P - середина BR и лежит на средней линии трапеции $ABCD$. Кроме того, сумма углов ABP и BAP равна $\frac{1}{2}(\angle BAD + \angle ABC) = \frac{1}{2}180^\circ = 90^\circ$, значит треугольник ABP - прямоугольный с гипотенузой AB. Значит, расстояние от середины его гипотенузы M до P равно $\frac{AB}{2} = \frac{3}{2}$, и отрезок MP лежит на средней линии трапеции. Аналогично, треугольник CDQ - прямоугольный и отрезок, соединяющий Q с серединой N стороны CD равен $\frac{CD}{2} = \frac{5}{2}$ и лежит на средней линии трапеции. Следовательно, $PQ = \frac{AD+BC}{2} - \frac{AB+CD}{2} = 6$ см.

11.3. Заметим, что $\frac{\pi}{16} + \frac{7\pi}{16} = \frac{3\pi}{16} + \frac{5\pi}{16} = \frac{\pi}{2}$, поэтому левую часть можно переписать в виде

$$\sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} = (\sin^2\frac{\pi}{16})^2 + (\cos^2\frac{\pi}{16})^2 + (\sin^2\frac{3\pi}{16})^2 + (\cos^2\frac{3\pi}{16})^2 =$$

$$(\sin^2\frac{\pi}{16} + \cos^2\frac{\pi}{16})^2 - 2\sin^2\frac{\pi}{16}\cos^2\frac{\pi}{16} + (\sin^2\frac{3\pi}{16} + \cos^2\frac{3\pi}{16})^2 - 2\sin^2\frac{3\pi}{16}\cos^2\frac{3\pi}{16} =$$

$= 2 - \frac{\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}}{2}$. Аналогично, заметим, что $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$, и перепишем последнюю сумму, как $2 - \frac{\sin^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{\pi}{8}}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, что и требовалось доказать.

11.4. Ответ. $c \geq \frac{1}{4}$.

С самого начала отметим, что $c \geq 0$, в противном случае при $0 < b < a < |c|$ под корнями возникнут отрицательные выражения.

Перепишем исходное неравенство в виде $a - b > \sqrt{a+c} - \sqrt{b+c}$. Заметим, что $a - b = (a+c) - (b+c) = (\sqrt{a+c})^2 - (\sqrt{b+c})^2 = (\sqrt{a+c} - \sqrt{b+c})(\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c})$, поделим обе части на положительное число $\sqrt{a+c} - \sqrt{b+c}$. Получим, что исходное неравенство эквивалентно $\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c} > 1$. Очевидно, что при $c \geq \frac{1}{4}$ это неравенство выполнено. Если же $c < \frac{1}{4}$, то взяв любые $0 < b < a < \frac{1}{4} - c$, получим $\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c} < 1$.

11.5. Ответ. $f(x) = 2x + 1$.

Подставим в тождество вместо x число $x - f(0)$, а вместо y число 0, получим $f(x) = 2x + 3 - 2f(0)$ - линейная функция. Подставим в последнее выражение вместо x число 0, получим $f(0) = 1$. Следовательно, $f(x) = 2x + 3 - 2f(0) = 2x + 1$.

Необходимо отметить, что мы нашли пока только кандидата на роль ответа, пусть даже и единственного. Обязательно нужно убедиться в том, что это действительно ответ задачи, проверив выполнение тождества из условия для всех x и y: $f(x+f(y))=2(x+2y+1)+1=2x+4y+3$ - действительно, выполнено. Важность проверки показывает пример: если тождество в условии поменять на похожее $f(x+f(y))=2x+y+3$, то кандидат на роль ответа будет тем же, но он не будет удовлетворять самому тождеству! Дело в том, что при решении использовалось предположение о существовании решения, приводящее к ответу, а во втором случае это предположение оказывается неверным.

11.6. Ответ. 100.

Заметим, что каждый город не связан напрямую авиалиниями не более, чем с 9 городами. В противном случае, взяв город и 10 городов, не соединённых с ним, получим 11 городов, нарушающих условие задачи. Значит, из каждого города выходят не менее 10 авиалиний, а общее число авиалиний будет не меньше $\frac{20\cdot 10}{2}=100$.

С другой стороны, разбив города на две группы по 10 в каждой и напрямую связав города одной группы в точности со всеми городами другой группы, получим пример, когда авиалиний ровно 100. Любые 11 выбранных городов в этом случае содержат два города разных групп, допустим, А и Б соответственно. Все города первой группы напрямую связаны с Б, все города второй группы напрямую связаны с А, и А и Б связаны напрямую. Пусть В и Г два произвольных выбранных города. Для проезда из В в Г нужно выбрать, соответственно, маршрут:

а) Если В и Г в первой группе, то В-Б-Г,

б) Если В и Г во второй группе, то В-А-Г,

в) Если В и Г в разных группах, то они напрямую соединены авиалинией по построению.

Другой пример получается, если расположить 20 точек на окружности и соединить хордами те из них, между которыми расположены не менее четырёх точек, кроме диаметрально противоположных.