

**Всесибирская олимпиада школьников 2010-2011 г.г. по математике**  
**Заочный этап**  
**8 класс**

**8.1.** Для нумерации всех страниц книги потребовалось 996 цифр. Сколько страниц в книге?

**8.2.** Нарисуйте замкнутую шестизвенную ломаную такую, что каждое её звено пересекается ровно с одним другим. Звенья должны пересекаться по внутренним точкам, а не по вершинам. Замкнутая ломаная – у которой конец последнего звена совпадает с началом первого.

**8.3.** Из горячего крана ванна полностью заполняется водой за 23 минуты, а из холодного – за 17 минут. Наполняя ванну, Петя сначала открыл горячую воду. Через какое количество минут он должен открыть холодную воду, чтобы к моменту наполнения ванны соотношение горячей воды в ней было в полтора раза больше, чем холодной?

**8.4.** На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  параллелограмма  $ABCD$  соответственно выбраны точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $S$  такие, что отрезок  $PR$  параллелен стороне  $AD$ , отрезок  $QS$  параллелен стороне  $AB$ , а их точка пересечения  $M$  лежит на диагонали  $AC$ . Доказать, что площади параллелограммов  $PBQM$  и  $SMRD$  равны.

**8.5.** На столе гербами вниз лежат несколько пятак. За один раз разрешается перевернуть все, кроме одного, в противоположное положение: если пятак лежал гербом вниз, то перевернуть гербом вверх, а если лежал гербом вверх – то перевернуть гербом вниз. Можно ли за несколько раз перевернуть все пятаки гербами вверх, если их:

- а) Девять штук,
- б) Десять штук?

**8.6.** Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди чисел от 1 до 100 так, чтобы сумма любых двух выбранных делилась на 3?

**Всесибирская олимпиада школьников 2010-2011 г.г. по математике**  
**Заочный этап**  
**9 класс**

**9.1.** Для нумерации всех страниц книги потребовалось 996 цифр. Сколько страниц в книге?

**9.2.** Из горячего крана ванна полностью заполняется водой за 23 минуты, а из холодного – за 17 минут. Наполняя ванну, Петя сначала открыл горячую воду. Через какое количество минут он должен открыть холодную воду, чтобы к моменту наполнения ванны соотношение горячей воды в ней было в полтора раза больше, чем холодной?

**9.3.** В трапеции одна из боковых сторон вдвое больше другой, а сумма углов при большем основании равна 120 градусов. Найдите эти углы.

**9.4.** Найти все решения уравнения:  $x^2 - [x] - 2 = 0$ . Здесь  $[x]$  обозначает целую часть числа  $x$  - наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ .

**9.5.** В какое наибольшее число цветов можно раскрасить клетки квадрата 3 на 3 так, чтобы для любой пары цветов нашлись две соседние по стороне клетки, окрашенные в эти цвета?

**9.6.** Какое наибольшее количество чисел можно выбрать среди чисел от 1 до 100 так, чтобы сумма любых двух выбранных не делилась на 3?

**Всесибирская олимпиада школьников 2010-2011 г.г. по математике**

**Заочный этап**

**10 класс**

**10.1.** Докажите, что из любых 2011 целых чисел всегда можно вычеркнуть одно так, что сумма оставшихся будет чётной.

**10.2.** Из пунктов А и Б, расстояние между которыми 60 километров, в направлении пункта В одновременно выехали два поезда, которые через некоторое время одновременно прибыли в В. Если бы один из них ехал быстрее на 25 км в час, а другой – на 20 км в час, то их прибытие в В тоже было бы одновременным, но на 2 часа раньше. Найти первоначальные скорости поездов.

**10.3.** Середины последовательных сторон произвольного выпуклого четырёхугольника  $ABCD$  образуют выпуклый четырёхугольник  $PQRS$ . Найти отношение площадей  $ABCD$  и  $PQRS$ .

**10.4.** На столе гербами вниз лежат несколько пятак. За один раз разрешается перевернуть все, кроме одного, в противоположное положение: если пятак лежал гербом вниз, то перевернуть гербом вверх, а если лежал гербом вверх – то перевернуть гербом вниз. Можно ли за несколько раз перевернуть все пятаки гербами вверх, если их:

- а) Девять штук,
- б) Десять штук?

**10.5.** Положительные числа  $a$  и  $b$  таковы, что  $a + b > 4$ . Доказать, что  $\frac{a}{b} > 3 - b$ .

**10.6.** Действительные числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют соотношениям:  
 $x^2 + xy + y^2 = 4$ ,  $x^4 + x^2y^2 + y^4 = 8$ . Найти значение выражения  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ .

**Всесибирская олимпиада школьников 2010-2011 г.г. по математике**

**Заочный этап**

**11 класс**

**11.1.** Докажите, что из любых 2011 целых чисел всегда можно вычеркнуть одно так, что сумма оставшихся будет чётной.

**11.2.** Из пунктов А и Б, расстояние между которыми 60 километров, в направлении пункта В одновременно выехали два поезда, которые через некоторое время одновременно прибыли в В. Если бы один из них ехал быстрее на 25 км в час, а другой – на 20 км в час, то их прибытие в В тоже было бы одновременным, но на 2 часа раньше. Найти первоначальные скорости поездов.

**11.3.** В четырёхугольнике  $ABCD$  длина стороны  $AB$  равна 12 см, синус угла  $BAC$  равен 0,33, синус угла  $ADB$  равен 0,44. Сумма углов  $BAD$  и  $BCD$  равна 180 градусов. Найти длину стороны  $BC$ .

**11.4.** В ряду всех натуральных чисел от 1 до 2011 стёрли все, делящиеся на 2 и все, делящиеся на 7. Какое число стоит теперь на 500-ом месте?

**11.5.** Вычислить:  $\frac{2^3 - 1}{2^3 + 1} \cdot \frac{3^3 - 1}{3^3 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$ .

**11.6.** Доказать, что, если какие-то три из следующих пяти уравнений имеют общий корень, то и все пять уравнений имеют общий корень:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0,$$

$$bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + a = 0,$$

$$cx^4 + dx^3 + ex^2 + ax + b = 0, \text{ Здесь все коэффициенты } a, b, c, d, e \text{ не равны нулю.}$$

$$dx^4 + ex^3 + ax^2 + bx + c = 0,$$

$$ex^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$