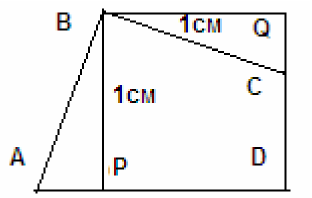
**Решения задач первого этапа**
**Всесибирской олимпиады школьников по математике 2010 г.**
**9 класс**

**1. Ответ:** Мне 20 лет, тебе 15 лет**.**
Пусть мне сейчас $x$ лет, тогда тебе $35-x$, а когда мне было $35-x$ лет, то тебе, по условию, $\frac{x}{2}$. Но времени и для меня и для тебя прошло поровну, поэтому получаем уравнение $x-(35-x)=(35-x)-\frac{x}{2}$, из которого $x=20$.

**2. Ответ:** $x=\pm 4, y=1$ и $x=\pm 4, y=-3$**.**
Преобразуем исходное уравнение к виду $x^2-(y+1)^2=12=(x-y-1)(x+y+1)$. Заметив, что обе скобки имеют одинаковую чётность, получим, что одна из них равна $\pm 2$, а вторая $\pm 6$. Разобрав все четыре варианта, найдём четыре ответа: $x=\pm 4, y=1$ и $x=\pm 4, y=-3$

**3. Ответ:** 1 см$^2$**.** *A*
Опустим из вершины *B* перпендикуляр на продолжение стороны *CD* за вершину *C,* обозначим основания перпендикуляров из *B* на *AD* и *CD* соответственно, за *P* и *Q*. Углы *ABC* и *PBQ* прямые, поэтому углы *ABP* и *CBQ* равны, следовательно, прямоугольные треугольники *ABP* и *CBQ* равны по гипотенузе и одному из прилегающих углов. Следовательно, площадь *ABCD* равна площади *PBQD,* который является квадратом со стороной 1




**4.** Запишем исходное число $A$ в виде $A=10B+a$, тогда $B+4a=40B+4a-39B=4A-39B$ -делится на 13 тогда и только тогда, когда $A$ делится на 13.

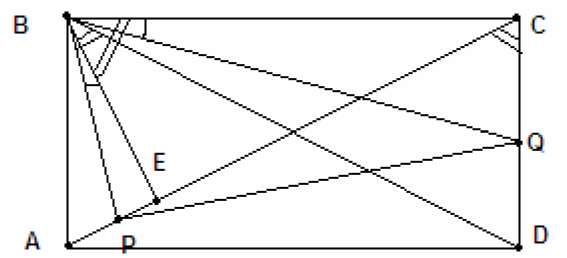
**5.** Каждая задача решена не менее, чем пятью школьниками, всего не менее сорока решений, следовательно, есть школьник, решивший не менее пяти задач, назовём его А.
Если А решил все задачи, то он вместе с любым школьником образует искомую пару.
В противном случае рассмотрим задачи, которые он не решил, их не более трёх, назовём их *оставшимися*, и остальных семь школьников. Если один из них решил все оставшиеся, то он вместе с А образует искомую пару. Если каждый из них не решил хотя бы одну из оставшихся задач, то одну из оставшихся задач не решили хотя бы трое из них. Но её не решил и А, всего не меньше четырёх не решивших – противоречие.

**Решения задач первого этапа**
**Всесибирской олимпиады школьников по математике 2010 г.**
**10 класс**

**1. Ответ:** В 14-00 **.**
Обозначим расстояние от Останкино до Шаболовки за Р, а скорости зверья за Х, С и Ф км в час соответственно по первым буквам имён. Тогда по условию, Филя и Степашка движутся в одном направлении, а Филя и Хрюша – навстречу, и разделяют их в полдень: первую пару треть Р, а вторую – ровно Р. Составляем уравнения $\frac{P/3}{\Phi - C} = 1, \frac{P}{\Phi + X} = \frac{3}{2}$, откуда $X + C = \frac{P}{3}$ и время, за которое Хрюша и Степашка преодолеют разделяющие их две трети Р, двигаясь навстречу, равно $\frac{2P/3}{X + C} = 2$. Значит, встретятся они в $12 + 2 = 14$ часов, время, ясен пень, московское.

**2.** Среди шести последовательных натуральных чисел, не меньших 10 найдётся число *n*, делящееся на 6 и не меньшее 12, оно и является искомым: $n < \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{6} + 1 = n + 1$.

**3.** Заметим, что треугольники *ABE* и *DBC* подобны, откуда легко следует равенство углов *PBE* и *QBC*. Значит, $\angle PBQ = 90^\circ - \angle ACB = \angle ACD = \angle PCQ$. Следовательно, четырёхугольник *PBCQ* - вписанный, поэтому $\angle BPQ = 180^\circ - \angle BCD = 90^\circ$, что и требовалось доказать.




Заметим, что у данной задачи есть не очень длинное решение методом координат, либо с помощью несколько раз применённой теоремы Пифагора, к которой, собственно, весь метод координат и сводится.

**4.** Заметим, что, если уравнение $f(x) = x$ не имеет действительных корней, то либо $f(x) > x$ на всей числовой оси, либо $f(x) < x$ на всей числовой оси. Тогда в первом случае имеем $f(f(x)) > f(x) > x$, во втором $f(f(x)) < f(x) < x$, следовательно, уравнение $f(f(x)) = x$ решений не имеет.

**5.** Назовём расстоянием от одного города до другого минимальное число дорог, которое нужно проехать, чтобы попасть из одного в другой. Выберем два города, находящихся на максимальном среди всех расстоянии друг от друга, назовём их А и Б. Покажем, что при закрытии всех дорог, выходящих из Б, из любого оставшегося города С можно будет проехать в А. Рассмотрим *кратчайший* путь из А в С до закрытия дорог, он не может проходить через Б, иначе путь от А до С будет длиннее, чем из А до Б –противоречие с выбором Б. Следовательно, при закрытии дорог, выходящих из Б, кратчайший путь из А в С не пострадает. Таким образом, после закрытия дорог через Б всегда можно из любого оставшегося проехать в любой другой через А.

**Решения задач первого этапа**
**Всесибирской олимпиады школьников по математике 2010 г.**
**11 класс**

**1. Ответ:** $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z$ **.**

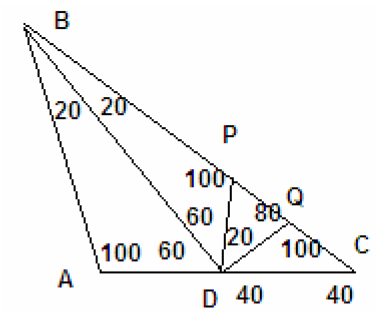
Преобразуем исходное уравнение к виду: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{\sin^2 2x}{2} = \frac{1}{2}$, откуда $\sin^2 2x = 1$. Отсюда $x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in Z$.

**2.** Сопоставим каждому счастливому билету А билет Б, каждая цифра которого равна 9 минус соответствующая цифра А. При этом билет Б тоже будет счастливым, ему будет соответствовать А, и сумма номеров А и Б равна 999999, что делится на 13. В итоге, все счастливые билеты разбиваются на пары, суммы номеров в которых делятся на 13, значит, сумма всех номеров счастливых билетов тоже делится на 13.

**3.** Заметим, что, если действительный многочлен не имеет действительных корней, то он либо положителен, либо отрицателен на всей числовой оси. Если бы оба многочлена $f(x) + g(x)$ и $f(x) - g(x)$ не имели корней, то либо их полусумма, равная $f(x)$, либо их полуразность, равная $g(x)$, не имели бы корней – противоречие с условием задачи. Первый случай имеет место, если знаки многочленов $f(x) + g(x)$ и $f(x) - g(x)$ равны, второй – когда противоположны.

**4.** Отметим на стороне ВС точки *P* и *Q* так, что угол *BDP* равен 60 градусов, а угол *CDQ* равен40 градусов. Легко заметить, что треугольники *DBQ, PDQ* и С*QD* равнобедренные, откуда *BD=BQ*, а *AD=PD=DQ=QC*, значит, $BC = BD + AD$.

Детали на рисунке.




Отметим, что, кроме этого красивого, но непростого решения, существует грамотное лобовое тригонометрическое, использующее теорему синусов для треугольников *ABD* и *ABC*.

**5. Ответ: 5.**

Докажем, что нельзя обойтись менее, чем пятью операциями. Пусть были сделаны *n* операций вычитания чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ из некоторых множеств чисел так, что в итоге получился 0. Тогда в ходе каждой операции из каждого из чисел от 1 до 30 были вычтены некоторые из чисел $a_1, a_2, ..., a_n$, то – есть каждое число от 1 до 30 было представлено в виде суммы нескольких из чисел $a_1, a_2, ..., a_n$. Число всех различных непустых способов выборки нескольких чисел из множества $a_1, a_2, ..., a_n$ равно $2^n - 1 \geq 30$, откуда $n \geq 5$. С другой стороны, пяти операций достаточно: на первом шаге будем вычитать 16 изо всех чисел, не меньших 16, затем вычитать 8 изо всех чисел, не меньших 8 и т.д.