11 КЛАСС. Вариант 1

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^9 3^{10} 5^{10}$, bc делится на $2^{14} 3^{13} 5^{13}$, ac делится на $2^{19} 3^{18} 5^{30}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

Ответ: $2^{21} 3^{21} 5^{30}$.

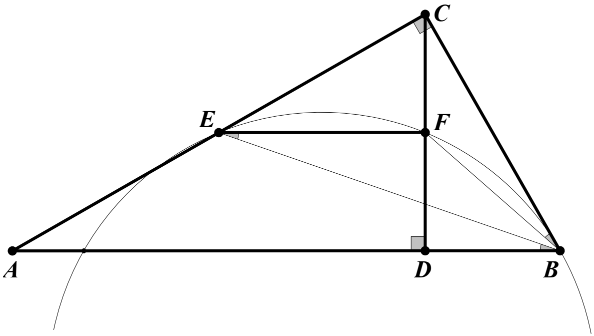
Решение. Чтобы произведение abc было минимальным, числа a, b, c не должны иметь простых делителей, отличных от 2, 3 и 5. Пусть $a = 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2}$, $c = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3}$ (показатели всех степеней – целые неотрицательные числа). Тогда $abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}$. Рассмотрим отдельно делимость на 2, 3 и 5.
1) Из того, что ab делится на 2^9, следует, что $\alpha_1+\alpha_2 \geqslant 9$. Аналогично, $\alpha_2+\alpha_3 \geqslant 14$ и $\alpha_1+\alpha_3 \geqslant 19$. Сложив эти три неравенства и разделив пополам, получаем $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geqslant \frac{9+14+19}{2} = 21$. Покажем, что значение $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 21$ достигается. Для этого возьмём $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 12$ (эти значения могут быть получены как решения системы уравнений $\alpha_1+\alpha_2 = 9$, $\alpha_2+\alpha_3 = 14$, $\alpha_1+\alpha_3 = 19$).
2) Аналогично предыдущему случаю получаем, что $\beta_1+\beta_2 \geqslant 10$, $\beta_2+\beta_3 \geqslant 13$ и $\beta_1+\beta_3 \geqslant 18$. Сложив эти три неравенства и поделив пополам, получаем $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant \frac{10+13+18}{2} = 20{,}5$. Значит, $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant 21$. Значение 21 достигается, если, например, $\beta_1 = 7$, $\beta_2 = 3$, $\beta_3 = 11$ (для того, чтобы найти показатели степеней, можно положить $\beta_2+\beta_3 = 14$, а два других неравенства обратить в равенства).
3) Из того, что ac делится на 5^{30} следует, что $\gamma_1+\gamma_3 \geqslant 30$. Заметим, что $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geqslant \gamma_1+\gamma_3 \geqslant 30$. $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ может равняться 30, если, например, $\gamma_1 = 15$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 15$.
Так как минимум каждой из трёх сумм $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_1+\beta_2+\beta_3$, $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ не зависит от оставшихся, то и минимальное значение abc равно

$$2^{\min(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} 3^{\min(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} 5^{\min(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} = 2^{21} 3^{21} 5^{30}.$$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 3 : 1$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

Ответ: $\frac{16}{3}$.

Решение. Соединим точку B с точками E и F. Так как $AB \parallel EF$, то $\angle ABE = \angle FEB$, а $\angle CBF = \angle FEB$ по теореме об угле между касательной и хордой. Поэтому $\angle ABE = \angle CBF$. Следовательно, BE и BF – соответствующие элементы в подобных прямоугольных треугольниках ABC и CBD. Значит, $\frac{AE}{CE} = \frac{CF}{DF}$. По теореме Фалеса $\frac{AE}{EC} = \frac{DF}{CF}$. Из полученных равенств следует, что $CF = DF$, поэтому F – середина CD, а так как $EF \parallel AD$, то EF – средняя линия треугольника ACD. Отсюда $S_{ACD} = 4S_{CEF}$ и



$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ABC}}{0{,}25 S_{ACD}} = \frac{4 \cdot 0{,}5 \cdot AB \cdot CD}{0{,}5 \cdot AD \cdot CD} = \frac{4AB}{AD} = 4\left(\frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD}\right) = 4\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}.$$

3. [4 балла] Решите уравнение $5 \arcsin(\cos x) = x + \frac{\pi}{2}$.

Ответ: $x \in \left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}$.

Решение. По определению равенство $b = \arcsin a$ эквивалентно соотношениям $\sin b = a$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant b \leqslant \frac{\pi}{2}$, поэтому получаем

$$\arcsin(\cos x) = \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \sin\left(\frac{x}{5} + \frac{\pi}{10}\right), \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{x}{5} + \frac{\pi}{10} \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{5} - \frac{x}{5}\right), \\ -\frac{3\pi}{5} \leqslant \frac{x}{5} \leqslant \frac{2\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pm x = \frac{2\pi}{5} - \frac{x}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -3\pi \leqslant x \leqslant 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi n}{3}, \\ x = \frac{5\pi n}{2} - \frac{\pi}{2}, \end{array}\right. \\ -3\pi \leqslant x \leqslant 2\pi, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-3\pi; -\frac{4\pi}{3}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}.$$

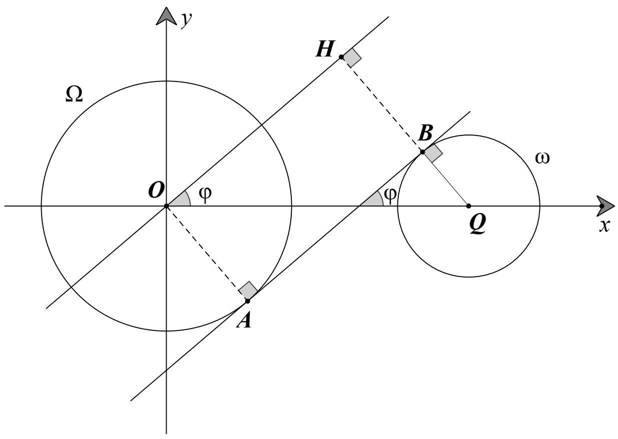
4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдется значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax + 2y - 3b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 9)(x^2 + y^2 - 12x + 32) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

Ответ: $a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

Решение. Второе уравнение системы эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2 + y^2 = 9$ и $(x-6)^2 + y^2 = 4$. Оно задаёт две непересекающиеся окружности Ω и ω – с центрами в точках $O(0;0)$ и $Q(6;0)$ и радиусами 3 и 2 соответственно. Первое уравнение системы определяет прямую $y = -\frac{a}{2}x + \frac{3b}{2}$ с угловым коэффициентом $k = -\frac{a}{2}$. При фиксированном значении a – т.е. при фиксированном угле наклона – и при $b \in \mathbb{R}$ получаем всевозможные прямые с угловым коэффициентом $k = -\frac{a}{2}$.



Чтобы система имела ровно 4 решения, прямая должна пересекать каждую из окружностей ровно в двух точках. Это возможно в том и только том случае, когда угловой коэффициент прямой по модулю меньше, чем угловой коэффициент общей внутренней касательной двух данных окружностей (тогда за счёт выбора параметра b можно подобрать такое положение прямой, что она пересекает каждую из окружностей дважды).

Проведём общую внутреннюю касательную AB к окружностям (пусть A и B – точки касания этой прямой с Ω и ω соответственно). Пусть ℓ – прямая, параллельная AB и проходящая через точку O; пусть также $\ell \cap QB = H$, $\angle HOQ = \varphi$ ($OH \parallel AB$, поэтому φ – угол наклона общей внутренней касательной). Так как $OQ = 6$, $HQ = HB + BQ = OA + BQ = 3 + 2 = 5$, то из прямоугольного треугольника HOQ имеем $OH = \sqrt{OQ^2 - HQ^2} = \sqrt{11}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{HQ}{OH} = \frac{5}{\sqrt{11}}$. С учётом сказанного выше подходят все значения углового коэффициента, по модулю меньшие, чем $\operatorname{tg}\varphi$, откуда $\left|-\frac{a}{2}\right| < \frac{5}{\sqrt{11}} \Leftrightarrow a \in \left(-\frac{10}{\sqrt{11}}; \frac{10}{\sqrt{11}}\right)$.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам $\log_3^4 x + 6\log_x 3 = \log_{x^2} 243 - 8$ и $\log_3^4(5y) + 2\log_{5y} 3 = \log_{25y^2}(3^{11}) - 8$. Найдите все возможные значения произведения xy.

Ответ: $\frac{1}{5}$.

Решение. Обозначим $\log_3 x = u$, $\log_3(5y) = v$. Так как $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x} = \frac{1}{u}$, $\log_{x^2} 243 = \frac{5}{2}\log_x 3 = \frac{5}{2u}$, $\log_{5y} 3 = \frac{1}{\log_3 5y} = \frac{1}{v}$, $\log_{25y^2}(3^{11}) = \frac{11}{2}\log_{5y} 3 = \frac{11}{2v}$, то исходные уравнения можно записать в виде

$$\begin{cases} u^4+\frac{6}{u}=\frac{5}{2u}-8, \\ v^4+\frac{2}{v}=\frac{11}{2v}-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^5+16u+7=0, \\ 2v^5+16v-7=0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. В левой части стоит возрастающая функция, а в правой части число, поэтому уравнение имеет не более одного решения. С другой стороны, любой многочлен нечётной степени имеет по крайней мере один действительный корень. Отсюда следует, что уравнение имеет ровно одно решение. Аналогично, второе уравнение имеет ровно одно решение. Если во втором уравнении сделать замену $v=-w$, то оно принимает вид $-2w^5-16w-7=0$, т.е. $2w^5+16w+7=0$, что эквивалентно первому уравнению. Это означает, что корни уравнений противоположны, следовательно, их сумма равна нулю. Тогда $\log_3 x+\log_3(5y)=0$, $\log_3(5xy)=0$, $5xy=1$, $xy=\frac{1}{5}$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-14;42)$, $Q(6;42)$ и $R(20;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $3x_2-3x_1+y_2-y_1=33$.

Ответ: 5 778.

Решение. Запишем исходное условие на координаты точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ в виде $3x_2+y_2-33=3x_1+y_1$. Так как координаты точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ являются целыми числами, то левая и правая части этого равенства могут принимать только целочисленные значения k. Пара точек $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ с целочисленными координатами удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда они лежат на параллельных прямых $y=-3x+k$ и $y=-3x+k+33$ соответственно. Далее найдём подходящие значения параметра k.
Стороны OP и QR параллелограмма лежат на прямых $y=-3x$ и $y=-3x+60$, поэтому они параллельны прямым $y=-3x+k$ и $y=-3x+k+33$. Эти прямые пересекают параллелограмм при $0\leqslant k\leqslant 60$ и $0\leqslant k+33\leqslant 60$, поэтому $k\in[0;27]$.
Выясним количество точек с целочисленными координатами на каждой из прямых вида $y=-3x+b$. Если b кратно трём (т.е. $b=3l$), то получаем прямую $y=3(-x+l)$. При любом целом x получится целое значение y, а чтобы точка оказалась в параллелограмме нужно, чтобы $0\leqslant y\leqslant 42\Leftrightarrow l-14\leqslant x\leqslant l$. При любом l этому неравенству удовлетворяет 15 целых значений x. Если b не делится на 3, то есть при $b=3l+\gamma$, где $\gamma\in\{1;2\}$, имеем $0\leqslant -3x+3l+\gamma\leqslant 42\Leftrightarrow l+\frac{\gamma}{3}-14\leqslant x\leqslant l+\frac{\gamma}{3}$. Учитывая, что $x\in\mathbb{Z}$, получаем $l-13\leqslant x\leqslant l$ – всего 14 целочисленных значений.
Если $k=3l$ (таких значений 10), то на каждой из двух прямых $y=-3x+k$ и $y=-3x+k+33$ можно выбрать по 15 точек – всего $10\cdot15\cdot15=2\,250$ пар. Если $k\neq 3l$ (таких значений 18), то на каждой из двух прямых $y=-3x+k$ и $y=-3x+k+33$ можно выбрать по 14 точек – имеем $18\cdot14\cdot14=3\,528$ пар. Итого получаем $2\,250+3\,528=5\,778$ пар.

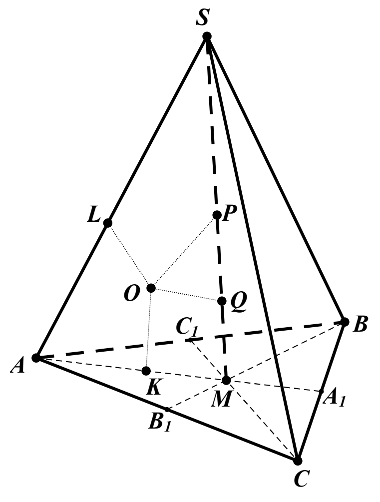
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP=MQ$, площадь треугольника ABC равна 90, $SA=BC=12$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

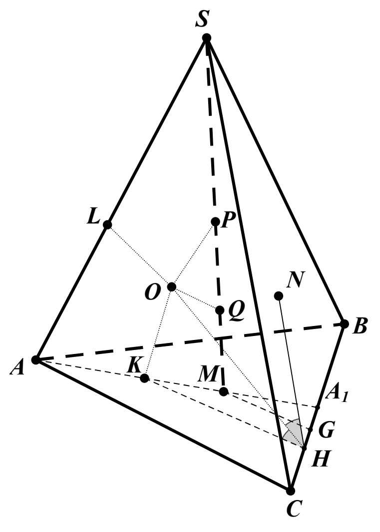
б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN=4$, а радиус сферы Ω равен 5.

Ответ: а) 2430; б) $2\operatorname{arctg}\frac{3}{5}=\arccos\frac{8}{17}$.

Решение. а) Поскольку SL — касательная к сфере Ω, а SP и SQ — секущие к ней, то по теореме о касательной и секущей $SL^2=SP\cdot SQ$. Аналогично, $MK^2=MP\cdot MQ$, а поскольку



к задаче 7а



к задаче 7б

$MQ = SP$, то $SP \cdot SQ = MP \cdot MQ$. В итоге получаем $SL^2 = SP \cdot SQ = MP \cdot MQ = MK^2$, то есть $SL = MK$. Так как $AL = AK$ как касательные к сфере Ω, проведённые из точки A, то $AM = AK + MK = AL + SL = SA = 12$, а поскольку медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2:1$ считая от вершины, то $AA_1 = \frac{3}{2}AM = 18$.
Кроме того, $A_1M = \frac{AM}{2} = 6$. При этом $A_1B = A_1C = \frac{BC}{2} = 6$, то есть $A_1M = A_1B = A_1C$. Отсюда треугольник BMC прямоугольный и $\angle BMC = 90^\circ$. Далее имеем

$$S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2BB_1}{3} \cdot \frac{2CC_1}{3} \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3}{2} S_{ABC} = 135,$$

откуда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 18 \cdot 135 = 2430$.
б) Пусть G и H — проекции точек M и K на прямую BC соответственно. Заметим, что $NH \perp BC$, потому что N и K — точки касания сферы Ω со сторонами двугранного угла пирамиды при ребре BC. Поэтому искомый угол равен $\angle NHK = 2\angle OHK$, где O — центр сферы Ω.
Далее имеем $S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MG$, откуда $MG = \frac{2S_{ABC}}{3BC} = 5$. Так как $SL = SN = 4$ как касательные к Ω, то $AK = AL = SA - SL = 8$, откуда получаем $A_1K = AA_1 - AK = 10$. Из подобия треугольников A_1MG и A_1KH имеем $KH = MG \cdot \frac{A_1K}{A_1M} = \frac{25}{3}$. Окончательно, $\operatorname{tg} \angle OHK = \frac{OK}{KH} = \frac{3}{5}$ и $\angle NHK = 2\angle OHK = 2 \operatorname{arctg} \frac{3}{5}$.

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^7 3^{11} 5^{14}$, bc делится на $2^{13} 3^{15} 5^{18}$, ac делится на $2^{14} 3^{17} 5^{43}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

Ответ: $2^{17} 3^{22} 5^{43}$.

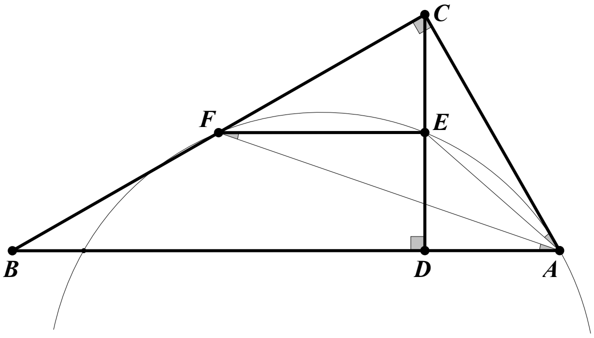
Решение. Чтобы произведение abc было минимальным, числа a, b, c не должны иметь простых делителей, отличных от 2, 3 и 5. Пусть $a = 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2}$, $c = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3}$ (показатели всех степеней – целые неотрицательные числа). Тогда $abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}$. Рассмотрим отдельно делимость на 2, 3 и 5.
1) Из того, что ab делится на 2^7, следует, что $\alpha_1+\alpha_2 \geqslant 7$. Аналогично, $\alpha_2+\alpha_3 \geqslant 13$ и $\alpha_1+\alpha_3 \geqslant 14$. Сложив эти три неравенства и разделив пополам, получаем $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geqslant \frac{7+13+14}{2} = 17$. Покажем, что значение $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 17$ достигается. Для этого возьмём $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 10$ (эти значения могут быть получены как решения системы уравнений $\alpha_1+\alpha_2 = 7$, $\alpha_2+\alpha_3 = 13$, $\alpha_1+\alpha_3 = 14$).
2) Аналогично предыдущему случаю получаем, что $\beta_1+\beta_2 \geqslant 11$, $\beta_2+\beta_3 \geqslant 15$ и $\beta_1+\beta_3 \geqslant 17$. Сложив эти три неравенства и поделив пополам, получаем $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant \frac{11+15+17}{2} = 21{,}5$. Значит, $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant 22$. Значение 22 достигается, если, например, $\beta_1 = 7$, $\beta_2 = 5$, $\beta_3 = 10$ (для того, чтобы найти показатели степеней, можно положить $\beta_1+\beta_2 = 12$, а два других неравенства обратить в равенства).
3) Из того, что ac делится на 5^{43} следует, что $\gamma_1+\gamma_3 \geqslant 43$. Заметим, что $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geqslant \gamma_1+\gamma_3 \geqslant 43$. $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ может равняться 43, если, например, $\gamma_1 = 20$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 23$.
Так как минимум каждой из трёх сумм $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_1+\beta_2+\beta_3$, $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ не зависит от оставшихся, то и минимальное значение abc равно

$$2^{\min(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} 3^{\min(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} 5^{\min(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} = 2^{17} 3^{22} 5^{43}.$$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}3$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

Ответ: 1,2.

Решение. Соединим точку A с точками E и F. Так как $AB \parallel EF$, то $\angle BAF = \angle AFE$, а $\angle CAE = \angle AFE$ по теореме об угле между касательной и хордой. Поэтому $\angle BAF = \angle CAE$. Следовательно, AF и AE – соответствующие элементы в подобных прямоугольных треугольниках ABC и ACD. Значит, $\frac{BF}{FC} = \frac{CE}{ED}$. По теореме Фалеса $\frac{BF}{FC} = \frac{ED}{CE}$. Из полученных равенств следует, $CE = ED$, поэтому E – середина CD, а так как $EF \parallel BD$, то EF – средняя линия треугольника BCD. Отсюда $S_{BCD} = 4S_{CEF}$ и



$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ACD}}{0{,}25 S_{BCD}} = \frac{4 \cdot 0{,}5 \cdot AD \cdot CD}{0{,}5 \cdot BD \cdot CD} = \frac{4AD}{BD} = 4 \cdot 0{,}3 = 1{,}2.$$

3. [4 балла] Решите уравнение $5\arccos(\sin x) = \frac{3\pi}{2} + x$.

Ответ: $x \in \left\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}\right\}$.

Решение. По определению равенство $b = \arccos a$ эквивалентно соотношениям $\cos b = a$, $0 \leqslant b \leqslant \pi$, поэтому получаем

$$\arccos(\sin x) = \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right), \\ 0 \leqslant \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \leqslant \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right), \\ 0 \leqslant \frac{x}{5} + \frac{3\pi}{10} \leqslant \pi \end{cases} \Leftrightarrow$$

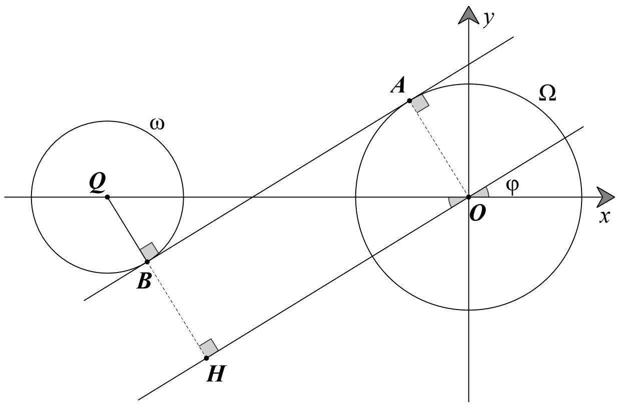
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{2} = \pm\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{x}{5}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -\frac{3\pi}{10} \leqslant \frac{x}{5} \leqslant \frac{7\pi}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3}, \\ x = \pi + \frac{5\pi n}{2}, \end{array}\right. \\ -\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{6}; \pi; \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}\right\}.$$

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдется значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} x + 3ay - 7b = 0, \\ \left(x^2 + 14x + y^2 + 45\right)\left(x^2 + y^2 - 9\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$.



Решение. Второе уравнение системы эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2 + y^2 = 9$ и $(x+7)^2 + y^2 = 4$. Оно задаёт две непересекающиеся окружности Ω и ω – с центрами в точках $O(0;0)$ и $Q(-7;0)$ и радиусами 3 и 2 соответственно. При $a = 0$ первое уравнение системы задаёт вертикальную прямую, которая не может иметь 4 общие точки с окружностями ни при каком значении b. Если $a \neq 0$, то первое уравнение определяет прямую $y = -\frac{1}{3a}x + \frac{7b}{3a}$ с угловым коэффициентом $k = -\frac{1}{3a}$. При фиксированном значении a – т.е. при фиксированном угле наклона – и при $b \in \mathbb{R}$ получаем всевозможные прямые с угловым коэффициентом $k = -\frac{1}{3a}$.

Чтобы система имела ровно 4 решения, прямая должна пересекать каждую из окружностей ровно в двух точках. Это возможно в том и только том случае, когда угловой коэффициент прямой по модулю меньше, чем угловой коэффициент общей внутренней касательной двух данных окружностей (тогда за счёт выбора параметра b можно подобрать такое положение прямой, что она пересекает каждую из окружностей дважды).

Проведём общую внутреннюю касательную AB к окружностям (пусть A и B – точки касания этой прямой с Ω и ω соответственно). Пусть ℓ – прямая, параллельная AB и проходящая через точку O; пусть также $\ell \cap QB = H$, $\angle HOQ = \varphi$ ($OH \parallel AB$, поэтому φ – угол наклона общей внутренней касательной). Так как $OQ = 7$, $HQ = HB + BQ = OA + BQ = 3 + 2 = 5$, то из прямоугольного треугольника HOQ имеем $OH = \sqrt{OQ^2 - HQ^2} = \sqrt{24}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{HQ}{OH} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$. С учётом сказанного выше подходят все значения углового коэффициента, по модулю меньшие, чем $\operatorname{tg}\varphi$, откуда $\left|-\frac{1}{3a}\right| < \frac{5}{2\sqrt{6}} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{2\sqrt{6}}{15}\right) \cup \left(\frac{2\sqrt{6}}{15}; +\infty\right)$.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам $\log_7^4(6x) - 2\log_{6x} 7 = \log_{36x^2} 343 - 4$ и $\log_7^4 y + 6\log_y 7 = \log_{y^2}\left(7^5\right) - 4$. Найдите все возможные значения произведения xy.

Ответ: $\frac{1}{6}$.

Решение. Обозначим $\log_7(6x) = u$, $\log_7 y = v$. Так как $\log_{6x} 7 = \frac{1}{\log_7 6x} = \frac{1}{u}$, $\log_{36x^2} 343 = \frac{3}{2}\log_{6x} 7 = \frac{3}{2u}$, $\log_y 7 = \frac{1}{\log_7 y} = \frac{1}{v}$, $\log_{y^2}\left(7^5\right) = \frac{5}{2}\log_y 7 = \frac{5}{2v}$, то исходные уравнения можно записать в виде

$$\begin{cases} u^4 - \frac{2}{u} = \frac{3}{2u} - 4, \\ v^4 + \frac{6}{v} = \frac{5}{2v} - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2u^5 + 8u - 7 = 0, \\ 2v^5 + 8v + 7 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. В левой части стоит возрастающая функция, а в правой части число, поэтому уравнение имеет не более одного решения. С другой стороны, любой многочлен нечётной степени имеет по крайней мере один действительный корень. Отсюда следует, что уравнение имеет ровно одно решение. Аналогично, второе уравнение имеет ровно одно решение. Если во втором уравнении сделать замену $v = -w$, то оно принимает вид $-2w^5 - 8w + 7 = 0$, т.е. $2w^5 + 8w - 7 = 0$, что эквивалентно первому уравнению. Это означает, что корни уравнений противоположны, следовательно, их сумма равна нулю. Тогда $\log_7(6x) + \log_7 y = 0$, $\log_7(6xy) = 0$, $6xy = 1$, $xy = \frac{1}{6}$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-17;68)$, $Q(2;68)$ и $R(19;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $4x_2 - 4x_1 + y_2 - y_1 = 40$.

Ответ: 11 043.

Решение. Запишем исходное условие на координаты точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ в виде $4x_2 + y_2 - 40 = 4x_1 + y_1$. Так как координаты точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ являются целыми числами, то левая и правая части этого равенства могут принимать только целочисленные значения k. Пара точек $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ с целочисленными координатами удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда они лежат на параллельных прямых $y = -4x + k$ и $y = -4x + k + 40$ соответственно. Далее найдём подходящие значения параметра k.

Стороны OP и QR параллелограмма лежат на прямых $y = -4x$ и $y = -4x + 76$, поэтому они параллельны прямым $y = -4x + k$ и $y = -4x + k + 40$. Эти прямые пересекают параллелограмм при $0 \leqslant k \leqslant 76$ и $0 \leqslant k + 40 \leqslant 76$, поэтому $k \in [0;36]$.

Выясним количество точек с целочисленными координатами на каждой из прямых вида $y = -4x + b$. Если b кратно четырём (т.е. $b = 4l$), то получаем прямую $y = 4(-x + l)$. При любом целом x получится целое значение y, а чтобы точка оказалась в параллелограмме нужно, чтобы $0 \leqslant y \leqslant 68 \Leftrightarrow l - 17 \leqslant x \leqslant l$. При любом l этому неравенству удовлетворяет 18 целых значений x. Если b не делится на 3, то есть при $b = 3l + \gamma$, где $\gamma \in \{1;2;3\}$, имеем $0 \leqslant -4x + 4l + \gamma \leqslant 68 \Leftrightarrow l + \frac{\gamma}{4} - 17 \leqslant x \leqslant l + \frac{\gamma}{4}$. Учитывая, что $x \in \mathbb{Z}$, получаем $l - 16 \leqslant x \leqslant l$ – всего 17 целочисленных значений.

Если $k = 4l$ (таких значений 10), то на каждой из двух прямых $y = -4x + k$ и $y = -4x + k + 40$ можно выбрать по 18 точек – всего $10 \cdot 18 \cdot 18 = 3\,240$ пар. Если $k \neq 4l$ (таких значений 27), то на каждой из двух прямых $y = -4x + k$ и $y = -4x + k + 40$ можно выбрать по 17 точек – имеем $27 \cdot 17 \cdot 17 = 7\,803$ пары. Итого получаем $3\,240 + 7\,803 = 11\,043$ пары.

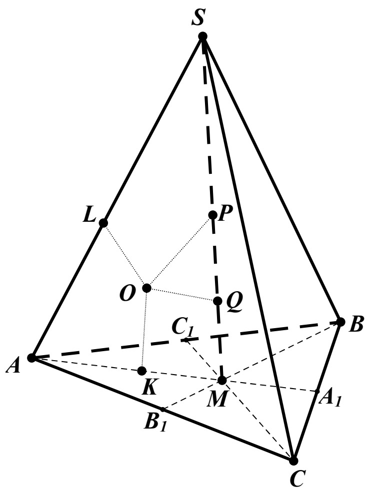
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 60, $SA = BC = 10$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

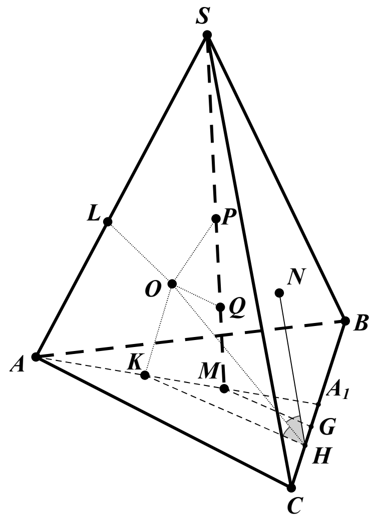
б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 3$, а радиус сферы Ω равен 4.

Ответ: а) 1350; б) $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{5}{8} = \arccos\frac{39}{89}$.

Решение. а) Поскольку SL — касательная к сфере Ω, а SP и SQ — секущие к ней, то по теореме о касательной и секущей $SL^2 = SP \cdot SQ$. Аналогично, $MK^2 = MP \cdot MQ$, а поскольку



к задаче 7а



к задаче 7б

$MQ = SP$, то $SP \cdot SQ = MP \cdot MQ$. В итоге получаем $SL^2 = SP \cdot SQ = MP \cdot MQ = MK^2$, то есть $SL = MK$. Так как $AL = AK$ как касательные к сфере Ω, проведённые из точки A, то $AM = AK + MK = AL + SL = SA = 10$, а поскольку медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2:1$ считая от вершины, то $AA_1 = \frac{3}{2}AM = 15$.

Кроме того, $A_1M = \frac{AM}{2} = 5$. При этом $A_1B = A_1C = \frac{BC}{2} = 5$, то есть $A_1M = A_1B = A_1C$. Отсюда треугольник BMC прямоугольный и $\angle BMC = 90°$. Далее имеем

$$S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2BB_1}{3} \cdot \frac{2CC_1}{3} \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3}{2}S_{ABC} = 90,$$

откуда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 15 \cdot 90 = 1350$.

б) Пусть G и H — проекции точек M и K на прямую BC соответственно. Заметим, что $NH \perp BC$, потому что N и K — точки касания сферы Ω со сторонами двугранного угла пирамиды при ребре BC. Поэтому искомый угол равен $\angle NHK = 2\angle OHK$, где O — центр сферы Ω.

Далее имеем $S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MG$, откуда $MG = \frac{2S_{ABC}}{3BC} = 4$. Так как $SL = SN = 3$ как касательные к Ω, то $AK = AL = SA - SL = 7$, откуда получаем $A_1K = AA_1 - AK = 8$. Из подобия треугольников A_1MG и A_1KH имеем $KH = MG \cdot \frac{A_1K}{A_1M} = \frac{32}{5}$. Окончательно, $\operatorname{tg} \angle OHK = \frac{OK}{KH} = \frac{5}{8}$ и $\angle NHK = 2\angle OHK = 2 \operatorname{arctg} \frac{5}{8}$.

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^8 3^{14} 5^{12}$, bc делится на $2^{12} 3^{20} 5^{17}$, ac делится на $2^{14} 3^{21} 5^{39}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

Ответ: $2^{17} 3^{28} 5^{39}$.

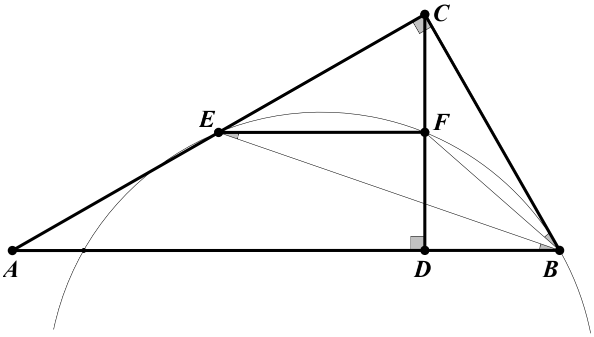
Решение. Чтобы произведение abc было минимальным, числа a, b, c не должны иметь простых делителей, отличных от 2, 3 и 5. Пусть $a = 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2}$, $c = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3}$ (показатели всех степеней – целые неотрицательные числа). Тогда $abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}$. Рассмотрим отдельно делимость на 2, 3 и 5.
1) Из того, что ab делится на 2^8, следует, что $\alpha_1+\alpha_2 \geqslant 8$. Аналогично, $\alpha_2+\alpha_3 \geqslant 12$ и $\alpha_1+\alpha_3 \geqslant 14$. Сложив эти три неравенства и разделив пополам, получаем $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geqslant \frac{8+12+14}{2} = 17$. Покажем, что значение $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 17$ достигается. Для этого возьмём $\alpha_1 = 5$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 9$ (эти значения могут быть получены как решения системы уравнений $\alpha_1+\alpha_2 = 8$, $\alpha_2+\alpha_3 = 12$, $\alpha_1+\alpha_3 = 14$).
2) Аналогично предыдущему случаю получаем, что $\beta_1+\beta_2 \geqslant 14$, $\beta_2+\beta_3 \geqslant 20$ и $\beta_1+\beta_3 \geqslant 21$. Сложив эти три неравенства и поделив пополам, получаем $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant \frac{14+20+21}{2} = 27{,}5$. Значит, $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant 28$. Значение 28 достигается, если, например, $\beta_1 = 7$, $\beta_2 = 7$, $\beta_3 = 14$ (для того, чтобы найти показатели степеней, можно положить $\beta_2+\beta_3 = 21$, а два других неравенства обратить в равенства).
3) Из того, что ac делится на 5^{39} следует, что $\gamma_1+\gamma_3 \geqslant 39$. Заметим, что $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geqslant \gamma_1+\gamma_3 \geqslant 39$. $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ может равняться 39, если, например, $\gamma_1 = 15$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 24$.
Так как минимум каждой из трёх сумм $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$, $\beta_1+\beta_2+\beta_3$, $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3$ не зависит от оставшихся, то и минимальное значение abc равно

$$2^{\min(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} 3^{\min(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} 5^{\min(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} = 2^{17} 3^{28} 5^{39}.$$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой BC в точке B, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке F, а катет AC – в точке E. Известно, что $AB \parallel EF$, $AD : DB = 5 : 2$. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника CEF.

Ответ: $\frac{28}{5}$.

Решение. Соединим точку B с точками E и F. Так как $AB \parallel EF$, то $\angle ABE = \angle FEB$, а $\angle CBF = \angle FEB$ по теореме об угле между касательной и хордой. Поэтому $\angle ABE = \angle CBF$. Следовательно, BE и BF – соответствующие элементы в подобных прямоугольных треугольниках ABC и CBD. Значит, $\frac{AE}{CE} = \frac{CF}{DF}$. По теореме Фалеса $\frac{AE}{EC} = \frac{DF}{CF}$. Из полученных равенств следует, что $CF = DF$, поэтому F – середина CD, а так как $EF \parallel AD$, то EF – средняя линия треугольника ACD. Отсюда $S_{ACD} = 4S_{CEF}$ и



$$\frac{S_{ABC}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ABC}}{0{,}25 S_{ACD}} = \frac{4 \cdot 0{,}5 \cdot AB \cdot CD}{0{,}5 \cdot AD \cdot CD} = \frac{4AB}{AD} = 4\left(\frac{AD}{AD} + \frac{DB}{AD}\right) = 4\left(1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{28}{5}.$$

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arcsin(\cos x) = \pi - 2x$.

Ответ: $x \in \left\{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\right\}$.

Решение. По определению равенство $b = \arcsin a$ эквивалентно соотношениям $\sin b = a$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant b \leqslant \frac{\pi}{2}$, поэтому получаем

$$\arcsin(\cos x) = \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{x}{5}\right), \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{10} - \frac{x}{5} \leqslant \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \cos\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{x}{5}\right), \\ -\frac{2\pi}{5} \leqslant \frac{x}{5} \leqslant \frac{3\pi}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

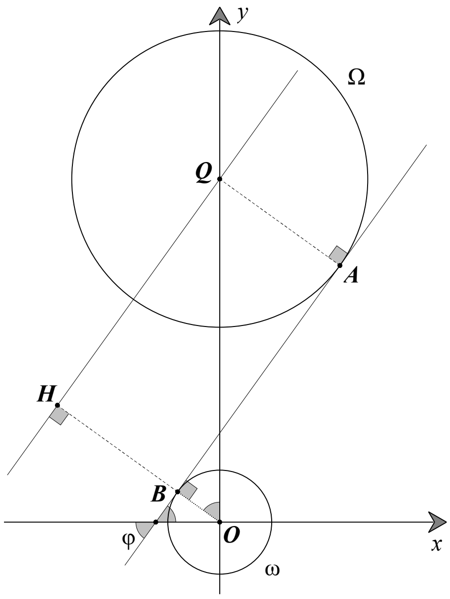
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\left(\frac{2\pi}{5} + \frac{x}{5}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -2\pi \leqslant x \leqslant 3\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + \frac{5\pi k}{2}, \\ x = \frac{5\pi k}{3} - \frac{\pi}{3}, \end{array}\right. \\ -2\pi \leqslant x \leqslant 3\pi, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-2\pi; -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}; 3\pi\right\}.$$

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдется значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} ax - 3y + 4b = 0, \\ (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 20y + 64) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$.



Решение. Второе уравнение системы эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + (y - 10)^2 = 36$. Оно задаёт две непересекающиеся окружности ω и Ω – с центрами в точках $O(0;0)$ и $Q(0;10)$ и радиусами 1 и 6 соответственно. Первое уравнение системы определяет прямую $y = \frac{a}{3}x + \frac{4b}{3}$ с угловым коэффициентом $k = \frac{a}{3}$. При фиксированном значении a – т.е. при фиксированном угле наклона – и при $b \in \mathbb{R}$ получаем всевозможные прямые с угловым коэффициентом $k = \frac{a}{3}$.

Чтобы система имела ровно 4 решения, прямая должна пересекать каждую из окружностей ровно в двух точках. Это возможно в том и только том случае, когда угловой коэффициент прямой по модулю больше, чем угловой коэффициент общей внутренней касательной двух данных окружностей (тогда за счёт выбора параметра b можно подобрать такое положение прямой, что она пересекает каждую из окружностей дважды).

Проведём общую внутреннюю касательную AB к окружностям (пусть A и B – точки касания этой прямой с Ω и ω соответственно). Пусть ℓ – прямая, параллельная AB и проходящая через точку Q; пусть также $\ell \cap OB = H$, $\angle HOQ = \varphi$ ($OH \perp AB$, поэтому φ – угол наклона общей внутренней касательной). Так как $OQ = 10$, $OH = OB + BH = OB + AQ = 1 + 6 = 7$, то из прямоугольного треугольника HOQ имеем $HQ = \sqrt{OQ^2 - OH^2} = \sqrt{51}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{HQ}{OH} = \frac{\sqrt{51}}{7}$. С учётом сказанного выше, подходят все значения углового коэффициента, по модулю большие, чем $\operatorname{tg}\varphi$, откуда $\left|\frac{a}{3}\right| > \frac{\sqrt{51}}{7} \Leftrightarrow a \in \left(-\infty; -\frac{3\sqrt{51}}{7}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{51}}{7}; +\infty\right)$.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам $\log_5^4(2x) - 3\log_{2x} 5 = \log_{8x^3} 625 - 3$ и $\log_5^4 y + 4\log_y 5 = \log_{y^3} 0{,}2 - 3$. Найдите все возможные значения произведения xy.

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Решение. Обозначим $\log_5(2x) = u$, $\log_5 y = v$. Так как $\log_{2x} 5 = \frac{1}{\log_5 2x} = \frac{1}{u}$, $\log_{8x^3} 625 = \frac{4}{3}\log_x 5 = \frac{4}{3u}$, $\log_y 5 = \frac{1}{\log_5 y} = \frac{1}{v}$, $\log_{y^3}(0{,}2) = -\frac{1}{3}\log_y 5 = -\frac{1}{3v}$, то исходные уравнения можно записать в виде

$$\begin{cases} u^4 - \frac{3}{u} = \frac{4}{3u} - 3, \\ v^4 + \frac{4}{v} = -\frac{1}{3v} - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^5 + 9u - 13 = 0, \\ 3v^5 + 9v + 13 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. В левой части стоит возрастающая функция, а в правой части число, поэтому уравнение имеет не более одного решения. С другой стороны, любой многочлен нечётной степени имеет по крайней мере один действительный корень. Отсюда следует, что уравнение имеет ровно одно решение. Аналогично, второе уравнение имеет ровно одно решение. Если во втором уравнении сделать замену $v = -w$, то оно принимает вид $-3w^5 - 9w + 13 = 0$, т.е. $3w^5 + 9w - 13 = 0$, что эквивалентно первому уравнению. Это означает, что корни уравнений противоположны, следовательно, их сумма равна нулю. Тогда $\log_5(2x) + \log_5 y = 0$, $\log_5(2xy) = 0$, $2xy = 1$, $xy = \frac{1}{2}$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-16;80)$, $Q(2;80)$ и $R(18;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе) и таких, что $5x_2 - 5x_1 + y_2 - y_1 = 45$.

Ответ: 12 106.

Решение. Запишем исходное условие на координаты точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ в виде $5x_2 + y_2 - 45 = 5x_1 + y_1$. Так как координаты точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ являются целыми числами, то левая и правая части этого равенства могут принимать только целочисленные значения k. Пара точек $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ с целочисленными координатами удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда они лежат на параллельных прямых $y = -5x + k$ и $y = -5x + k + 45$ соответственно. Далее найдём подходящие значения параметра k.
Стороны OP и QR параллелограмма лежат на прямых $y = -5x$ и $y = -5x + 90$, поэтому они параллельны прямым $y = -5x + k$ и $y = -5x + k + 45$. Эти прямые пересекают параллелограмм при $0 \leqslant k \leqslant 90$ и $0 \leqslant k + 45 \leqslant 90$, поэтому $k \in [0;45]$.
Выясним количество точек с целочисленными координатами на каждой из прямых вида $y = -5x + b$. Если b кратно пяти (т.е. $b = 5l$), то получаем прямую $y = 5(-x + l)$. При любом целом x получится целое значение y, а чтобы точка оказалась внутри параллелограмма нужно, чтобы $0 \leqslant y \leqslant 80 \Leftrightarrow l - 16 \leqslant x \leqslant l$. При любом l этому неравенству удовлетворяет 17 целых значений x. Если b не делится на 5, то есть при $b = 5l + \gamma$, где $\gamma \in \{1;2;3;4\}$, имеем $0 \leqslant -5x + 5l + \gamma \leqslant 80 \Leftrightarrow l + \frac{\gamma}{5} - 16 \leqslant x \leqslant l + \frac{\gamma}{5}$. Учитывая, что $x \in \mathbb{Z}$, получаем $l - 15 \leqslant x \leqslant l$ – всего 16 целочисленных значений.
Если $k = 5l$ (таких значений 10), то на каждой из двух прямых $y = -5x + k$ и $y = -5x + k + 45$ можно выбрать по 17 точек – всего $10 \cdot 17 \cdot 17 = 2\,890$ способов. Если $k \neq 5l$ (таких значений 36), то на каждой из двух прямых $y = -5x + k$ и $y = -5x + k + 45$ можно выбрать по 16 точек – имеем $36 \cdot 16 \cdot 16 = 9\,216$ способов. Итого получаем $2\,890 + 9\,216 = 12\,106$ способов.

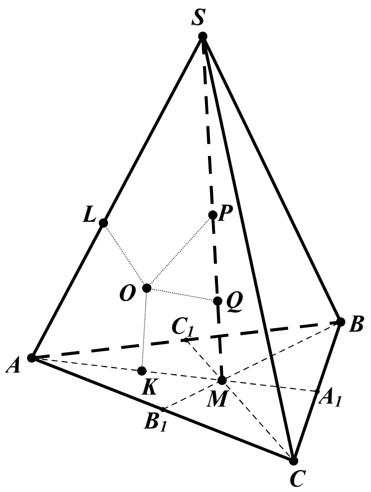
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 100, $SA = BC = 16$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

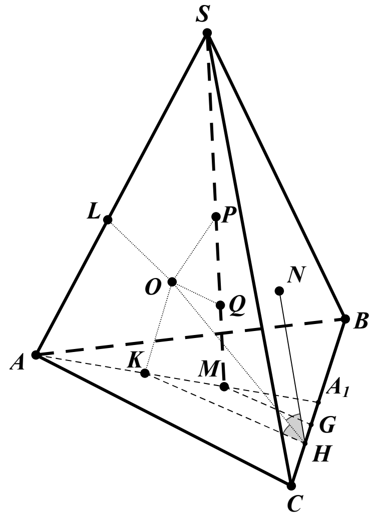
б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 4$, а радиус сферы Ω равен 5.

Ответ: а) 3600; б) $2\operatorname{arctg}\frac{4}{5} = \arccos\frac{9}{41}$.

Решение. а) Поскольку SL — касательная к сфере Ω, а SP и SQ — секущие к ней, то по теореме о касательной и секущей $SL^2 = SP \cdot SQ$. Аналогично, $MK^2 = MP \cdot MQ$, а поскольку



к задаче 7а



к задаче 7б

$MQ = SP$, то $SP \cdot SQ = MP \cdot MQ$. В итоге получаем $SL^2 = SP \cdot SQ = MP \cdot MQ = MK^2$, то есть $SL = MK$. Так как $AL = AK$ как касательные к сфере Ω, проведённые из точки A, то $AM = AK + MK = AL + SL = SA = 16$, а поскольку медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2:1$ считая от вершины, то $AA_1 = \frac{3}{2}AM = 24$.

Кроме того, $A_1M = \frac{AM}{2} = 8$. При этом $A_1B = A_1C = \frac{BC}{2} = 8$, то есть $A_1M = A_1B = A_1C$. Отсюда треугольник BMC прямоугольный и $\angle BMC = 90^\circ$. Далее имеем

$$S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot CM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2BB_1}{3} \cdot \frac{2CC_1}{3} \Rightarrow BB_1 \cdot CC_1 = \frac{3}{2} S_{ABC} = 150,$$

откуда $AA_1 \cdot BB_1 \cdot CC_1 = 24 \cdot 150 = 3600$.

б) Пусть G и H — проекции точек M и K на прямую BC соответственно. Заметим, что $NH \perp BC$, потому что N и K — точки касания сферы Ω со сторонами двугранного угла пирамиды при ребре BC. Поэтому искомый угол равен $\angle NHK = 2\angle OHK$, где O — центр сферы Ω.

Далее имеем $S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MG$, откуда $MG = \frac{2S_{ABC}}{3BC} = \frac{25}{6}$. Так как $SL = SN = 4$ как касательные к Ω, то $AK = AL = SA - SL = 12$, откуда получаем $A_1K = AA_1 - AK = 12$. Из подобия треугольников A_1MG и A_1KH имеем $KH = MG \cdot \frac{A_1K}{A_1M} = \frac{25}{4}$. Окончательно, $\operatorname{tg} \angle OHK = \frac{OK}{KH} = \frac{4}{5}$ и $\angle NHK = 2\angle OHK = 2 \operatorname{arctg} \frac{4}{5}$.

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [4 балла] Натуральные числа a, b, c таковы, что ab делится на $2^6 3^{13} 5^{11}$, bc делится на $2^{14} 3^{21} 5^{13}$, ac делится на $2^{16} 3^{25} 5^{28}$. Найдите наименьшее возможное значение произведения abc.

Ответ: $2^{18} 3^{30} 5^{28}$.

Решение. Чтобы произведение abc было минимальным, числа a, b, c не должны иметь простых делителей, отличных от 2, 3 и 5. Пусть $a = 2^{\alpha_1} 3^{\beta_1} 5^{\gamma_1}$, $b = 2^{\alpha_2} 3^{\beta_2} 5^{\gamma_2}$, $c = 2^{\alpha_3} 3^{\beta_3} 5^{\gamma_3}$ (показатели всех степеней – целые неотрицательные числа). Тогда $abc = 2^{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3} 3^{\beta_1+\beta_2+\beta_3} 5^{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3}$. Рассмотрим отдельно делимость на 2, 3 и 5.

1) Из того, что ab делится на 2^6, следует, что $\alpha_1+\alpha_2 \geqslant 6$. Аналогично, $\alpha_2+\alpha_3 \geqslant 14$ и $\alpha_1+\alpha_3 \geqslant 16$. Сложив эти три неравенства и разделив пополам, получаем $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \geqslant \frac{6+14+16}{2} = 18$. Покажем, что значение $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 18$ достигается. Для этого возьмём $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 12$ (эти значения могут быть получены как решения системы уравнений $\alpha_1 + \alpha_2 = 6$, $\alpha_2 + \alpha_3 = 14$, $\alpha_1 + \alpha_3 = 16$).

2) Аналогично предыдущему случаю получаем, что $\beta_1 + \beta_2 \geqslant 13$, $\beta_2 + \beta_3 \geqslant 21$ и $\beta_1 + \beta_3 \geqslant 25$. Сложив эти три неравенства и поделив пополам, получаем $\beta_1+\beta_2+\beta_3 \geqslant \frac{13+21+25}{2} = 29{,}5$. Значит, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \geqslant 30$. Значение 30 достигается, если, например, $\beta_1 = 8$, $\beta_2 = 5$, $\beta_3 = 17$ (для того, чтобы найти показатели степеней, можно положить $\beta_2 + \beta_3 = 22$, а два других неравенства обратить в равенства).

3) Из того, что ac делится на 5^{28} следует, что $\gamma_1+\gamma_3 \geqslant 28$. Заметим, что $\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3 \geqslant \gamma_1+\gamma_3 \geqslant 28$. $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ может равняться 28, если, например, $\gamma_1 = 15$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 13$.

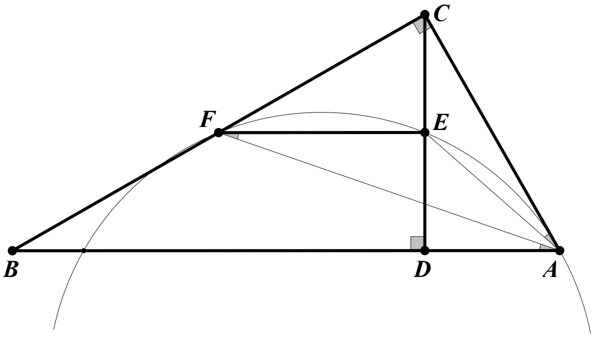
Так как минимум каждой из трёх сумм $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3$, $\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ не зависит от оставшихся, то и минимальное значение abc равно

$$2^{\min(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)} 3^{\min(\beta_1+\beta_2+\beta_3)} 5^{\min(\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3)} = 2^{18} 3^{30} 5^{28}.$$

2. [5 баллов] Дан прямоугольный треугольник ABC. Окружность, касающаяся прямой AC в точке A, пересекает высоту CD, проведённую к гипотенузе, в точке E, а катет BC – в точке F. Известно, что $AB \parallel EF$, $AB : BD = 1{,}4$. Найдите отношение площади треугольника ACD к площади треугольника CEF.

Ответ: 1,6.

Решение. Соединим точку A с точками E и F. Так как $AB \parallel EF$, то $\angle BAF = \angle AFE$, а $\angle CAE = \angle AFE$ по теореме об угле между касательной и хордой. Поэтому $\angle BAF = \angle CAE$. Следовательно, AF и AE – соответствующие элементы в подобных прямоугольных треугольниках ABC и ACD. Значит, $\frac{BF}{FC} = \frac{CE}{ED}$. По теореме Фалеса $\frac{BF}{FC} = \frac{ED}{CE}$. Из полученных равенств следует, $CE = ED$, поэтому E – середина CD, а так как $EF \parallel BD$, то EF – средняя линия треугольника BCD. Отсюда $S_{BCD} = 4S_{CEF}$ и



$$\frac{S_{ACD}}{S_{CEF}} = \frac{S_{ACD}}{0{,}25 S_{BCD}} = \frac{4 \cdot 0{,}5 \cdot AD \cdot CD}{0{,}5 \cdot BD \cdot CD} = \frac{4AD}{BD} = 4 \cdot 0{,}4 = 1{,}6.$$

3. [4 балла] Решите уравнение $10 \arccos(\sin x) = 9\pi - 2x$.

Ответ: $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right\}$.

Решение. По определению равенство $b = \arccos a$ эквивалентно соотношениям $\cos b = a$, $0 \leqslant b \leqslant \pi$, поэтому получаем

$$\arccos(\sin x) = \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right), \\ 0 \leqslant \frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5} \leqslant \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right), \\ -\frac{\pi}{10} \leqslant \frac{x}{5} \leqslant \frac{9\pi}{10} \end{cases} \Leftrightarrow$$

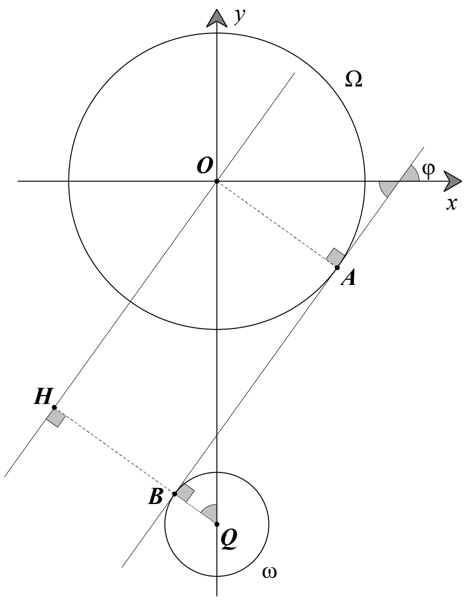
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{2} = \pm\left(\frac{9\pi}{10} - \frac{x}{5}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi n}{3}, \\ x = -\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi n}{2}, \end{array}\right. \\ -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{9\pi}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{7\pi}{6}; 2\pi; \frac{17\pi}{6}; \frac{9\pi}{2}\right\}.$$

4. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, для каждого из которых найдется значение параметра b, при котором система уравнений

$$\begin{cases} 5x + 6ay - b = 0, \\ \left(x^2 + y^2 - 25\right)\left(x^2 + y^2 + 18y + 77\right) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно 4 решения.

Ответ: $a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$.



Решение. Второе уравнение системы эквивалентно совокупности двух уравнений $x^2 + y^2 = 25$ и $x^2 + (y+9)^2 = 4$. Оно задаёт две непересекающиеся окружности Ω и ω – с центрами в точках $O(0;0)$ и $Q(0;-9)$ и радиусами 5 и 2 соответственно. При $a = 0$ первое уравнение системы задаёт вертикальную прямую, которая может иметь 4 общие точки с окружностями, например, при $b = 0$. Если $a \neq 0$, то первое уравнение определяет прямую $y = -\frac{5}{6a}x + \frac{b}{6a}$ с угловым коэффициентом $k = -\frac{5}{6a}$. При фиксированном значении a – т.е. при фиксированном угле наклона – и при $b \in \mathbb{R}$ получаем всевозможные прямые с угловым коэффициентом $k = -\frac{5}{6a}$.
Чтобы система имела ровно 4 решения, прямая должна пересекать каждую из окружностей ровно в двух точках. Это возможно в том и только том случае, когда угловой коэффициент прямой по модулю больше, чем угловой коэффициент общей внутренней касательной двух данных окружностей (тогда за счёт выбора параметра b можно подобрать такое положение прямой, что она пересекает каждую из окружностей дважды).
Проведём общую внутреннюю касательную AB к окружностям (пусть A и B – точки касания этой прямой с Ω и ω соответственно). Пусть ℓ – прямая, параллельная AB и проходящая через точку O; пусть также $\ell \cap QB = H$, $\angle HQO = \varphi$ ($OH \parallel AB$, поэтому φ – угол наклона общей внутренней касательной). Так как $OQ = 9$, $HQ = HB + BQ = OA + BQ = 5 + 2 = 7$, то из прямоугольного треугольника HOQ имеем $OH = \sqrt{OQ^2 - HQ^2} = \sqrt{32}$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{OH}{QH} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$.
С учётом сказанного выше, подходят все значения углового коэффициента, по модулю большие, чем $\operatorname{tg}\varphi$, откуда $\left|-\frac{5}{6a}\right| > \frac{4\sqrt{2}}{7} \Leftrightarrow |a| < \frac{35}{24\sqrt{2}}$. Поскольку значение $a = 0$ также подходит, окончательно получаем $a \in \left(-\frac{35}{24\sqrt{2}}; \frac{35}{24\sqrt{2}}\right)$.

5. [5 баллов] Некоторые числа x и y удовлетворяют равенствам $\log_{11}^4 x - 6\log_x 11 = \log_{x^3} \frac{1}{121} - 5$ и $\log_{11}^4(0{,}5y) + \log_{0{,}5y} 11 = \log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) - 5$. Найдите все возможные значения произведения xy.

Ответ: 2.

Решение. Обозначим $\log_{11} x = u$, $\log_{11}\left(\frac{y}{2}\right) = v$. Так как $\log_x 11 = \frac{1}{\log_{11} x} = \frac{1}{u}$, $\log_{x^3}\left(\frac{1}{121}\right) = -\frac{2}{3}\log_x 11 = -\frac{2}{3u}$, $\log_{0{,}5y} 11 = \frac{1}{\log_{11} 0{,}5y} = \frac{1}{v}$, $\log_{0{,}125y^3}\left(11^{-13}\right) = -\frac{13}{3}\log_{0{,}5y} 11 = -\frac{13}{3v}$, то исходные уравнения можно записать в виде

$$\begin{cases} u^4 - \frac{6}{u} = -\frac{2}{3u} - 5, \\ v^4 + \frac{1}{v} = -\frac{13}{3v} - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u^5 + 15u - 16 = 0, \\ 3v^5 + 15v + 16 = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы. В левой части стоит возрастающая функция, а в правой части число, поэтому уравнение имеет не более одного решения. С другой стороны, любой многочлен нечётной степени имеет по крайней мере один действительный корень. Отсюда следует, что уравнение имеет ровно одно решение. Аналогично, второе уравнение имеет ровно одно решение. Если во втором уравнении сделать замену $v = -w$, то оно принимает вид $-3w^5 - 15w + 16 = 0$, т.е. $3w^5 + 15w - 16 = 0$, что эквивалентно первому уравнению. Это означает, что корни уравнений противоположны, следовательно, их сумма равна нулю. Тогда $\log_{11} x + \log_{11}(0{,}5y) = 0$, $\log_{11}(0{,}5xy) = 0$, $0\frac{1}{2}xy = 1$, $xy = 2$.

6. [5 баллов] На координатной плоскости дан параллелограмм с вершинами в точках $O(0;0)$, $P(-15;90)$, $Q(2;90)$ и $R(17;0)$. Найдите количество пар точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ с целыми координатами, лежащих в этом параллелограмме (возможно, на границе границу) и таких, что $6x_2 - 6x_1 + y_2 - y_1 = 48$.

Ответ: 12 685.

Решение. Запишем исходное условие на координаты точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ в виде $6x_2 + y_2 - 48 = 6x_1 + y_1$. Так как координаты точек $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$ являются целыми числами, то левая и правая части этого равенства могут принимать только целочисленные значения k. Пара точек $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ с целочисленными координатами удовлетворяет условию тогда и только тогда, когда они лежат на параллельных прямых $y = -6x + k$ и $y = -6x + k + 48$ соответственно. Далее найдём подходящие значения параметра k.

Стороны OP и QR параллелограмма лежат на прямых $y = -6x$ и $y = -6x + 102$, поэтому они параллельны прямым $y = -6x + k$ и $y = -6x + k + 48$. Эти прямые пересекают параллелограмм при $0 \leqslant k \leqslant 102$ и $0 \leqslant k + 48 \leqslant 102$, поэтому $k \in [0;54]$.

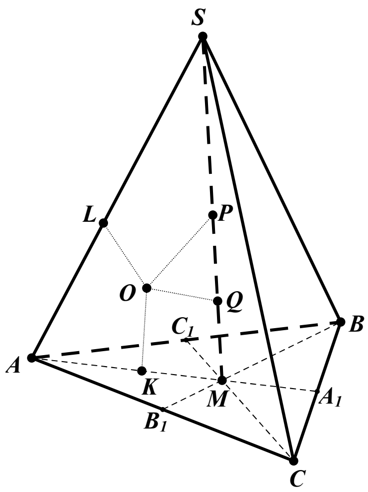
Выясним количество точек с целочисленными координатами на каждой из прямых вида $y = -6x + b$. Если b кратно шести (т.е. $b = 6l$), то получаем прямую $y = 6(-x + l)$. При любом целом x получится целое значение y, а чтобы точка оказалась в параллелограмме нужно, чтобы $0 \leqslant y \leqslant 90 \Leftrightarrow l - 15 \leqslant x \leqslant l$. При любом l этому неравенству удовлетворяет 16 целых значений x. Если b не делится на 6, то есть при $b = 6l + \gamma$, где $\gamma \in \{1;2;3;4;5\}$, имеем $0 \leqslant -6x + 6l + \gamma \leqslant 90 \Leftrightarrow l + \frac{\gamma}{6} - 15 \leqslant x \leqslant l + \frac{\gamma}{6}$. Учитывая, что $x \in \mathbb{Z}$, получаем $l - 14 \leqslant x \leqslant l$ – всего 15 целочисленных значений.

Если $k = 6l$ (таких значений 10), то на каждой из двух прямых $y = -6x + k$ и $y = -6x + k + 48$ можно выбрать по 16 точек – всего $10 \cdot 16 \cdot 16 = 2\,560$ пар. Если $k \neq 6l$ (таких значений 45), то на каждой из двух прямых $y = -6x + k$ и $y = -6x + k + 48$ можно выбрать по 15 точек – имеем $45 \cdot 15 \cdot 15 = 10\,125$ пар. Итого получаем $2\,560 + 10\,125 = 12\,685$ пар.

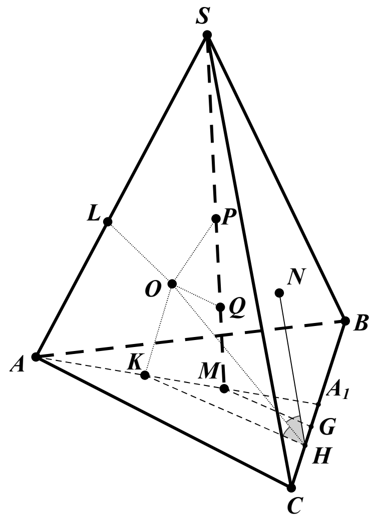
7. [6 баллов] Дана треугольная пирамида $SABC$, медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Сфера Ω касается ребра AS в точке L и касается плоскости основания пирамиды в точке K, лежащей на отрезке AM. Сфера Ω пересекает отрезок SM в точках P и Q. Известно, что $SP = MQ$, площадь треугольника ABC равна 180, $SA = BC = 20$.

а) Найдите произведение длин медиан AA_1, BB_1 и CC_1.

б) Найдите двугранный угол при ребре BC пирамиды, если дополнительно известно, что Ω касается грани BCS в точке N, $SN = 6$, а радиус сферы Ω равен 8.



к задаче 7а



к задаче 7б

Ответ: а) 8100; б) $2\operatorname{arctg}\frac{5}{6} = \arccos\frac{11}{61}$.

Решение. а) Поскольку SL — касательная к сфере Ω, а SP и SQ — секущие к ней, то по теореме о касательной и секущей $SL^2 = SP\cdot SQ$. Аналогично, $MK^2 = MP\cdot MQ$, а поскольку $MQ = SP$, то $SP\cdot SQ = MP\cdot MQ$. В итоге получаем $SL^2 = SP\cdot SQ = MP\cdot MQ = MK^2$, то есть $SL = MK$. Так как $AL = AK$ как касательные к сфере Ω, проведённые из точки A, то $AM = AK + MK = AL + SL = SA = 20$, а поскольку медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении $2:1$ считая от вершины, то $AA_1 = \frac{3}{2}AM = 30$.

Кроме того, $A_1M = \frac{AM}{2} = 10$. При этом $A_1B = A_1C = \frac{BC}{2} = 10$, то есть $A_1M = A_1B = A_1C$. Отсюда треугольник BMC прямоугольный и $\angle BMC = 90^\circ$. Далее имеем

$$S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2}\cdot BM\cdot CM = \frac{1}{2}\cdot\frac{2BB_1}{3}\cdot\frac{2CC_1}{3} \Rightarrow BB_1\cdot CC_1 = \frac{3}{2}S_{ABC} = 270,$$

откуда $AA_1\cdot BB_1\cdot CC_1 = 30\cdot 270 = 8100$.

б) Пусть G и H — проекции точек M и K на прямую BC соответственно. Заметим, что $NH \perp BC$, потому что N и K — точки касания сферы Ω со сторонами двугранного угла пирамиды при ребре BC. Поэтому искомый угол равен $\angle NHK = 2\angle OHK$, где O — центр сферы Ω.

Далее имеем $S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{3} = \frac{1}{2}\cdot BC\cdot MG$, откуда $MG = \frac{2S_{ABC}}{3BC} = 6$. Так как $SL = SN = 6$ как касательные к Ω, то $AK = AL = SA - SL = 14$, откуда получаем $A_1K = AA_1 - AK = 16$. Из подобия треугольников A_1MG и A_1KH имеем $KH = MG\cdot\frac{A_1K}{A_1M} = \frac{48}{5}$. Окончательно, $\operatorname{tg}\angle OHK = \frac{OK}{KH} = \frac{5}{6}$ и $\angle NHK = 2\angle OHK = 2\operatorname{arctg}\frac{5}{6}$.

11 КЛАСС. Вариант 5

1. [4 балла] Решите уравнение $3\operatorname{tg}2x+1=\operatorname{tg}\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Тогда справедливы формулы $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$ и $\operatorname{tg}\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}=\frac{\operatorname{tg}x-1}{1+\operatorname{tg}x}$. (Отметим, что при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ правые части формул не определены – именно поэтому этот случай необходимо рассмотреть отдельно.) Подставляем полученные величины в исходное уравнение и решаем его:

$$\frac{6\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}+1=\frac{\operatorname{tg}x-1}{1+\operatorname{tg}x}\Leftrightarrow\frac{4\operatorname{tg}x+2}{\operatorname{tg}^2x-1}=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Подстановкой убеждаемся, что эти значения являются решениями уравнения.

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{150}\cdot3^{150}$?

Ответ: 20 402.

Решение. 1) Найдём сначала количество троек натуральных чисел. Пусть $a=2^{x_1}3^{y_1}$, $b=2^{x_2}3^{y_2}$, $c=2^{x_3}3^{y_3}$, где x_i, y_i – целые неотрицательные числа. Тогда $x_1+x_2+x_3=150$ и $y_1+y_2+y_3=150$. Числа a, b, c составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2=ac$, откуда $2x_2=x_1+x_3$ и $2y_2=y_1+y_3$. Из полученных уравнений $x_2=y_2=50$, $x_1+x_3=100$, $y_1+y_3=100$. Посчитаем количество решений этой системы. Есть 101 способ выбрать пару чисел $(x_1;x_3)$ – действительно, x_1 можно взять любым целым числом из отрезка $[0;100]$, после чего x_3 определяется однозначно. Аналогично, пару $(y_1;y_3)$ можно выбрать 101 способом. Перемножая, получаем $101^2=10\,201$ способ.

2) Если рассматривать также отрицательные значения переменных, то можно заметить, что подходят все тройки чисел вида $(-a;b;-c)$, где a, b, c положительны и составляют геометрическую прогрессию. Таких троек ровно столько, сколько и в первом случае, поэтому окончательно имеем 20 402 тройки.

3. [5 баллов] Решите неравенство $\ln^2x-(x-1)\ln(2x)+(\ln2)\ln x\geqslant0$.

Ответ: $x\in\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\{1\}$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\ln^2x-(x-1)\ln(2x)+(\ln2)\ln x=\ln^2x-(x-1)\ln2-(x-1)\ln x+(\ln2)\ln x=$$
$$=(\ln2)(\ln x-x+1)+(\ln x)(\ln x-x+1)=(\ln x-(x-1))(\ln x+\ln2)=(\ln x-x+1)\ln(2x).$$

Заметим, что $\ln x-x+1\leqslant0$ при всех $x>0$, причём равенство достигается только при $x=1$. Для этого рассмотрим функцию $\psi(x)=\ln x-x+1$. Она определена при $x>0$, а её производная равна $\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$. На интервале $(0;1)$ производная положительна и функция возрастает, а на луче $(1;+\infty)$ производная отрицательна и функция убывает. Так как $\psi(1)=0$, то отсюда следует, что $\psi(x)<0$ при $x>0$, $x\neq1$.

Таким образом, неравенство равносильно следующему:

$$\left[\begin{array}{l}\ln x-x+1=0,\\ \ln(2x)\leqslant0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\ 0<2x\leqslant1\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup\{1\}.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = -4x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

Ответ: $a = \frac{257}{60}$, $S = \frac{289}{30}$.

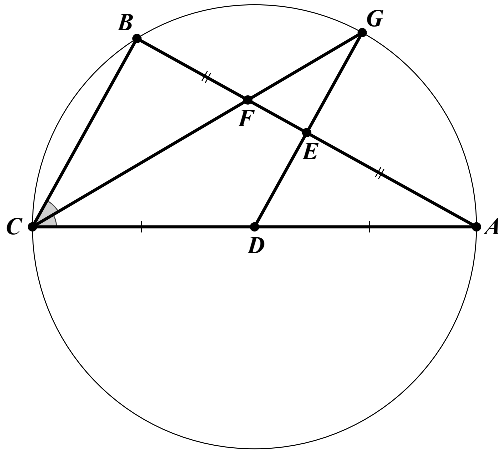
Решение. Пусть A и B – вершины квадрата, лежащие в первой и четвёртой четвертях соответственно; O – начало координат.
По условию, точка B лежит на прямой $y = -4x$. Если x_0 – абсцисса точки B, то $x_0 > 0$, а координаты точки B – это $(x_0; -4x_0)$. Так как точка A получается из B поворотом на $90°$ против часовой стрелки, то её координаты есть $(4x_0; x_0)$. Поскольку обе точки лежат на графике $y = x^3 - ax$, получаем и решаем систему уравнений (учитываем, что $x_0 \neq 0$)

$$\begin{cases} -4x_0 = x_0^3 - ax_0, \\ x_0 = 64x_0^3 - 4ax_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x_0^2 + 4, \\ 4a = 64x_0^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = x_0^2 + 4, \\ 4x_0^2 + 16 = 64x_0^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = \frac{17}{60}, \\ a = \frac{289}{60}. \end{cases}$$

Пусть $OA = d$ – половина диагонали квадрата. Тогда $OA^2 = (4x_0)^2 + x_0^2 = 17x_0^2$, а площадь квадрата S равна полупроизведению его диагоналей, т.е. $S = \frac{1}{2} \cdot 2d \cdot 2d = 2d^2 = \frac{289}{30}$.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\angle B = 90°$, $\angle C = \arccos \frac{1}{7}$, $\angle A = \arcsin \frac{1}{7}$.



Решение. CG – биссектриса угла ACB, поэтому дуги AG и GB равны, а также равны одноимённые им хорды. Значит, треугольник AGB равнобедренный, и его медиана GE является также и высотой. DE – средняя линия треугольника ABC, поэтому $DE \parallel BC$ и $\angle ABC = \angle AED = 90°$ как соответственные. Пусть $CB = 2a$, $\angle ACB = 2\alpha$. Тогда $CF = \frac{2a}{\cos\alpha}$, $AC = \frac{2a}{\cos 2\alpha}$, $CD = \frac{a}{\cos 2\alpha}$, $DF = 2CF = \frac{4a}{\cos\alpha}$. По теореме косинусов для треугольника CDF имеем $DF^2 = CF^2 + CD^2 - 2CF \cdot CD \cos\alpha$. Подставляя сюда выражения для сторон, найденные выше, получаем уравнение

$$\frac{16a^2}{\cos^2\alpha} = \frac{4a^2}{\cos^2\alpha} + \frac{a^2}{\cos^2 2\alpha} - 2\frac{2a}{\cos\alpha} \cdot \frac{a}{\cos 2\alpha} \cos\alpha \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{12}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2 2\alpha} + \frac{4}{\cos 2\alpha} = 0.$$

Умножая обе части уравнения на $2\cos^2 2\alpha \cos^2\alpha$, имеем

$$24\cos^2 2\alpha - 2\cos^2\alpha + 8\cos 2\alpha \cos^2\alpha = 0 \Leftrightarrow 24\cos^2 2\alpha - (1 + \cos 2\alpha) + 4\cos 2\alpha(1 + \cos 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 28\cos^2 2\alpha + 3\cos 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = -\frac{1}{4}, \\ \cos 2\alpha = \frac{1}{7}. \end{array}\right.$$

Так как 2α – острый угол прямоугольного треугольника, то $\cos 2\alpha > 0$, поэтому $2\alpha = \arccos \frac{1}{7}$. Тогда угол A треугольника равен $\arcsin \frac{1}{7}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом $x^3 + \frac{7}{y^3} = y^3 + \frac{7}{z^3} = z^3 + \frac{7}{x^3}$. Найдите минимально возможное значение произведения xyz.

Ответ: -2.

Решение. Перепишем исходную цепочку равенств в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x^3-y^3=\frac{7}{z^3}-\frac{7}{y^3}, \\ y^3-z^3=\frac{7}{x^3}-\frac{7}{z^3}, \\ z^3-x^3=\frac{7}{y^3}-\frac{7}{x^3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^3=\frac{7\left(y^3-z^3\right)}{y^3z^3}, \\ y^3-z^3=\frac{7\left(z^3-x^3\right)}{x^3z^3}, \\ z^3-x^3=\frac{7\left(x^3-y^3\right)}{x^3y^3}. \end{cases}$$

Заметим, что числа x, y, z попарно различны. Действительно, если, к примеру, $z=x$, то третье уравнение системы принимает вид $0=\frac{7\left(x^3-y^3\right)}{x^3y^3}$, поэтому $x=y$ и все три числа совпадают, что противоречит условию. Перемножая все уравнения этой системы, имеем

$$\left(x^3-y^3\right)\left(y^3-z^3\right)\left(z^3-x^3\right)=\frac{343\left(x^3-y^3\right)\left(y^3-z^3\right)\left(z^3-x^3\right)}{x^6y^6z^6}.$$

Так как числа попарно различны, то $(xyz)^6=343$, то есть $xyz=\pm\sqrt{7}$.
Покажем, что у исходной системы существует решение $(x_0;y_0;z_0)$ такое, что $x_0y_0z_0=-\sqrt{7}$. (Строго говоря, выше мы получили, что если система имеет решения, то для этих решений либо $xyz=\sqrt{7}$, либо $xyz=-\sqrt{7}$. Может оказаться так, что у системы решений нет вовсе или так, что для любого решения системы произведение xyz равно $\sqrt{7}$.)
Возьмём, например, $y_0=-\sqrt[6]{7}$ и оставим только первые два уравнения системы (третье уравнение является их следствием). Она принимает вид

$$\begin{cases} x^3+\sqrt{7}=\frac{7}{z^3}+\sqrt{7}, \\ -\sqrt{7}-z^3=\frac{7}{x^3}-\frac{7}{z^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=\frac{7}{z^3}, \\ 2z^6+\sqrt{7}z^3-7=0. \end{cases}$$

У этой системы есть решение $z_0=\sqrt[6]{\frac{7}{4}}$, $x_0=\sqrt[6]{28}$. Итак, для тройки чисел $\left(\sqrt[6]{28};-\sqrt[6]{7};\sqrt[6]{\frac{7}{4}}\right)$ выражение xyz достигает минимального значения $-\sqrt{7}$.

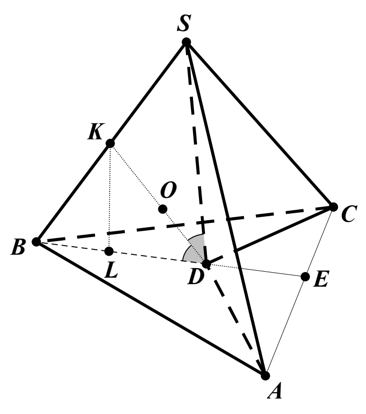
7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB=BC=\sqrt{5}$, $AD=DC=\sqrt{2}$, $AC=2$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA+SB=2+\sqrt{5}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

Ответ: а) $\frac{1}{\sqrt{3}}$, б) $\frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$.

Решение. а) Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ – выпуклый, а E – точка пересечения его диагоналей. Тогда $BD=EB+ED=\sqrt{AB^2-\frac{AC^2}{4}}+\sqrt{AD^2-\frac{AC^2}{4}}=2+1=3$, значит, $DA+DB=3+\sqrt{2}>2+\sqrt{5}=SA+SB$. Однако $SA>DA$ и $SB>DB$ (наклонная длиннее проекции), то есть $SA+SB>DA+DB$ – противоречие. Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ – невыпуклый, а так как треугольники ABC и ADC равнобедренные с общим основанием AC и $AD<AB$, то точка D лежит внутри треугольника ABC.



Далее имеем $BD=EB-ED=2-1=1$, откуда $SA+SB=\sqrt{SD^2+AD^2}+\sqrt{SD^2+DB^2}=\sqrt{SD^2+2}+\sqrt{SD^2+1}=2+\sqrt{5}$.
Решая это уравнение, находим, что $SD=\sqrt{3}$ (можно подобрать корень, а для доказательства его единственности воспользоваться монотонностью левой части при $SD>0$) и тогда $SB=2$, $SA=SC=\sqrt{5}$. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, поэтому его

площадь равна половине их произведения: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 1$. Следовательно, объём пирамиды есть $V_{SACBD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SD = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

б) Существует единственный такой шар, причём в силу симметрии пирамиды относительно плоскости SBD центр шара лежит в этой плоскости. Так как шар касается граней пирамиды, то его центр O лежит внутри треугольника SBD, а он касается отрезков SD и BD. Отсюда следует, что точка O лежит на биссектрисе DK треугольника SBD.

Пусть L – проекция точки K на плоскость основания пирамиды. Тогда из подобия треугольников BKL и BSD имеем $KL = SD \cdot \frac{BK}{BS} = SD \cdot \frac{BK}{BK+KS}$, а по свойству биссектрисы треугольника $\frac{BK}{BK+KS} = \frac{BD}{BD+DS} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$, поэтому $KL = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}$. Значит, расстояние от точки O до прямой BD (т.е. радиус шара) равно $KL \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD}$.

С другой стороны, радиус шара равен расстоянию от точки O до плоскости SBC. Чтобы выразить это расстояние, сначала найдём высоту DM в треугольной пирамиде $SBCD$. Объём этой пирамиды равен $V_{SBCD} = \frac{1}{2} V_{SABCD} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. Так как $SC = BC = \sqrt{5}$, а $SB = 2$, то $S_{SBC} = 2$. Тогда $V_{SBCD} = \frac{1}{3} \cdot DM \cdot S_{SBC}$, откуда $DM = \frac{3V_{SBCD}}{S_{SBC}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Тогда расстояние от точки O до плоскости SBC равно $DM \cdot \frac{OK}{KD} = DM\left(1 - \frac{OD}{KD}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right)$. Теперь приравняем два полученных выражения для радиуса шара:

$$\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right) \Leftrightarrow \frac{OD}{KD} = \frac{1+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}.$$

Итак, радиус шара равен $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}$.

11 КЛАСС. Вариант 6

1. [4 балла] Решите уравнение $4\operatorname{tg}2x+1+\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Тогда справедливы формулы $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$ и $\operatorname{ctg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}$. (Отметим, что при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ правые части формул не определены – именно поэтому этот случай необходимо рассмотреть отдельно.) Подставляем полученные величины в исходное уравнение и решаем его:

$$\frac{8\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}+1+\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\Leftrightarrow\frac{6\operatorname{tg}x+2}{\operatorname{tg}^2x-1}=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=-\frac{1}{3}\Leftrightarrow x=-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Подстановкой убеждаемся, что эти значения являются решениями уравнения.

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $3^{240}\cdot7^{240}$?

Ответ: 51 842.

Решение. 1) Найдём сначала количество троек натуральных чисел. Пусть $a=3^{x_1}7^{y_1}$, $b=3^{x_2}7^{y_2}$, $c=3^{x_3}7^{y_3}$, где x_i, y_i – целые неотрицательные числа. Тогда $x_1+x_2+x_3=240$ и $y_1+y_2+y_3=240$. Числа a, b, c составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2=ac$, откуда $2x_2=x_1+x_3$ и $2y_2=y_1+y_3$. Из полученных уравнений $x_2=y_2=80$, $x_1+x_3=160$, $y_1+y_3=160$. Посчитаем количество решений этой системы. Есть 161 способ выбрать пару чисел $(x_1;x_3)$ – действительно, x_1 можно взять любым целым числом из отрезка $[0;160]$, после чего x_3 определяется однозначно. Аналогично, пару $(y_1;y_3)$ можно выбрать 161 способом. Перемножая, получаем $161^2=25\,921$ способ.
2) Если рассматривать также отрицательные значения переменных, то можно заметить, что подходят все тройки чисел вида $(-a;b;-c)$, где a, b, c положительны и составляют геометрическую прогрессию. Таких троек ровно столько, сколько и в первом случае, поэтому окончательно имеем 51 842 тройки.

3. [5 баллов] Решите неравенство $\ln^2(x+2)-(x+1)\ln(4x+8)+(\ln4)\ln(x+2)\geqslant0$.

Ответ: $x\in\left(-2;-\frac{7}{4}\right]\cup\{-1\}$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\begin{aligned}\ln^2(x+2)-(x+1)\ln(4x+8)+(\ln4)\ln(x+2)&=\ln^2(x+2)-(x+1)\ln4-(x+1)\ln(x+2)+\\+(\ln4)\ln(x+2)&=(\ln4)(\ln(x+2)-x-1)+(\ln(x+2))(\ln(x+2)-x-1)=\\&=(\ln(x+2)-(x+1))(\ln(x+2)+\ln4)=(\ln(x+2)-x-1)\ln(4x+8).\end{aligned}$$

Заметим, что $\ln(x+2)-x-1\leqslant0$ при всех $x>-2$, причём равенство достигается только при $x=-1$. Для этого рассмотрим функцию $\psi(x)=\ln(x+2)-x-1$. Она определена при $x>-2$, а её производная равна $\frac{1}{x+2}-1=\frac{-1-x}{x+2}$. На интервале $(-2;-1)$ производная положительна и функция возрастает, а на луче $(-1;+\infty)$ производная отрицательна и функция убывает. Так как $\psi(-1)=0$, то отсюда следует, что $\psi(x)<0$ при $x>-2$, $x\neq-1$.
Таким образом, неравенство равносильно следующему:

$$\left[\begin{array}{l}\ln(x+2)-x-1=0,\\\ln(4x+8)\leqslant0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1,\\0<4x+8\leqslant1\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left(-2;-\frac{7}{4}\right]\cup\{1\}.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -2x^3 - ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 5x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

Ответ: $a = -\frac{313}{60}$, $S = \frac{169}{30}$.

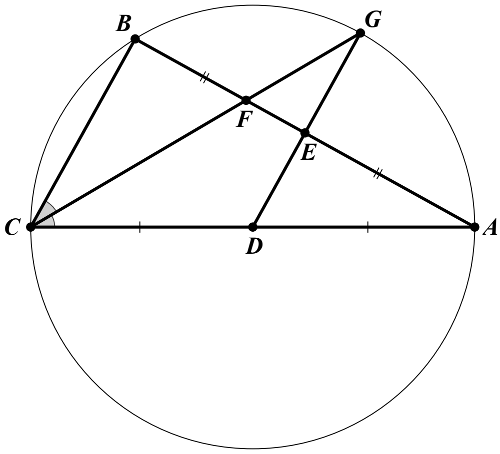
Решение. Пусть A и B – вершины квадрата, лежащие в первой и четвёртой четвертях соответственно; O – начало координат.
По условию, точка A лежит на прямой $y = 5x$. Если x_0 – абсцисса точки A, то $x_0 > 0$, а координаты точки A – это $(x_0; 5x_0)$. Так как точка B получается из A поворотом на 90° по часовой стрелке, то её координаты есть $(5x_0; -x_0)$. Поскольку обе точки лежат на графике $y = -2x^3 - ax$, получаем и решаем систему уравнений (учитываем, что $x_0 \neq 0$)

$$\begin{cases} 5x_0 = -2x_0^3 - ax_0, \\ -x_0 = -250x_0^3 - 5ax_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2x_0^2 - 5, \\ 5a = 1 - 250x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2x_0^2 - 5, \\ -10x_0^2 - 25 = 1 - 250x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = \frac{13}{120}, \\ a = -\frac{313}{60}. \end{cases}$$

Пусть $OA = d$ – половина диагонали квадрата. Тогда $OA^2 = (5x_0)^2 + x_0^2 = 26x_0^2$, а площадь квадрата S равна полупроизведению его диагоналей, т.е. $S = \frac{1}{2} \cdot 2d \cdot 2d = 2d^2 = \frac{169}{30}$.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{11}}$.

Ответ: $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = \arccos \frac{1}{8}$, $\angle A = \arcsin \frac{1}{8}$.



Решение. CG – биссектриса угла ACB, поэтому дуги AG и GB равны, а также равны одноимённые им хорды. Значит, треугольник AGB равнобедренный, и его медиана GE является также и высотой. DE – средняя линия треугольника ABC, поэтому $DE \parallel BC$ и $\angle ABC = \angle AED = 90^\circ$ как соответственные. Пусть $CB = 2a$, $\angle ACB = 2\alpha$. Тогда $CF = \frac{2a}{\cos\alpha}$, $AC = \frac{2a}{\cos 2\alpha}$, $CD = \frac{a}{\cos 2\alpha}$, $DF = \sqrt{\frac{11}{2}}CF = \frac{\sqrt{22}a}{\cos\alpha}$. По теореме косинусов для треугольника CDF имеем $DF^2 = CF^2 + CD^2 - 2CF \cdot CD \cos\alpha$. Подставляя сюда выражения для сторон, найденные выше, получаем уравнение

$$\frac{22a^2}{\cos^2\alpha} = \frac{4a^2}{\cos^2\alpha} + \frac{a^2}{\cos^2 2\alpha} - 2\frac{2a}{\cos\alpha} \cdot \frac{a}{\cos 2\alpha}\cos\alpha \Leftrightarrow \frac{18}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2 2\alpha} + \frac{4}{\cos 2\alpha} = 0.$$

Умножая обе части уравнения на $2\cos^2 2\alpha \cos^2\alpha$, имеем

$$36\cos^2 2\alpha - 2\cos^2\alpha + 8\cos 2\alpha\cos^2\alpha = 0 \Leftrightarrow 36\cos^2 2\alpha - (1 + \cos 2\alpha) + 4\cos 2\alpha(1 + \cos 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 40\cos^2 2\alpha + 3\cos 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = -\frac{1}{5}, \\ \cos 2\alpha = \frac{1}{8}. \end{array}\right.$$

Так как 2α – острый угол прямоугольного треугольника, то $\cos 2\alpha > 0$, поэтому $2\alpha = \arccos \frac{1}{8}$. Тогда угол A треугольника равен $\arcsin \frac{1}{8}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом $x^3 + \frac{10}{y^3} = y^3 + \frac{10}{z^3} = z^3 + \frac{10}{x^3}$. Найдите максимально возможное значение произведения xyz.

Ответ: $\sqrt{10}$.

Решение. Перепишем исходную цепочку равенств в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x^3-y^3=\frac{10}{z^3}-\frac{10}{y^3}, \\ y^3-z^3=\frac{10}{x^3}-\frac{10}{z^3}, \\ z^3-x^3=\frac{10}{y^3}-\frac{10}{x^3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^3=\frac{10\left(y^3-z^3\right)}{y^3z^3}, \\ y^3-z^3=\frac{10\left(z^3-x^3\right)}{x^3z^3}, \\ z^3-x^3=\frac{10\left(x^3-y^3\right)}{x^3y^3}. \end{cases}$$

Заметим, что числа x, y, z попарно различны. Действительно, если, к примеру, $z=x$, то третье уравнение системы принимает вид $0=\frac{10\left(x^3-y^3\right)}{x^3y^3}$, поэтому $x=y$ и все три числа совпадают, что противоречит условию. Перемножая все уравнения этой системы, имеем

$$\left(x^3-y^3\right)\left(y^3-z^3\right)\left(z^3-x^3\right)=\frac{1000\left(x^3-y^3\right)\left(y^3-z^3\right)\left(z^3-x^3\right)}{x^6y^6z^6}.$$

Так как числа попарно различны, то $(xyz)^6=1000$, то есть $xyz=\pm\sqrt{10}$.
Покажем, что у исходной системы существует решение $(x_0;y_0;z_0)$ такое, что $x_0y_0z_0=\sqrt{10}$. (Строго говоря, выше мы получили, что если система имеет решения, то для этих решений либо $xyz=\sqrt{10}$, либо $xyz=-\sqrt{10}$. Может оказаться так, что у системы решений нет вовсе или так, что для любого решения системы произведение xyz равно $-\sqrt{10}$.)
Возьмём, например, $y_0=\sqrt[6]{10}$ и оставим только первые два уравнения системы (третье уравнение является их следствием). Она принимает вид

$$\begin{cases} x^3-\sqrt{10}=\frac{10}{z^3}-\sqrt{10}, \\ \sqrt{10}-z^3=\frac{10}{x^3}-\frac{10}{z^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=\frac{10}{z^3}, \\ 2z^6-\sqrt{10}z^3-10=0. \end{cases}$$

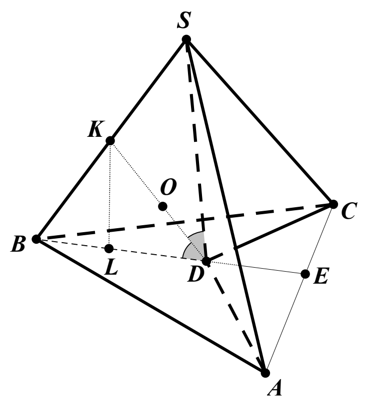
У этой системы есть решение $z_0=-\sqrt[6]{\frac{5}{2}}$, $x_0=-\sqrt[6]{40}$. Итак, для тройки чисел $\left(-\sqrt[6]{40};\sqrt[6]{10};-\sqrt[6]{\frac{5}{2}}\right)$ выражение xyz достигает максимального значения $\sqrt{10}$.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB=BC=\sqrt{10}$, $AD=DC=2$, $AC=2\sqrt{2}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA+SB=2\sqrt{2}+\sqrt{10}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

Ответ: а) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$, б) $\frac{\sqrt{6}}{5+\sqrt{3}}$.



Решение. а) Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ – выпуклый, а E – точка пересечения его диагоналей. Тогда $BD=EB+ED=\sqrt{AB^2-\frac{AC^2}{4}}+\sqrt{AD^2-\frac{AC^2}{4}}=2\sqrt{2}+\sqrt{2}=3\sqrt{2}$, значит, $DA+DB=2+3\sqrt{2}>2\sqrt{2}+\sqrt{10}=SA+SB$. Однако $SA>DA$ и $SB>DB$ (наклонная длиннее проекции), то есть $SA+SB>DA+DB$ – противоречие. Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ – невыпуклый, а так как треугольники ABC и ADC равнобедренные с общим основанием AC и $AD<AB$, то точка D лежит внутри треугольника ABC.
Далее имеем $BD=EB-ED=2\sqrt{2}-\sqrt{2}=\sqrt{2}$, откуда $SA+SB=\sqrt{SD^2+AD^2}+\sqrt{SD^2+DB^2}=\sqrt{SD^2+4}+\sqrt{SD^2+2}=2\sqrt{2}+\sqrt{10}$.
Решая это уравнение, находим, что $SD=\sqrt{6}$ (можно подобрать корень, а для доказательства его единственности воспользоваться монотонностью левой части при $SD>0$) и тогда $SB=\sqrt{2}$, $SA=SC=\sqrt{10}$. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, поэтому его

площадь равна половине их произведения: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 2$. Следовательно, объём пирамиды есть $V_{SACBD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SD = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

б) Существует единственный такой шар, причём в силу симметрии пирамиды относительно плоскости SBD центр шара лежит в этой плоскости. Так как шар касается граней пирамиды, то его центр O лежит внутри треугольника SBD, а он касается отрезков SD и BD. Отсюда следует, что точка O лежит на биссектрисе DK треугольника SBD.

Пусть L – проекция точки K на плоскость основания пирамиды. Тогда из подобия треугольников BKL и BSD имеем $KL = SD \cdot \frac{BK}{BS} = SD \cdot \frac{BK}{BK+KS}$, а по свойству биссектрисы треугольника $\frac{BK}{BK+KS} = \frac{BD}{BD+DS} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$, поэтому $KL = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}$. Значит, расстояние от точки O до прямой BD (т.е. радиус шара) равно $KL \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD}$.

С другой стороны, радиус шара равен расстоянию от точки O до плоскости SBC. Чтобы выразить это расстояние, сначала найдём высоту DM в треугольной пирамиде $SBCD$. Объём этой пирамиды равен $V_{SBCD} = \frac{1}{2} V_{SABCD} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Так как $SC = BC = \sqrt{10}$, а $SB = 2\sqrt{2}$, то $S_{SBC} = 4$. Тогда $V_{SBCD} = \frac{1}{3} \cdot DM \cdot S_{SBC}$, откуда $DM = \frac{3V_{SBCD}}{S_{SBC}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$. Тогда расстояние от точки O до плоскости SBC равно $DM \cdot \frac{OK}{KD} = DM\left(1 - \frac{OD}{KD}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right)$. Теперь приравняем два полученных выражения для радиуса шара:

$$\frac{\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right) \Leftrightarrow \frac{OD}{KD} = \frac{1+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}.$$

Итак, радиус шара равен $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{6}}{5+\sqrt{3}}$.

11 КЛАСС. Вариант 7

1. [4 балла] Решите уравнение $5\operatorname{tg}2x-1=\operatorname{tg}\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Тогда справедливы формулы $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$ и $\operatorname{tg}\left(x-\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}}=\frac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}$. (Отметим, что при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$ правые части формул не определены – именно поэтому этот случай необходимо рассмотреть отдельно.) Подставляем полученные величины в исходное уравнение и решаем его:

$$\frac{10\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}-1=\frac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}\Leftrightarrow\frac{8\operatorname{tg}x-2}{\operatorname{tg}^2x-1}=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=\frac{1}{4}\Leftrightarrow x=\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. Подстановкой убеждаемся, что эти значения являются решениями уравнения.

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $2^{90}\cdot19^{90}$?

Ответ: 7 442.

Решение. 1) Найдём сначала количество троек натуральных чисел. Пусть $a=2^{x_1}19^{y_1}$, $b=2^{x_2}19^{y_2}$, $c=2^{x_3}19^{y_3}$, где x_i, y_i – целые неотрицательные числа. Тогда $x_1+x_2+x_3=90$ и $y_1+y_2+y_3=90$. Числа a, b, c составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2=ac$, откуда $2x_2=x_1+x_3$ и $2y_2=y_1+y_3$. Из полученных уравнений $x_2=y_2=30$, $x_1+x_3=60$, $y_1+y_3=60$. Посчитаем количество решений этой системы. Есть 61 способ выбрать пару чисел $(x_1;x_3)$ – действительно, x_1 можно взять любым целым числом из отрезка $[0;60]$, после чего x_3 определяется однозначно. Аналогично, пару $(y_1;y_3)$ можно выбрать 61 способом. Перемножая, получаем $61^2=3\,721$ способ.
2) Если рассматривать также отрицательные значения переменных, то можно заметить, что подходят все тройки чисел вида $(-a;b;-c)$, где a, b, c положительны и составляют геометрическую прогрессию. Таких троек ровно столько, сколько и в первом случае, поэтому окончательно имеем 7 442 тройки.

3. [5 баллов] Решите неравенство $\ln^2(x+3)-(x+2)\ln(3x+9)+(\ln3)\ln(x+3)\geqslant0$.

Ответ: $x\in\left(-3;-\frac{8}{3}\right]\cup\{-2\}$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\begin{aligned}\ln^2(x+3)-(x+2)\ln(3x+9)+(\ln3)\ln(x+3)&=\ln^2(x+3)-(x+2)\ln3-(x+2)\ln(x+3)+\\+(\ln3)\ln(x+3)&=(\ln3)(\ln(x+3)-x-2)+(\ln(x+3))(\ln(x+3)-x-2)=\\&=(\ln(x+2)-(x+1))(\ln(x+3)+\ln3)=(\ln(x+3)-x-2)\ln(3x+9).\end{aligned}$$

Заметим, что $\ln(x+3)-x-2\leqslant0$ при всех $x>-3$, причём равенство достигается только при $x=-2$. Для этого рассмотрим функцию $\psi(x)=\ln(x+3)-x-2$. Она определена при $x>-3$, а её производная равна $\frac{1}{x+3}-1=\frac{-2-x}{x+3}$. На интервале $(-3;-2)$ производная положительна и функция возрастает, а на луче $(-2;+\infty)$ производная отрицательна и функция убывает. Так как $\psi(-2)=0$, то отсюда следует, что $\psi(x)<0$ при $x>-3$, $x\neq-2$.
Таким образом, неравенство равносильно следующему:

$$\left[\begin{array}{l}\ln(x+3)-x-2=0,\\ \ln(3x+9)\leqslant0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2,\\ 0<3x+9\leqslant1\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left(-3;-\frac{8}{3}\right]\cup\{1\}.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = \frac{x^3}{4} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = \frac{2x}{5}$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

Ответ: $a = -\frac{641}{210}$, $S = \frac{3364}{105}$.

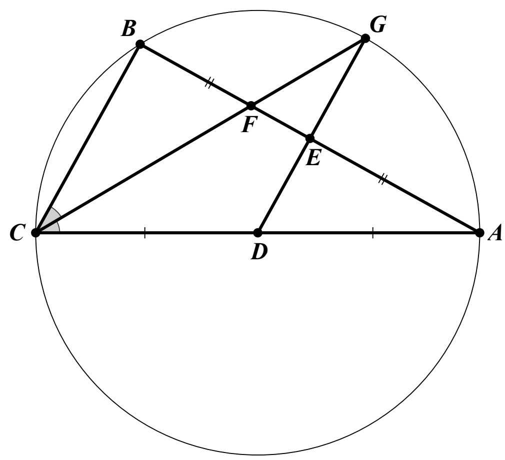
Решение. Пусть A и B – вершины квадрата, лежащие в первой и четвёртой четвертях соответственно; O – начало координат.
По условию, точка A лежит на прямой $y = \frac{2x}{5}$. Если $5x_0$ – абсцисса точки A, то $x_0 > 0$, а координаты точки A – это $(5x_0; 2x_0)$. Так как точка B получается из A поворотом на 90° по часовой стрелке, то её координаты есть $(2x_0; -5x_0)$. Поскольку обе точки лежат на графике $y = \frac{x^3}{4} + ax$, получаем и решаем систему уравнений (учитываем, что $x_0 \neq 0$)

$$\begin{cases} 2x_0 = \frac{125x_0^3}{4} + 5ax_0, \\ -5x_0 = 2x_0^3 + 2ax_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{2}{5} - \frac{25x_0^2}{4}, \\ a = -\frac{5}{2} - x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{2} - x_0^2, \\ \frac{2}{5} - \frac{25x_0^2}{4} = -\frac{5}{2} - x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = \frac{58}{105}, \\ a = -\frac{641}{210}. \end{cases}$$

Пусть $OA = d$ – половина диагонали квадрата. Тогда $OA^2 = (5x_0)^2 + (2x_0)^2 = 29x_0^2$, а площадь квадрата S равна полупроизведению его диагоналей, т.е. $S = \frac{1}{2} \cdot 2d \cdot 2d = 2d^2 = \frac{3364}{105}$.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \frac{2}{11}$.

Ответ: $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = \arccos\frac{1}{17}$, $\angle A = \arcsin\frac{1}{17}$.



Решение. CG – биссектриса угла ACB, поэтому дуги AG и GB равны, а также равны одноимённые им хорды. Значит, треугольник AGB равнобедренный, и его медиана GE является также и высотой. DE – средняя линия треугольника ABC, поэтому $DE \parallel BC$ и $\angle ABC = \angle AED = 90^\circ$ как соответственные. Пусть $CB = 2a$, $\angle ACB = 2\alpha$. Тогда $CF = \frac{2a}{\cos\alpha}$, $AC = \frac{2a}{\cos 2\alpha}$, $CD = \frac{a}{\cos 2\alpha}$, $DF = \frac{11}{2}CF = \frac{11a}{\cos\alpha}$. По теореме косинусов для треугольника CDF имеем $DF^2 = CF^2 + CD^2 - 2CF \cdot CD\cos\alpha$. Подставляя сюда выражения для сторон, найденные выше, получаем уравнение

$$\frac{121a^2}{\cos^2\alpha} = \frac{4a^2}{\cos^2\alpha} + \frac{a^2}{\cos^2 2\alpha} - 2\frac{2a}{\cos\alpha} \cdot \frac{a}{\cos 2\alpha}\cos\alpha \Leftrightarrow \frac{117}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2 2\alpha} + \frac{4}{\cos 2\alpha} = 0.$$

Умножая обе части уравнения на $2\cos^2 2\alpha\cos^2\alpha$, имеем

$$234\cos^2 2\alpha - 2\cos^2\alpha + 8\cos 2\alpha\cos^2\alpha = 0 \Leftrightarrow 234\cos^2 2\alpha - (1 + \cos 2\alpha) + 4\cos 2\alpha(1 + \cos 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 238\cos^2 2\alpha + 3\cos 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = -\frac{1}{14}, \\ \cos 2\alpha = \frac{1}{17}. \end{array}\right.$$

Так как 2α – острый угол прямоугольного треугольника, то $\cos 2\alpha > 0$, поэтому $2\alpha = \arccos\frac{1}{17}$. Тогда угол A треугольника равен $\arcsin\frac{1}{17}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом $x^3 + \frac{6}{y^3} = y^3 + \frac{6}{z^3} = z^3 + \frac{6}{x^3}$. Найдите минимально возможное значение произведения xyz.

Ответ: $-\sqrt{6}$.

Решение. Перепишем исходную цепочку равенств в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x^3-y^3=\frac{6}{z^3}-\frac{6}{y^3}, \\ y^3-z^3=\frac{6}{x^3}-\frac{6}{z^3}, \\ z^3-x^3=\frac{6}{y^3}-\frac{6}{x^3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^3=\frac{6\left(y^3-z^3\right)}{y^3z^3}, \\ y^3-z^3=\frac{6\left(z^3-x^3\right)}{x^3z^3}, \\ z^3-x^3=\frac{6\left(x^3-y^3\right)}{x^3y^3}. \end{cases}$$

Заметим, что числа x, y, z попарно различны. Действительно, если, к примеру, $z=x$, то третье уравнение системы принимает вид $0=\frac{6\left(x^3-y^3\right)}{x^3y^3}$, поэтому $x=y$ и все три числа совпадают, что противоречит условию. Перемножая все уравнения этой системы, имеем

$$\left(x^3-y^3\right)\left(y^3-z^3\right)\left(z^3-x^3\right)=\frac{216\left(x^3-y^3\right)\left(y^3-z^3\right)\left(z^3-x^3\right)}{x^6y^6z^6}.$$

Так как числа попарно различны, то $(xyz)^6=216$, то есть $xyz=\pm\sqrt{6}$.
Покажем, что у исходной системы существует решение $(x_0;y_0;z_0)$ такое, что $x_0y_0z_0=-\sqrt{6}$. (Строго говоря, выше мы получили, что если система имеет решения, то для этих решений либо $xyz=\sqrt{6}$, либо $xyz=-\sqrt{6}$. Может оказаться так, что у системы решений нет вовсе или так, что для любого решения системы произведение xyz равно $\sqrt{6}$.)
Возьмём, например, $y_0=-\sqrt[6]{6}$ и оставим только первые два уравнения системы (третье уравнение является их следствием). Она принимает вид

$$\begin{cases} x^3+\sqrt{6}=\frac{6}{z^3}+\sqrt{6}, \\ -\sqrt{6}-z^3=\frac{6}{x^3}-\frac{6}{z^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=\frac{6}{z^3}, \\ 2z^6+\sqrt{6}z^3-6=0. \end{cases}$$

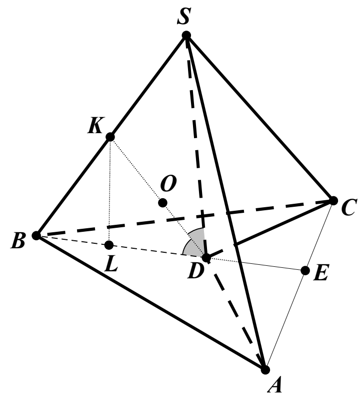
У этой системы есть решение $z_0=\sqrt[6]{\frac{3}{2}}$, $x_0=\sqrt[6]{24}$. Итак, для тройки чисел $\left(\sqrt[6]{24};-\sqrt[6]{6};\sqrt[6]{\frac{3}{2}}\right)$ выражение xyz достигает минимального значения $-\sqrt{6}$.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB=BC=5$, $AD=DC=\sqrt{10}$, $AC=2\sqrt{5}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA+SB=5+2\sqrt{5}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

Ответ: а) $\frac{5\sqrt{15}}{3}$, б) $\frac{\sqrt{15}}{5+\sqrt{3}}$.



Решение. а) Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ – выпуклый, а E – точка пересечения его диагоналей. Тогда $BD=EB+ED=\sqrt{AB^2-\frac{AC^2}{4}}+\sqrt{AD^2-\frac{AC^2}{4}}=2\sqrt{5}+\sqrt{5}=3\sqrt{5}$, значит, $DA+DB=3\sqrt{5}+\sqrt{10}>2\sqrt{5}+5=SA+SB$. Однако $SA>DA$ и $SB>DB$ (наклонная длиннее проекции), то есть $SA+SB>DA+DB$ – противоречие. Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ – невыпуклый, а так как треугольники ABC и ADC равнобедренные с общим основанием AC и $AD<AB$, то точка D лежит внутри треугольника ABC.
Далее имеем $BD=EB-ED=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$, откуда $SA+SB=\sqrt{SD^2+AD^2}+\sqrt{SD^2+DB^2}=\sqrt{SD^2+10}+\sqrt{SD^2+5}=2\sqrt{5}+5$.
Решая это уравнение, находим, что $SD=\sqrt{15}$ (можно подобрать корень, а для доказательства его единственности воспользоваться монотонностью левой части при $SD>0$) и тогда $SB=2\sqrt{5}$, $SA=SC=5$. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, поэтому его площадь равна половине их произведения: $S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BD=5$. Следовательно,

объём пирамиды есть $V_{SACBD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SD = \frac{5\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$.
б) Существует единственный такой шар, причём в силу симметрии пирамиды относительно плоскости SBD центр шара лежит в этой плоскости. Так как шар касается граней пирамиды, то его центр O лежит внутри треугольника SBD, а он касается отрезков SD и BD. Отсюда следует, что точка O лежит на биссектрисе DK треугольника SBD.
Пусть L – проекция точки K на плоскость основания пирамиды. Тогда из подобия треугольников BKL и BSD имеем $KL = SD \cdot \frac{BK}{BS} = SD \cdot \frac{BK}{BK+KS}$, а по свойству биссектрисы треугольника $\frac{BK}{BK+KS} = \frac{BD}{BD+DS} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{15}} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$, поэтому $KL = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}+1}$. Значит, расстояние от точки O до прямой BD (т.е. радиус шара) равно $KL \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{15}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD}$.
С другой стороны, радиус шара равен расстоянию от точки O до плоскости SBC. Чтобы выразить это расстояние, сначала найдём высоту DM в треугольной пирамиде $SBCD$. Объём этой пирамиды равен $V_{SBCD} = \frac{1}{2}V_{SABCD} = \frac{5\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$. Так как $SC = BC = 5$, а $SB = 2\sqrt{5}$, то $S_{SBC} = 10$. Тогда $V_{SBCD} = \frac{1}{3} \cdot DM \cdot S_{SBC}$, откуда $DM = \frac{3V_{SBCD}}{S_{SBC}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Тогда расстояние от точки O до плоскости SBC равно $DM \cdot \frac{OK}{KD} = DM\left(1 - \frac{OD}{KD}\right) = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right)$. Теперь приравняем два полученных выражения для радиуса шара:

$$\frac{\sqrt{15}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{15}}{4} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right) \Leftrightarrow \frac{OD}{KD} = \frac{1+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}.$$

Итак, радиус шара равен $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{\sqrt{15}}{5+\sqrt{3}}$.

11 КЛАСС. Вариант 8

1. [4 балла] Решите уравнение $6\operatorname{tg}2x-1+\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

Решение. Рассмотрим два случая.

1) $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Тогда справедливы формулы $\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}$ и $\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{1+\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x-1}$. (Отметим, что при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ правые части формул не определены – именно поэтому этот случай необходимо рассмотреть отдельно.) Подставляем полученные величины в исходное уравнение и решаем его:

$$\frac{12\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2x}-1+\frac{1+\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x-1}\Leftrightarrow\frac{10\operatorname{tg}x-2}{\operatorname{tg}^2x-1}=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=\frac{1}{5}\Leftrightarrow x=\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

2) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Подстановкой убеждаемся, что эти значения являются решениями уравнения.

2. [4 балла] Сколько существует троек целых чисел $(a;b;c)$ таких, что они образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию, а их произведение abc равно $13^{180}\cdot17^{180}$?

Ответ: 29 282.

Решение. 1) Найдём сначала количество троек натуральных чисел. Пусть $a=13^{x_1}17^{y_1}$, $b=13^{x_2}17^{y_2}$, $c=13^{x_3}17^{y_3}$, где x_i, y_i – целые неотрицательные числа. Тогда $x_1+x_2+x_3=180$ и $y_1+y_2+y_3=180$. Числа a, b, c составляют в указанном порядке геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда $b^2=ac$, откуда $2x_2=x_1+x_3$ и $2y_2=y_1+y_3$. Из полученных уравнений $x_2=y_2=60$, $x_1+x_3=120$, $y_1+y_3=120$. Посчитаем количество решений этой системы. Есть 121 способ выбрать пару чисел $(x_1;x_3)$ – действительно, x_1 можно взять любым целым числом из отрезка $[0;120]$, после чего x_3 определяется однозначно. Аналогично, пару $(y_1;y_3)$ можно выбрать 121 способом. Перемножая, получаем $121^2=14\,641$ способ.

2) Если рассматривать также отрицательные значения переменных, то можно заметить, что подходят все тройки чисел вида $(-a;b;-c)$, где a, b, c положительны и составляют геометрическую прогрессию. Таких троек ровно столько, сколько и в первом случае, поэтому окончательно имеем 29 282 тройки.

3. [5 баллов] Решите неравенство $\ln^2(x-1)-(x-2)\ln(3x-3)+(\ln3)\ln(x-1)\geqslant0$.

Ответ: $x\in\left(1;\frac{4}{3}\right]\cup\{2\}$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\begin{aligned}\ln^2(x-1)-(x-2)\ln(3x-3)+(\ln3)\ln(x-1)=\ln^2(x-1)-(x-2)\ln3-(x-2)\ln(x-1)+\\+(\ln3)\ln(x-1)=(\ln3)(\ln(x-1)-x+2)+(\ln(x-1))(\ln(x-1)-x+2)=\\=(\ln(x-1)-x+2)(\ln(x-1)+\ln3)=(\ln(x-1)-x+2)\ln(3x-3).\end{aligned}$$

Заметим, что $\ln(x-1)-x+2\leqslant0$ при всех $x>1$, причём равенство достигается только при $x=2$. Для этого рассмотрим функцию $\psi(x)=\ln(x-1)-x+2$. Она определена при $x>1$, а её производная равна $\frac{1}{x-1}-1=\frac{2-x}{x-1}$. На интервале $(1;2)$ производная положительна и функция возрастает, а на луче $(2;+\infty)$ производная отрицательна и функция убывает. Так как $\psi(2)=0$, то отсюда следует, что $\psi(x)<0$ при $x>1$, $x\neq2$.

Таким образом, неравенство равносильно следующему:

$$\left[\begin{array}{l}\ln(x-1)-x+2=0,\\ \ln(3x-3)\leqslant0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\ 0<3x-3\leqslant1\end{array}\right.\Leftrightarrow x\in\left(1;\frac{4}{3}\right]\cup\{1\}.$$

4. [4 балла] На координатной плоскости нарисован квадрат, все вершины которого лежат на графике функции $y = -\frac{2x^3}{3} + ax$. Известно, что одна из диагоналей квадрата лежит на прямой $y = 3x$, а центр совпадает с началом координат. Найдите значение параметра a и площадь квадрата.

Ответ: $a = \frac{41}{12}$, $S = \frac{25}{2}$.

Решение. Пусть A и B – вершины квадрата, лежащие в первой и четвёртой четвертях соответственно; O – начало координат.
По условию, точка A лежит на прямой $y = 3x$. Если x_0 – абсцисса точки A, то $x_0 > 0$, а координаты точки A – это $(x_0; 3x_0)$. Так как точка B получается из A поворотом на $90°$ по часовой стрелке, то её координаты есть $(3x_0; -x_0)$. Поскольку обе точки лежат на графике $y = \frac{2x^3}{3} + ax$, получаем и решаем систему уравнений (учитываем, что $x_0 \neq 0$)

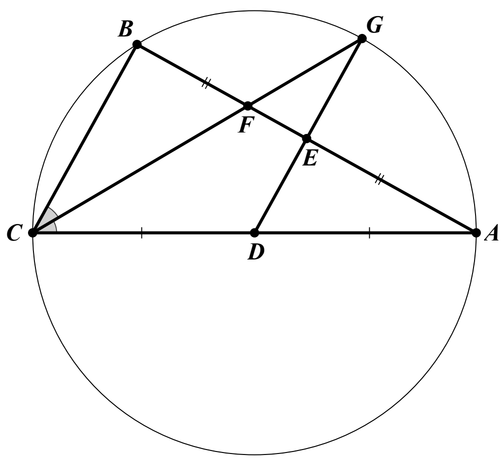
$$\begin{cases} 3x_0 = -\frac{2x_0^3}{3} + ax_0, \\ -x_0 = -18x_0^3 + 3ax_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + \frac{2x_0^2}{3}, \\ 3a = -1 + 18x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 + \frac{2x_0^2}{3}, \\ 9 + 2x_0^2 = -1 + 18x_0^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 = \frac{5}{8}, \\ a = \frac{41}{12}. \end{cases}$$

Пусть $OA = d$ – половина диагонали квадрата. Тогда $OA^2 = (3x_0)^2 + x_0^2 = 10x_0^2$, а площадь квадрата S равна полупроизведению его диагоналей, т.е. $S = \frac{1}{2} \cdot 2d \cdot 2d = 2d^2 = \frac{25}{2}$.

5. [6 баллов] Вокруг треугольника ABC описана окружность Ω. Точки D и E – середины сторон AC и AB соответственно, CF – биссектриса треугольника ABC. Лучи DE и CF пересекаются в точке G, принадлежащей Ω. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $\frac{CF}{DF} = \sqrt{\frac{2}{23}}$.

Ответ: $\angle B = 90°$, $\angle C = \arccos\frac{1}{11}$, $\angle A = \arcsin\frac{1}{11}$.

Решение. CG – биссектриса угла ACB, поэтому дуги AG и GB равны, а также равны одноимённые им хорды. Значит, треугольник AGB равнобедренный, и его медиана GE является также и высотой. DE – средняя линия треугольника ABC, поэтому $DE \parallel BC$ и $\angle ABC = \angle AED = 90°$ как соответственные. Пусть $CB = 2a$, $\angle ACB = 2\alpha$. Тогда $CF = \frac{2a}{\cos\alpha}$, $AC = \frac{2a}{\cos 2\alpha}$, $CD = \frac{a}{\cos 2\alpha}$, $DF = \sqrt{\frac{23}{2}}CF = \frac{\sqrt{46}a}{\cos\alpha}$. По теореме косинусов для треугольника CDF имеем $DF^2 = CF^2 + CD^2 - 2CF \cdot CD\cos\alpha$. Подставляя сюда выражения для сторон, найденные выше, получаем уравнение



$$\frac{46a^2}{\cos^2\alpha} = \frac{4a^2}{\cos^2\alpha} + \frac{a^2}{\cos^2 2\alpha} - 2\frac{2a}{\cos\alpha} \cdot \frac{a}{\cos 2\alpha}\cos\alpha \Leftrightarrow \frac{42}{\cos^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2 2\alpha} + \frac{4}{\cos 2\alpha} = 0.$$

Умножая обе части уравнения на $2\cos^2 2\alpha\cos^2\alpha$, имеем

$$84\cos^2 2\alpha - 2\cos^2\alpha + 8\cos 2\alpha\cos^2\alpha = 0 \Leftrightarrow 84\cos^2 2\alpha - (1 + \cos 2\alpha) + 4\cos 2\alpha(1 + \cos 2\alpha) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 88\cos^2 2\alpha + 3\cos 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = -\frac{1}{8}, \\ \cos 2\alpha = \frac{1}{11}. \end{array}\right.$$

Так как 2α – острый угол прямоугольного треугольника, то $\cos 2\alpha > 0$, поэтому $2\alpha = \arccos\frac{1}{11}$. Тогда угол A треугольника равен $\arcsin\frac{1}{11}$.

6. [5 баллов] Числа x, y и z не все равны между собой, и при этом $x^3 + \frac{11}{y^3} = y^3 + \frac{11}{z^3} = z^3 + \frac{11}{x^3}$. Найдите максимально возможное значение произведения xyz.

Ответ: $\sqrt{11}$.

Решение. Перепишем исходную цепочку равенств в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x^3-y^3=\frac{11}{z^3}-\frac{11}{y^3}, \\ y^3-z^3=\frac{11}{x^3}-\frac{11}{z^3}, \\ z^3-x^3=\frac{11}{y^3}-\frac{11}{x^3}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^3=\frac{11\left(y^3-z^3\right)}{y^3z^3}, \\ y^3-z^3=\frac{11\left(z^3-x^3\right)}{x^3z^3}, \\ z^3-x^3=\frac{11\left(x^3-y^3\right)}{x^3y^3}. \end{cases}$$

Заметим, что числа x, y, z попарно различны. Действительно, если, к примеру, $z=x$, то третье уравнение системы принимает вид $0=\frac{11\left(x^3-y^3\right)}{x^3y^3}$, поэтому $x=y$ и все три числа совпадают, что противоречит условию. Перемножая все уравнения этой системы, имеем

$$\left(x^3-y^3\right)\left(y^3-z^3\right)\left(z^3-x^3\right)=\frac{1331\left(x^3-y^3\right)\left(y^3-z^3\right)\left(z^3-x^3\right)}{x^6y^6z^6}.$$

Так как числа попарно различны, то $(xyz)^6=1331$, то есть $xyz=\pm\sqrt{11}$.
Покажем, что у исходной системы существует решение $(x_0;y_0;z_0)$ такое, что $x_0y_0z_0=\sqrt{11}$. (Строго говоря, выше мы получили, что если система имеет решения, то для этих решений либо $xyz=\sqrt{11}$, либо $xyz=-\sqrt{11}$. Может оказаться так, что у системы решений нет вовсе или так, что для любого решения системы произведение xyz равно $-\sqrt{11}$.)
Возьмём, например, $y_0=\sqrt[6]{11}$ и оставим только первые два уравнения системы (третье уравнение является их следствием). Она принимает вид

$$\begin{cases} x^3-\sqrt{11}=\frac{11}{z^3}-\sqrt{11}, \\ \sqrt{11}-z^3=\frac{11}{x^3}-\frac{11}{z^3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3=\frac{11}{z^3}, \\ 2z^6-\sqrt{11}z^3-10=0. \end{cases}$$

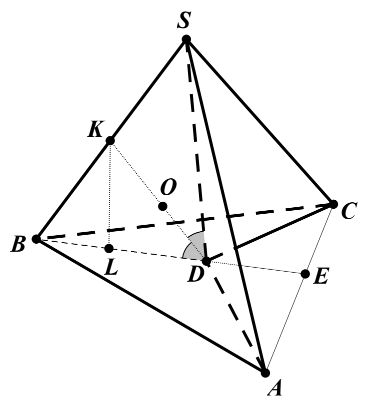
У этой системы есть решение $z_0=-\sqrt[6]{\frac{11}{4}}$, $x_0=-\sqrt[6]{44}$. Итак, для тройки чисел $\left(-\sqrt[6]{44};\sqrt[6]{11};-\sqrt[6]{\frac{11}{4}}\right)$ выражение xyz достигает максимального значения $\sqrt{11}$.

7. [6 баллов] В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, в котором $AB=BC=\sqrt{15}$, $AD=DC=\sqrt{6}$, $AC=2\sqrt{3}$. Ребро SD – высота пирамиды. Известно, что $SA+SB=2\sqrt{3}+\sqrt{15}$. Найдите:

а) объём пирамиды;

б) радиус шара, касающегося граней $ABCD$, SAB, SBC и ребра SD.

Ответ: а) 3, б) $\frac{3}{5+\sqrt{3}}$.



Решение. а) Предположим, что четырёхугольник $ABCD$ – выпуклый, а E – точка пересечения его диагоналей. Тогда $BD=EB+ED=\sqrt{AB^2-\frac{AC^2}{4}}+\sqrt{AD^2-\frac{AC^2}{4}}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$, значит, $DA+DB=3\sqrt{3}+\sqrt{6}>2\sqrt{3}+\sqrt{15}=SA+SB$. Однако $SA>DA$ и $SB>DB$ (наклонная длиннее проекции), то есть $SA+SB>DA+DB$ – противоречие. Следовательно, четырёхугольник $ABCD$ – невыпуклый, а так как треугольники ABC и ADC равнобедренные с общим основанием AC и $AD<AB$, то точка D лежит внутри треугольника ABC.
Далее имеем $BD=EB-ED=2\sqrt{3}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$, откуда $SA+SB=\sqrt{SD^2+AD^2}+\sqrt{SD^2+DB^2}=\sqrt{SD^2+2}+\sqrt{SD^2+1}=2\sqrt{3}+\sqrt{15}$.
Решая это уравнение, находим, что $SD=3$ (можно подобрать корень, а для доказательства его единственности воспользоваться монотонностью левой части при $SD>0$) и тогда $SB=2\sqrt{3}$, $SA=SC=\sqrt{15}$. Диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, поэтому его

площадь равна половине их произведения: $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = 3$. Следовательно, объём пирамиды есть $V_{SACBD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SD = 3$.
б) Существует единственный такой шар, причём в силу симметрии пирамиды относительно плоскости SBD центр шара лежит в этой плоскости. Так как шар касается граней пирамиды, то его центр O лежит внутри треугольника SBD, а он касается отрезков SD и BD. Отсюда следует, что точка O лежит на биссектрисе DK треугольника SBD.
Пусть L – проекция точки K на плоскость основания пирамиды. Тогда из подобия треугольников BKL и BSD имеем $KL = SD \cdot \frac{BK}{BS} = SD \cdot \frac{BK}{BK+KS}$, а по свойству биссектрисы треугольника $\frac{BK}{BK+KS} = \frac{BD}{BD+DS} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} = \frac{1}{1+\sqrt{3}}$, поэтому $KL = \frac{3}{\sqrt{3}+1}$. Значит, расстояние от точки O до прямой BD (т.е. радиус шара) равно $KL \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{3}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD}$.
С другой стороны, радиус шара равен расстоянию от точки O до плоскости SBC. Чтобы выразить это расстояние, сначала найдём высоту DM в треугольной пирамиде $SBCD$. Объём этой пирамиды равен $V_{SBCD} = \frac{1}{2} V_{SABCD} = \frac{3}{2}$. Так как $SC = BC = \sqrt{15}$, а $SB = 2\sqrt{3}$, то $S_{SBC} = 6$. Тогда $V_{SBCD} = \frac{1}{3} \cdot DM \cdot S_{SBC}$, откуда $DM = \frac{3V_{SBCD}}{S_{SBC}} = \frac{3}{4}$. Тогда расстояние от точки O до плоскости SBC равно $DM \cdot \frac{OK}{KD} = DM \left(1 - \frac{OD}{KD}\right) = \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right)$. Теперь приравняем два полученных выражения для радиуса шара:

$$\frac{3}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{OD}{KD}\right) \Leftrightarrow \frac{OD}{KD} = \frac{1+\sqrt{3}}{5+\sqrt{3}}.$$

Итак, радиус шара равен $\frac{3}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{OD}{KD} = \frac{3}{5+\sqrt{3}}$.

