**СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ**

Весенний тур,

8 – 9 классы, сложный вариант, 12 марта 2023 г.

*(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты.)*

| баллы | задачи | |
|---|---|---|
| 4 | 1. | Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° одна из биссектрис в два раза короче какой-то другой биссектрисы. *Егор Бакаев* |
| 5 | 2. | На клетчатой доске $10 \times 10$ в одной из клеток сидит бактерия. За один ход бактерия сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две бактерии (обе остаются в той же клетке). Затем снова одна из сидящих на доске бактерий сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две, и так далее. Может ли после нескольких таких ходов во всех клетках оказаться поровну бактерий? *Александр Грибалко* |
| 7 | 3. | Назовём натуральное число *заурядным*, если в его десятичной записи встречаются только нули и единицы. Пусть произведение двух заурядных чисел оказалось заурядным числом. Обязательно ли тогда сумма цифр произведения равна произведению сумм цифр сомножителей? *Виктор Клепцын, Константин Кноп* |
| 8 | 4. | На сторонах равностороннего треугольника $ABC$ построены во внешнюю сторону треугольники $AB'C$, $CA'B$, $BC'A$ так, что получился шестиугольник $AB'CA'BC'$, в котором каждый из углов $A'BC'$, $C'AB'$, $B'CA'$ больше $120°$, а для сторон выполнены равенства $AB' = AC'$, $BC' = BA'$, $CA' = CB'$. Докажите, что из отрезков $AB'$, $BC'$, $CA'$ можно составить треугольник. *Давид Бродский* |
| 8 | 5. | Натуральные числа от 1 до 100 раскрашены в три цвета: 50 чисел – в красный, 25 чисел – в жёлтый и 25 чисел – в зелёный. Известно, что все красные и жёлтые числа можно разбить на 25 троек так, чтобы в каждой тройке было два красных числа и одно жёлтое, которое больше одного красного и меньше другого. Аналогичное утверждение верно для красных и зелёных чисел. Обязательно ли все 100 чисел можно разбить на 25 четвёрок, в каждой из которых два красных числа, одно жёлтое и одно зелёное, при этом жёлтое и зелёное числа лежат между красными? *Александр Грибалко* |
| | 6. | Пусть $X$ — некоторое множество целых чисел, которое можно разбить на $N$ непересекающихся возрастающих арифметических прогрессий (бесконечных в обе стороны), а меньше чем на $N$ — нельзя. Для любого ли такого $X$ такое разбиение на $N$ прогрессий единственно, если |
| 4 | а) | $N = 2$; |
| 4 | б) | $N = 3$? (Возрастающая арифметическая прогрессия — это последовательность, в которой каждое число больше своего соседа слева на одну и ту же положительную величину.) *Виктор Клепцын* |
| 10 | 7. | Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны. *Александр Юран* |

**СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ**

Весенний тур,

10 – 11 классы, сложный вариант, 12 марта 2023 г.

*(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)*

---

| баллы | задачи |
|---|---|
| 4 | 1. Даны две последовательности из букв А и Б, в каждой из которых по 100 букв. За одну операцию разрешается или вставить в какое-то место последовательности (возможно, в начало или в конец) любое количество одинаковых букв, или убрать из последовательности любое количество подряд идущих одинаковых букв. Докажите, что из первой последовательности можно получить вторую не более чем за 100 операций. *Владислав Новиков* |
| 5 | 2. Периметр треугольника $ABC$ равен 1. Окружность $\omega$ касается стороны $BC$, продолжения стороны $AB$ в точке $P$ и продолжения стороны $AC$ в точке $Q$. Прямая, проходящая через середины сторон $AB$ и $AC$, пересекает описанную окружность треугольника $APQ$ в точках $X$ и $Y$. Найдите длину отрезка $XY$. *Давид Бродский* |
| 6 | 3. Дан многочлен $P(x)$ степени $n > 5$ с целыми коэффициентами, имеющий $n$ различных целых корней. Докажите, что многочлен $P(x)+3$ имеет $n$ различных действительных корней. *Михаил Малкин* |
| 8 | 4. Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны. *Александр Юран* |
| 8 | 5. Дано целое число $h > 1$. Назовём положительную обыкновенную дробь (не обязательно несократимую) *хорошей*, если сумма её числителя и знаменателя равна $h$. Скажем, что число $h$ *замечательное*, если каждую положительную обыкновенную дробь, знаменатель которой меньше $h$, можно выразить через хорошие дроби (не обязательно различные) с помощью операций сложения и вычитания. Докажите, что $h$ замечательное тогда и только тогда, когда оно простое. (Напомним, что у обыкновенной дроби числитель целый, а знаменатель натуральный.) *Татьяна Казицына* |
| 10 | 6. Середины всех высот некоторого тетраэдра лежат на его вписанной сфере. Обязательно ли тогда этот тетраэдр правильный? *Михаил Евдокимов* |
| 12 | 7. На острове живут хамелеоны пяти цветов. Когда один хамелеон кусает другого, цвет укушенного хамелеона меняется на один из этих пяти цветов по некоторому правилу, причём новый цвет зависит только от цвета укусившего и цвета укушенного. Известно, что 2023 красных хамелеона могут договориться о последовательности укусов между собой, после которой все они станут синими. При каком наименьшем $k$ можно гарантировать, что $k$ красных хамелеонов, кусая только друг друга, смогут стать синими? (Например, правила могут быть такими: если красный хамелеон кусает зелёного, укушенный меняет цвет на синий; если зелёный кусает красного, укушенный остаётся красным, то есть «меняет цвет на красный»; если красный кусает красного, укушенный меняет цвет на жёлтый, и т. д. Правила смены цветов могут быть другими.) *Михаил Раскин* |