

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

8 – 9 классы, базовый вариант, 26 февраля 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

1. В кабинете сидят N нерях, у каждого на его столе скопилось ненулевое количество мусора. Неряхи выходят обедать по одному (после возвращения предыдущего), а в это время каждый из остальных перекладывает половину мусора со своего стола на стол вышедшего. Может ли случиться, что после того, как все пообедали, количество мусора на столе у каждого будет таким же, как и до обеда, если
- 1 а) $N = 2$;
3 б) $N = 10$?

Алексей Заславский

2. В треугольнике ABC провели медианы BK и CN , пересекающиеся в точке M . Какое наибольшее количество сторон четырёхугольника $ANMK$ может иметь длину 1?

Егор Бакаев

3. На столе лежат 2023 игральных кубика. За 1 рубль можно выбрать любой кубик и переставить его на любую из четырёх граней, которые сейчас для него боковые. За какое наименьшее количество рублей гарантированно удастся поставить все кубики так, чтобы на верхних гранях у них было поровну точек? (Количества точек на гранях каждого игрального кубика равны числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, суммарное число точек на противоположных гранях всегда равно 7.)

Егор Бакаев

4. Для произвольного числа x рассмотрим сумму

5
$$Q(x) = [x] + \left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x}{3} \right] + \left[\frac{x}{4} \right] + \dots + \left[\frac{x}{10000} \right].$$

Найдите разность $Q(2023) - Q(2022)$.

(Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .)

Алексей Толпыго

5. На каждой клетке доски 5×5 лежит по одной монете, все монеты внешне одинаковы. Среди них ровно 2 монеты фальшивые, они одинакового веса и легче настоящих, которые тоже весят одинаково. Фальшивые монеты лежат в клетках, имеющих ровно одну общую вершину. Можно ли за одно взвешивание на чашечных весах без гирь гарантированно найти
- 2 а) 13 настоящих монет;
3 б) 15 настоящих монет;
2 в) 17 настоящих монет?

Рустэм Женодаров, Александр Грибалко, Сергей Токарев

СОРОК ЧЕТВЁРТЫЙ ТУРНИР ГОРОДОВ

Весенний тур,

10 – 11 классы, базовый вариант, 26 февраля 2023 г.

(Итог подводится по трём задачам, по которым достигнуты наилучшие результаты; баллы за пункты одной задачи суммируются.)

баллы задачи

- 4 1. На столе лежат 2023 игральных кубика. За 1 рубль можно выбрать любой кубик и переставить его на любую из четырёх граней, которые сейчас для него боковые. За какое наименьшее количество рублей гарантированно удастся поставить все кубики так, чтобы на верхних гранях у них было поровну точек? (Количества точек на гранях каждого игрального кубика равны числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, суммарное число точек на противоположных гранях всегда равно 7.)

Егор Бакаев

- 4 2. Дано натуральное число n . Для произвольного числа x рассмотрим сумму

$$Q(x) = [x] + \left[\frac{x}{2} \right] + \left[\frac{x}{3} \right] + \left[\frac{x}{4} \right] + \dots + \left[\frac{x}{10^n} \right].$$

Найдите разность $Q(10^n) - Q(10^n - 1)$.

(Здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x , то есть наибольшее целое число, не превосходящее x .)

Алексей Толпыго

- 5 3. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC , N — основание биссектрисы угла B . Касательная к описанной окружности треугольника AIN в вершине A и касательная к описанной окружности треугольника CIN в вершине C пересекаются в точке D . Докажите, что прямые AC и DI перпендикулярны.

Михаил Евдокимов

- 5 4. Бесконечные возрастающие арифметические прогрессии a_1, a_2, a_3, \dots и b_1, b_2, b_3, \dots состоят из положительных чисел. Известно, что отношение a_k/b_k целое при любом k . Верно ли, что это отношение не зависит от k ?

Борис Френкин

- 3 5. Даны 5 точек, расстояние между любыми двумя из них больше 2. Верно ли, что расстояние между какими-то двумя из них больше 3, если эти 5 точек расположены

- 3 а) на плоскости;
3 б) в пространстве?

Алексей Толпыго