Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика
11 класс, Москва

Вариант № 1

1. Петя и Вася пригласили одноклассников на свой день рожденья в дом Пети и посадили всех за круглый стол пить чай. Петя отметил для себя наименьшее число стульев, разделяющих его с каждым из приглашенных гостей, кроме Васи. Сложив полученные числа, он получил 60. Найти число стульев за столом, если известно, что оно четное. Какое наименьшее число стульев разделяло Петю и Васю?

2. Решить уравнение $\left(\sin^4 5x+1\right)\left(\sin^4 3x+1\right)=4\sin^2 5x\cdot\sin^2 3x.$

3. Найти все целые решения уравнения $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2022}$.

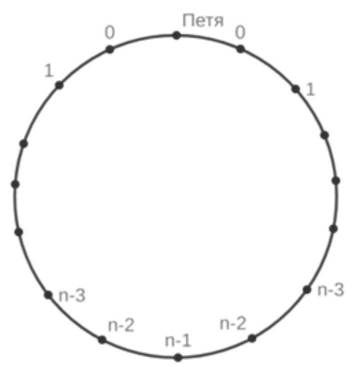
4. Решить уравнение $\left(\log_2 x+\sqrt{\log_2{}^2 x+1}\right)\left(\log_2(x-2)+\sqrt{\log_2{}^2(x-2)+1}\right)=1$.

5. На клетках шахматной доски размером 8×8 случайным образом расставлены 4 одинаковых фигуры. Найти вероятность того, что три из них будут находиться либо на одной горизонтали, либо на одной вертикали, либо на одной из двух главных диагоналей.

6. На ребре AC основания треугольной пирамиды $ABCD$ расположена точка M так, что $AM:MC=1:2.$ Через середину ребра BC основания пирамиды проведена плоскость P, проходящая через точку M и параллельная боковому ребру $CD.$ В каком отношении плоскость P делит объем пирамиды?

Задача 1 **Ответ:** 18 стульев, 4 стула.

Решение. Пусть за столом стояло $2n$ стульев (т.е. за столом сидело всего $2n$ человек). На круге точками отмечены стулья. Числом K обозначено количество стульев, разделяющих Петю и человека, сидящего на этом стуле. Тогда число стульев, посчитанных Петей, включая Васю, равно



$$2\left(1+2+3+...+(n-2)\right)+(n-1)=(n-1)(n-2)+(n-1)=(n-1)^2$$

Обозначим K_B число стульев, вычисленное для Васи. Тогда

$$\begin{cases}(n-1)^2-K_B=60,\\ 0\le K_B\le (n-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le (n-1)^2-60\le n-1,\\ K_B=(n-1)^2-60\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+\sqrt{60}\le n\le \dfrac{3+\sqrt{241}}{2}\\ K_B=(n-1)^2-60\end{cases}.$$

Учитывая, что $n \in \mathbb{N}$, $8 < 1+\sqrt{60}$, $8 < \dfrac{3+\sqrt{241}}{2} < 10$, получим единственное натуральное решение двойного неравенства: $n = 9$. Тогда число стульев за столом равно $2n = 18$, а количество стульев, разделяющих Петю и Васю, $K_B = (n-1)^2 - 60 = 64 - 60 = 4$.

Задача 2 **Ответ:** $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi t, t \in Z$.

Решение. Выполним преобразование равносильные преобразования в исходном уравнении:

$$\sin^4 5x \cdot \sin^4 3x + \sin^4 5x + \sin^4 3x + 1 - 4\sin^2 5x \cdot \sin^2 3x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sin^4 5x \cdot \sin^4 3x - 2\sin^2 5x \cdot \sin^2 3x + 1\right) + \left(\sin^4 5x - 2\sin^2 5x \cdot \sin^2 3x + \sin^4 3x\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(\sin^2 5x \cdot \sin^2 3x - 1\right)^2 + \left(\sin^2 5x - \sin^2 3x\right)^2 = 0.$$

Сумма неотрицательных слагаемых равна нулю тогда и только тогда, когда каждое слагаемое равно нулю. Тогда $\begin{cases} \sin^2 5x \cdot \sin^2 3x - 1 = 0 \\ \sin^2 5x - \sin^2 3x = 0 \end{cases}$. Учитывая ограниченность синуса, имеем

$$\begin{cases} |\sin 5x| = 1 \\ |\sin 3x| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |\sin 5x| = 1 \to 5x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \\ |\sin 3x| = 1 \to 3x = \dfrac{\pi}{2} + \pi m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{10} + \dfrac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi m}{3}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Далее находим пересечение серий

$$\frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{3} \Leftrightarrow 3n - 5m = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2 + 5k \\ m = 1 + 3k \end{cases},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Окончательно получаем $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Задача 3 **Ответ:** $n = \dfrac{1}{4}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^{2022} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2022}\right)^2$.

Решение. Заметим, что левая часть уравнения имеет смысл при $n \geq 0$. Выполним преобразование в левой части: $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

Следовательно, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ монотонно убывает с ростом n, а значит, рассматриваемое уравнение имеет не более одного решения. Учитывая, что $\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right) = 1$, имеем равносильное исходному уравнение $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \left(\sqrt{2}+1\right)^{2022}$. Тогда получим

$$\begin{cases} \sqrt{n+1} + \sqrt{n} = \left(\sqrt{2}+1\right)^{2022} \\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{2}-1\right)^{2022} \end{cases} \Rightarrow 2\sqrt{n} = \left(\sqrt{2}+1\right)^{2022} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2022} \Rightarrow n = \left(\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2022} - \left(\sqrt{2}-1\right)^{2022}}{2}\right)^2.$$

Покажем, что найденное число является целым (натуральным). Имеем

$$\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^{2022}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2022}\right)^2=\left(\sum_{k=0}^{2022}C_{2022}^k 2^{k/2}-\sum_{k=0}^{2022}(-1)^k C_{2022}^k 2^{k/2}\right)^2=\left(2\sqrt{2}\sum_{k=0}^{1010}C_{2022}^{2k+1}2^k\right)^2,$$

отсюда $n=\left(\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^{2022}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2022}}{2}\right)^2=\left(\sqrt{2}\sum_{k=0}^{1010}C_{2022}^{2k+1}2^k\right)^2=2\left(\sum_{k=0}^{1010}C_{2022}^{2k+1}2^k\right)^2\in\mathbb{Z}.$

Задача 4 **Ответ:** $x=1+\sqrt{2}$.

Решение. Левая часть рассматриваемого уравнения имеет смысл при $x>2$ (ОДЗ). Заметим, что на ОДЗ выполнено, что $\log_2 x\pm\sqrt{\log_2{}^2 x+1}\neq 0,\quad \log_2(x-2)\pm\sqrt{\log_2{}^2(x-2)+1}\neq 0.$

Умножая правую и левую части исходного уравнения на $\sqrt{\log_2{}^2 x+1}-\log_2 x$ и учитывая, что $\left(\log_2 x+\sqrt{\log_2{}^2 x+1}\right)\left(\sqrt{\log_2{}^2 x+1}-\log_2 x\right)=1,$ получим равносильное уравнение

$$\log_2(x-2)+\sqrt{\log_2{}^2(x-2)+1}=\sqrt{\log_2{}^2 x+1}-\log_2 x. \qquad (1)$$

Далее, умножая правую и левую части исходного уравнения на $\sqrt{\log_2{}^2(x-2)+1}-\log_2(x-2),$ получим также равносильное уравнение (ниже поменяли местами левую и правую части)

$$\sqrt{\log_2{}^2(x-2)+1}-\log_2(x-2)=\log_2 x+\sqrt{\log_2{}^2 x+1}. \qquad (2)$$

Вычитая из уравнения (1) уравнение (2), получаем, $\log_2 x+\log_2(x-2)=-(\log_2 x+\log_2(x-2)),$ следовательно $\log_2 x+\log_2(x-2)=0$, что равносильно системе $\begin{cases}\log_2\left(x(x-2)\right)=0\\ x>2\end{cases}$.

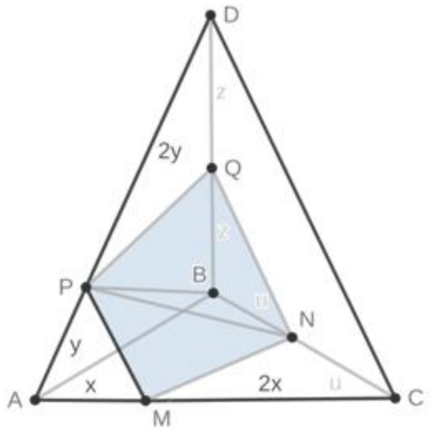
Таким образом, $\begin{cases}x^2-2x=1\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\pm\sqrt{2}\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow x=1+\sqrt{2}.$

Задача 5 **Ответ:** $P(A)=\dfrac{687}{7564}\approx 0,09$.

Решение. Пространство исходов опыта – выбор произвольных четырех клеток из имеющихся 64. Тогда общее число равновозможных опытов $n=C_{64}^4$ (размещение четырех одинаковых фигур на 64 клетках). Благоприятный исход заключается в том, что три одинаковые фигуры находятся на одной линии и одна не на этой линии, либо четыре одинаковых фигуры на одной линии. Тогда число благоприятных исходов для одной линии (горизонтали, вертикали или главной диагонали) равно $C_8^3\cdot C_{56}^1+C_8^4=3206=2\cdot 7\cdot 229$. Всего имеется 18 различных линий (горизонталей, вертикалей и главных диагоналей). Итого число благоприятных исходов равно $m=18\cdot 2\cdot 7\cdot 229$. Искомая вероятность есть отношение числа благоприятных исходов к общему числу исходов:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{4\cdot 9\cdot 7\cdot 229\cdot 4!}{64\cdot 63\cdot 62\cdot 61}=\frac{3\cdot 229}{2\cdot 62\cdot 61}=\frac{687}{7564}\approx 0,09.$$

Задача 6 **Ответ:** $V_1 : V_2 = 7 : 11$



Решение. Построим сечение. Поскольку секущая плоскость параллельна ребру CD, она пересечет плоскость ACD по прямой MP, параллельной CD, а плоскость BCD – по прямой ND, также параллельной CD. Соединим точки P и Q, лежащие в одной плоскости, и точки M и N, лежащие в одной плоскости, получим $MPQN$ – искомое сечение. Пусть V – объем пирамиды, V_1 – сумма объемов пирамид $PABNM$ и $PQBN$ и $V_2 = V - V_1$.

Из подобия пар треугольников ACD и AMP и из условия задачи получим, что

$$AM = x,\ MC = 2x,\ AP = y,\ PD = 2y.$$

Отсюда следует, что $H_p = \dfrac{y}{3y} \cdot H_D = \dfrac{1}{3} H_D$, где H_p – высота, опущенная из вершины P пирамиды $PABNM$, H_D – высота, опущенная из вершины D пирамиды $ABCD$, и площадь основания пирамиды $PABNM$ равна $S_{ABNM} = S_{ABC} - S_{MNC} = S_{ABC} - \dfrac{2x}{3x} \cdot \dfrac{u}{2u} \cdot S_{ABC} = \dfrac{2}{3} S_{ABC}$. Тем самым

$$V_{PABNM} = \frac{1}{3} H_p \cdot S_{ABNM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} H_D \cdot \frac{2}{3} S_{ABC} = \frac{2}{9} V.$$

Аналогично из подобия пар треугольников BCD и BNQ и из условия задачи получим, что

$$CN = NB = u,\ BQ = QD = z.$$

Отсюда следует, что $\tilde{H}_p = \dfrac{2y}{3y} \cdot H_A = \dfrac{2}{3} H_A$, где $\tilde{H}_p$ – высота, опущенная из вершины P пирамиды $PQBN$, H_A – высота, опущенная из вершины A пирамиды $ABCD$, и площадь основания пирамиды $PQBN$ равна $S_{BNQ} = \dfrac{u}{2u} \cdot \dfrac{z}{2z} \cdot S_{BCD} = \dfrac{1}{4} S_{BCD}$. Таким образом, находим

$$V_{PQBN} = \frac{1}{3} \tilde{H}_P \cdot S_{QBN} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} H_A \cdot \frac{1}{4} S_{DBC} = \frac{1}{6} V.$$

Теперь можно записать, что

$$V_1 = V_{PABNM} + V_{PQBN} = \frac{2}{9} V + \frac{1}{6} V = \frac{7}{18} V,\ V_2 = V - V_1 = \frac{11}{18} V,\ V_1 : V_2 = 7 : 11.$$

Вариант № 2

1. Петя и Вася пригласили одноклассников на свой день рожденья в дом Пети и посадили всех за круглый стол пить чай. Петя отметил для себя наименьшее число стульев, разделяющих его с каждым из приглашенных гостей, кроме Васи. Сложив полученные числа, он получил 75. Найти число стульев за столом, если известно, что оно четное. Какое наименьшее число стульев разделяло Петю и Васю?

Ответ: 20 стульев, 6 стульев.

2. Решить уравнение $\left(\cos^4 5x+1\right)\left(\cos^4 7x+1\right)=4\cos^2 5x\cdot\cos^2 7x.$

Ответ: $x=\pi t, t\in Z$.

3. Найти все целые решения уравнения $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2023}$.

Ответ: $n=\frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^{2023}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2023}\right)^2$.

4. Решить уравнение $\left(\log_3(2x+1)+\sqrt{\log_3{}^2(2x+1)+1}\right)\left(\log_3(3x+2)+\sqrt{\log_3{}^2(3x+2)+1}\right)=1$

Ответ: $x=-\frac{1}{6}$.

5. На клетках шахматной доски размером 8×8 случайным образом расставлены 5 одинаковых фигур. Найти вероятность того, что четыре из них будут находиться либо на одной горизонтали, либо на одной вертикали, либо на одной из двух главных диагоналей.

Ответ: $P(A)=\frac{18\cdot\left(C_8^4\cdot C_{56}^1+C_8^5\right)}{C_{64}^5}=\frac{18\cdot 56\cdot 71}{31\cdot 61\cdot 63\cdot 64}=\frac{71}{4\cdot 31\cdot 61}=\frac{71}{7564}\approx 0,0094$.

6. На ребре AC основания треугольной пирамиды $ABCD$ расположена точка M так, что $AM:MC=1:3.$ Через середину ребра BC основания пирамиды проведена плоскость $P,$ проходящая через точку M и параллельная боковому ребру $CD.$ В каком отношении плоскость P делит объем пирамиды?

Ответ: $V_1:V_2=11:21$.

Вариант № 3

1. Петя и Вася пригласили одноклассников на свой день рожденья в дом Пети и посадили всех за круглый стол пить чай. Петя отметил для себя наименьшее число стульев, разделяющих его с каждым из приглашенных гостей, кроме Васи. Сложив полученные числа, он получил 95. Найти число стульев за столом, если известно, что оно четное. Какое наименьшее число стульев разделяло Петю и Васю?

Ответ: 22 стула, 5 стульев.

2. Решить уравнение $\left(\mathrm{tg}^4 3x+1\right)\left(\mathrm{tg}^4 7x+1\right)=4\mathrm{tg}^2 3x\cdot\mathrm{tg}^2 7x$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi t}{2}, t\in Z$.

3. Найти все целые решения уравнения $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2024}$.

Ответ: $n=\frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^{2024}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2024}\right)^{2}$.

4. Решить уравнение $\left(\log_4(x+1)+\sqrt{\log_4{}^2(x+1)+1}\right)\left(\log_4(3x+5)+\sqrt{\log_4{}^2(3x+5)+1}\right)=1$.

Ответ: $x=-\frac{2}{3}$.

5. На клетках шахматной доски размером 8×8 случайным образом расставлены 6 одинаковых фигур. Найти вероятность того, что пять из них будут находиться либо на одной горизонтали, либо на одной вертикали, либо на одной из двух главных диагоналей.

Ответ: $P(A)=\frac{18\cdot\left(C_8^5\cdot C_{56}^1+C_8^6\right)}{C_{64}^6}=\frac{28\cdot 113\cdot 18}{59\cdot 61\cdot 62\cdot 21\cdot 16}=\frac{339}{446276}\approx 0,00076$.

6. На ребре AC основания треугольной пирамиды $ABCD$ расположена точка M так, что $AM:MC=2:3.$ Через середину ребра BC основания пирамиды проведена плоскость P, проходящая через точку M и параллельная боковому ребру $CD.$ В каком отношении плоскость P делит объем пирамиды?

Ответ: $V_1:V_2=43:57$.

Вариант № 4

1. Петя и Вася пригласили одноклассников на свой день рожденья в дом Пети и посадили всех за круглый стол пить чай. Петя отметил для себя наименьшее число стульев, разделяющих его с каждым из приглашенных гостей, кроме Васи. Сложив полученные числа, он получил 114. Найти число стульев за столом, если известно, что оно четное. Какое наименьшее число стульев разделяло Петю и Васю?

Ответ: 24 стульев, 7 стульев.

2. Решить уравнение $\left(\operatorname{ctg}^4 5x+1\right)\left(\operatorname{ctg}^4 9x+1\right)=4\operatorname{ctg}^2 5x\cdot\operatorname{ctg}^2 9x$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi t}{2}, t\in Z$.

3. Найти все целые решения уравнения $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\left(\sqrt{2}-1\right)^{2021}$.

Ответ: $n=\frac{1}{4}\left(\left(\sqrt{2}+1\right)^{2021}-\left(\sqrt{2}-1\right)^{2021}\right)^{2}$.

4. Решить уравнение $\left(\log_5(x+2)+\sqrt{\log_5{}^2(x+2)+1}\right)\left(\log_5(2x+3)+\sqrt{\log_5{}^2(2x+3)+1}\right)=1$.

Ответ: $x=-1$.

5. На клетках шахматной доски размером 8×8 случайным образом расставлены 7 одинаковых фигур. Найти вероятность того, что шесть из них будут находиться либо на одной горизонтали, либо на одной вертикали, либо на одной из двух главных диагоналей.

Ответ: $P(A)=\dfrac{18\cdot\left(C_8^6\cdot C_{56}^1+C_8^7\right)}{C_{64}^7}=\dfrac{591}{12942004}\approx 0,000046.$

6. На ребре AC основания треугольной пирамиды $ABCD$ расположена точка M так, что $AM:MC=3:4.$ Через середину ребра BC основания пирамиды проведена плоскость $P,$ проходящая через точку M и параллельная боковому ребру $CD.$ В каком отношении плоскость P делит объем пирамиды?

Ответ: $V_1:V_2=22:27$.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
Заключительный тур отраслевой физико-математической олимпиады школьников «Росатом», математика, выезд
11 класс.

Вариант № 1

1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами удовлетворяет условию $P(17)=P(23)=2023$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $P(0)>0$.

2. Решить уравнение
$$\log_{\sin x}\sin 2x+\log_{\sin 2x}\sin 3x+\log_{\sin 3x}\sin x=\log_{\sin 2x}\sin x+\log_{\sin 3x}\sin 2x+\log_{\sin x}\sin 3x.$$

3. Найти приведенный многочлен $P(x)$ (коэффициент при старшей степени x равен 1), для которого справедливо тождество $xP(x-1)=(x-3)P(x)$ по переменной x.

4. При каких тройках чисел $(x;y;z)$, удовлетворяющих системе $\begin{cases}\sin x-\sin y=y-x\\ \sin y-\sin z=y-z\end{cases}$, выражение $\left|\dfrac{z}{1+xy}\right|$ принимает наибольшее возможное значение?

5. Петя записывает на листе бумаги строчку из 7 нулей и 20 единиц, расположенных в совершенно случайном порядке. Найти математическое ожидание случайной величины – числа нулей, записанных до появления первой единицы.

6. Длина стороны AD четырехугольника $ABCD$ вписанного в окружность равна 5. Точка M делит эту сторону в отношении $AM:MD=1:4$, а прямые MC и MB параллельны сторонам AB и CD соответственно. Найти длину стороны BC четырехугольника.

Задача 1 Ответ: $P(0)_{\min}=68$.

Решение. Пусть $Q(x)=P(x)-2023$, тогда $Q(17)=Q(23)=0$, следовательно, по теореме Безу, $Q(x)$ делится на $(x-17)$ и на $(x-23)$. Таким образом, имеет место представление $Q(x)=(x-17)(x-23)R(x)$, где $R(x)-$ некоторый многочлен с целыми коэффициентами. Тогда
$$P(x)=(x-17)(x-23)Q(x)+2023,$$
$$P(0)=17\cdot 23\cdot Q(0)+2023=391m+2023,\ m\in\mathbb{Z}.$$
Поскольку $\left[\dfrac{2023}{391}\right]=5,$ получаем $P(0)_{\min}=2023-5\cdot 391=68.$ Например, этот минимум реализуется при $P(x)=2023-5(x-17)(x-23)$. На самом деле в качестве $Q(x)$ можно взять любой многочлен с целыми коэффициентами, такой что $Q(0)=-5$.

Задача 2 Ответ: $x=\dfrac{\pi}{5}+2\pi n, n\in Z$.

Решение. Положим $u:=\log_{\sin x}\sin 2x$ и $v:=\log_{\sin 2x}\sin 3x$. Тогда, по формулам перехода от одного основания логарифма к другому имеем $\log_{\sin 2x}\sin x=\frac{\log_{\sin x}\sin x}{\log_{\sin x}\sin 2x}=\frac{1}{\log_{\sin x}\sin 2x}=\frac{1}{u}$,

$\log_{\sin 3x}\sin x = \frac{\log_{\sin 2x}\sin x}{\log_{\sin 2x}\sin 3x} = \frac{1}{uv}$. Далее, аналогично, $\log_{\sin 3x}\sin 2x = \frac{1}{v}$ и $\log_{\sin x}\sin 3x = uv$. После этого исходное уравнение запишется так: $u + v + \frac{1}{uv} = \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + uv$. Перенося все члены из левой части уравнения в правую и выполняя стандартные преобразования, получаем

$$\frac{v + u + u^2v^2 - u^2v - uv^2 - 1}{uv} = \frac{(u+v) - uv(u+v) + (u^2v^2 - 1)}{uv} =$$
$$= \frac{(u+v)(1-uv) + (uv-1)(uv+1)}{uv} = \frac{(uv-1)(uv-u-v+1)}{uv} =$$
$$= \frac{(uv-1)(u(v-1)-(v-1))}{uv} = \frac{(uv-1)(1-u)(v-1)}{uv} = 0.$$

Поэтому решениями преобразованного уравнения являются все значения u и v, удовлетворяющие хотя бы одному из равенств $u = 1$, или $v = 1$, или $uv = 1$ при условии (это относится только к первым двум равенствам) $uv \neq 0$.

Возвращаясь к исходному уравнению отсюда следует, что с учётом области определения, его решениями являются решения совокупности $u = \log_{\sin x}\sin 2x = 1$, $v = \log_{\sin 2x}\sin 3x = 1$, $uv = \log_{\sin x}\sin 3x = 1$. Эта совокупность на области определения эквивалентна совокупности уравнений $\sin x = \sin 2x$, $\sin 2x = \sin 3x$, $\sin x = \sin 3x$.Областью определения функций, входящих в исходное уравнение, являются значения x, при которых $\sin x \in (0;1)$, $\sin 2x \in (0;1)$, $\sin 3x \in (0;1)$.

Рассмотрим первое уравнение совокупности: $\sin x = \sin 2x$, $\sin x - \sin 2x = 0$, $\sin x - 2\sin x\cos x = 0$, $\sin x\,(1 - 2\cos x) = 0$. Это уравнение на области определения решений не имеет.

Рассмотрим второе уравнение совокупности: $\sin 2x = \sin 3x$, $\sin 3x - \sin 2x = 0$, $\sin\frac{3x-2x}{2}\cos\frac{3x+2x}{2} = \sin\frac{x}{2}\cos\frac{5x}{2} = 0$. Решения уравнения $\sin\frac{x}{2} = 0$ в область определения не входят. Решениями уравнения $\cos\frac{5x}{2} = 0$ являются $\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$, k — целое, т.е. $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{5}k$. При k кратном 5 такие x принадлежат области определения, при остальных значениях k — нет.

Рассмотрим третье уравнение совокупности: $\sin x = \sin 3x$, $\sin 3x - \sin x = 0$, $\sin\frac{3x-x}{2}\cos\frac{3x+x}{2} = \sin x\cos 2x = 0$. Решения уравнения $\sin x = 0$ в область определения не входят. Если $\cos 2x = 0$, то $\sin 2x = \pm 1$, поэтому решения уравнения $\cos 2x = 0$ в область определения также не входят.

Задача 3 Ответ: $P(x) = x(x-1)(x-2)$.

Решение. Подставляя в тождество $xP(x-1) \equiv (x-3)P(x)$ значения $x = 0$, $x = 1$ и $x = 3$ получаем, что

$$-3\cdot P(0) = 0\cdot P(-1) = 0 \Rightarrow P(0) = 0,$$
$$-2\cdot P(1) = 1\cdot P(0) = 0 \Rightarrow P(1) = 0,$$
$$-1\cdot P(2) = 2\cdot P(1) = 0 \Rightarrow P(2) = 0,$$

так что $x = 0$, $x = 1$ и $x = 2$ являются корнями многочлена $P(x)$. Поэтому по теореме Безу многочлен $P(x)$ имеет вид $P(x) = x(x-1)(x-2)Q(x)$, где $Q(x)$ — некоторый приведённый многочлен. При подставке этого выражения для $P(x)$ в тождество $xP(x-1) \equiv (x-3)P(x)$ получаем, что должно быть выполнено тождество

$$x(x-1)(x-2)(x-3)Q(x-1) \equiv (x-3)x(x-1)(x-2)Q(x).$$

Следовательно, $Q(x-1) \equiv Q(x)$. Тогда получим, что для любого $x_0 \in \mathbb{R}$ и любого натурального числа m выполнено, что $Q(x_0) = Q(x_0+1) = \ldots = Q(x_0+m)$. Таким образом, многочлен $R(x) = Q(x) - Q(x_0)$ может иметь сколько угодно корней, что противоречит основной теореме алгебры. Значит, тождество $Q(x-1) \equiv Q(x)$ возможно только при $Q(x) = \text{const}$. Поскольку $P(x)$ приведенный, то $Q(x) \equiv 1$.

Задача 4 Ответ: $(-1;-1;-1)$, $(1;\ 1;\ 1)$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=x+\sin x$, которая монотонно возрастает на всей числовой оси, поскольку ее производная $f'(x)=1+\cos x\ge 0$, причем в достаточно малой окрестности каждой точки, в которых производная обращается в ноль, нет других точек с нулевой производной. Значит, $f(x)=x+\sin x$ принимает каждое свое значение ровно один раз. Далее, поскольку первое уравнение системы может быть записано в виде: $f(x)=f(y)$, получаем $x=y$. Аналогично, для второго уравнения из $f(y)=f(z)$ следует, что $y=z$, т.е. системе удовлетворяет любая тройка $(x;x;x)$, где $x\in R$. Тогда решение задачи сводится к нахождению точек максимума функции $f(x)=\frac{|x|}{1+x^2}$. Эта функция чётная, поэтому достаточно рассмотреть её только при $x\ge 0$. При этих значениях x получаем $\left(\frac{x}{1+x^2}\right)'=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$. На отрезке $[0,1]$ функция $\frac{x}{1+x^2}$ непрерывна, и на промежутке $(0,1)$ её производная положительна, поэтому на отрезке $[0,1]$ эта функция возрастает от 0 до $\frac{1}{2}$. При $x>1$ производная отрицательная, поэтому на промежутке $(1,+\infty)$ функция убывает, оставаясь положительной. Таким образом, $x=1$ является точкой максимума функции $f(x)$. Аналогично $x=-1$ также является ее точкой максимума. Окончательно получаем, что на решениях системы выражение $\left|\frac{z}{1+xy}\right|$ принимает максимальное значение в точках $(-1;-1;-1)$ и $(1;\ 1;\ 1)$.

Задача 5 Ответ: $M\xi=\frac{7}{21}=\frac{1}{3}$.

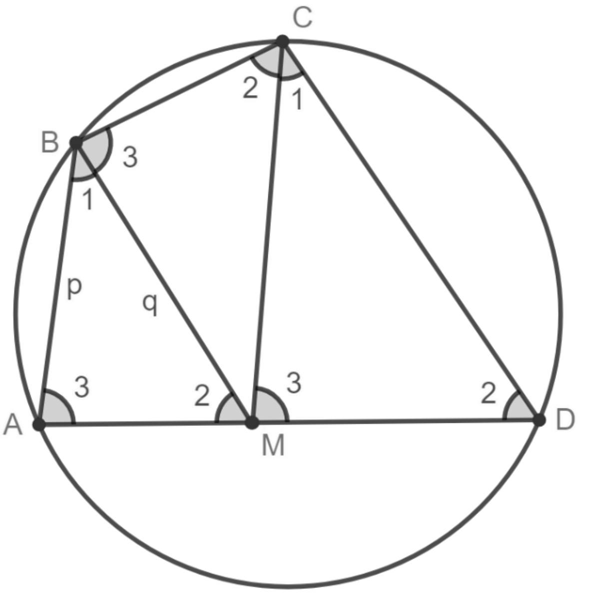
Решение 1 (лобовой подсчёт математического ожидания). Обозначим ξ случайную величину, равную количеству нулей перед первой единицей. По определению математического ожидания

$$M\xi = \sum_{j=0}^{7} j\times P(\xi=j)=\sum_{j=1}^{7} j\times\frac{7}{27}\times\frac{6}{26}\times\ldots\times\frac{7-j+1}{27-j+1}\times\frac{20}{27-j}.$$

Решение 2 (схема распределения шаров по ящикам). Припишем в конце строки одну лишнюю единицу. Тогда 21 единица разделяет строку на 21 группу, внутри каждой из которых написаны только нули и имеющую правой границей единицу. Обозначим через ξ_k случайную величину – число нулей, находящихся в группе с номером k, $k=1,2,\ldots,21$. В задаче требуется найти $M\xi_1$. Случайный способ заполнения строки нулями и единицами указывает на то, что все случайные величины ξ_k имеют одинаковые распределения, а значит и математические ожидания. Их сумма $\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{21}=7$ и, взяв от нее математическое ожидание, получим

$$M(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_{21})=M(7)\Rightarrow 21\cdot M\xi_1=7\Rightarrow M\xi_1=\frac{7}{21}.$$

Задача 6 Ответ: . $BC = 2$



Решение. Прямые MB и CD параллельны, поэтому углы $\widehat{BMA}$ и $\widehat{CDA}$ равны (обозначены на рисунке цифрой 2), аналогично равны углы $\widehat{BAM}$ и $\widehat{CMD}$ (обозначены на рисунке цифрой 3). Отсюда следует подобие треугольников BAM и CMD с коэффициентом подобия 4 и равенство углов $\widehat{ABM}$ и $\widehat{MCD}$ (обозначены на рисунке цифрой 1). Заметим, что $\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} = \pi$.

Покажем, что треугольник MBC подобен треугольникам BAM и CMD, вершины треугольников перечислены в порядке соответствия. Углы $\widehat{DCM}$ и $\widehat{BMC}$, полученные при пересечении прямой CM параллельными прямыми MB и CD, равны как внутренние накрестлежащие. Сумма углов $\widehat{BCD} = \widehat{BCM} + \hat{1}$ и $\widehat{BAD} = \hat{3}$ равна π, как сумма противоположных углов вписанного в окружность четырёхугольника. Значит, угол $\widehat{BCM} = \hat{2}$ и треугольник MBC подобен треугольникам BAM и CMD.

Положим $p \coloneqq BA$ и $q \coloneqq BM$, тогда $CM = 4p$ и $CD = 4q$. Треугольники BAM и MBC подобны с коэффициентом подобия $\frac{p}{q}$, и стороны BA и BM треугольника BAM соответствуют сторонам MB и MC треугольника MBC, поэтому $\frac{p}{q} = \frac{q}{4p}$. Значит, $q = 2p$ и, треугольники BAM и MBC подобны с коэффициентом подобия 2. Следовательно, сторона BC в два раза длиннее стороны AM, т.е. длина стороны BC равна 2.

Вариант № 2

1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами удовлетворяет условию $P(29) = P(37) = 2022$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $P(0) > 0$.

Ответ: $P(0)_{\min} = 949$.

2. Решить уравнение

$$\log_{\sin x} \cos x + \log_{\cos x} \sin 2x + \log_{\sin 2x} \sin x = \log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin 2x} \cos x + \log_{\sin x} \sin 2x.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$, $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in Z$.

3. Найти приведенный многочлен $P(x)$ (коэффициент при старшей степени x равен 1), для которого справедливо тождество $xP(x-1) = (x-4)P(x)$ по переменной x.

Ответ: $P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$.

4. При каких тройках чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющих системе $\begin{cases} \sin x - \sin y = 2(y - x) \\ \cos x - \cos z = 2(x - z) \end{cases}$, выражение $xy + xz + yz + 2x + 2y + 2z + 3$ принимает наименьшее возможное значение?

Ответ: $(-1; -1; -1)$

5. Петя записывает на листе бумаги строчку из 5 нулей и 19 единиц, расположенных в совершенно случайном порядке. Найти математическое ожидание случайной величины – числа нулей, записанных до появления первой единицы.

Ответ: $M\xi = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$.

6. Длина стороны AD четырехугольника $ABCD$ вписанного в окружность равна 3 . Точка M делит эту сторону в отношении $AM : MD = 1:2$, а прямые MC и MB параллельны сторонам AB и CD соответственно. Найти длину стороны BC четырехугольника.

Ответ: $BC = \sqrt{2}$.

Вариант № 3

1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами удовлетворяет условию $P(11) = P(13) = 2021$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $P(0) > 0$.

Ответ: $P(0)_{\min} = 19$.

2. Решить уравнение

$$\log_{\sin x} \cos 2x + \log_{\cos 2x} \sin 3x + \log_{\sin 3x} \sin x = \log_{\cos 2x} \sin x + \log_{\sin 3x} \cos 2x + \log_{\sin x} \sin 3x.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{10} + 2\pi n, n \in Z, x = \frac{9\pi}{10} + 2\pi m, m \in Z$.

3. Найти приведенный многочлен $P(x)$ (коэффициент при старшей степени переменной равен 1), для которого справедливо тождество $xP(x-1) = (x-5)P(x)$.

Ответ: $P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$.

4. При каких тройках чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющих системе $\begin{cases} \sin 2x - \sin 2y = 3(x-y) \\ \cos 3x - \cos 3z = 4(x-z) \end{cases}$, выражение $\frac{\sin x + \sin y}{2 - \sin z}$ принимает наибольшее возможное значение?

Ответ: $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in Z$.

5. Петя записывает на листе бумаги строчку из 6 нулей и 29 единиц, расположенных в совершенно случайном порядке. Найти математическое ожидание случайной величины – числа нулей, записанных до появления первой единицы.

Ответ: $M\xi = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$.

6. Длина стороны AD четырехугольника $ABCD$ вписанного в окружность равна 4 . Точка M делит эту сторону в отношении $AM : MD = 1:3$, а прямые MC и MB параллельны сторонам AB и CD соответственно. Найти длину стороны BC четырехугольника.

Ответ: $BC = \sqrt{3}$.

.

Вариант № 4

1. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами удовлетворяет условию $P(19) = P(21) = 2020$. Найти наименьшее возможное при этих условиях значение $P(0) > 0$.

Ответ: $P(0)_{\min} = 25$.

2. Решить уравнение

$$\log_{\cos x}\sin 2x+\log_{\sin 2x}\cos 3x+\log_{\cos 3x}\cos x=\log_{\sin 2x}\cos x+\log_{\cos 3x}\sin 2x+\log_{\cos x}\cos 3x.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{10}+2\pi n, n\in Z$.

3. Найти приведенный многочлен $P(x)$ (коэффициент при старшей степени переменной равен 1), для которого справедливо тождество $xP(x-1)=(x-6)P(x)$.

Ответ: $P(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$.

4. При каких тройках положительных чисел $(x;y;z)$, удовлетворяющих системе $\begin{cases}\sin 3x-\sin 3y=3(x-y)\\ \cos 4x-\cos 4z=5(z-x)\end{cases}$, выражение $x+y+z-2\operatorname{arctg}(x+y+z)$ принимает наименьшее возможное значение?

Ответ: $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.

5. Петя записывает на листе бумаги строчку из 4 нулей и 39 единиц, расположенных в совершенно случайном порядке. Найти математическое ожидание случайной величины – числа нулей, записанных до появления первой единицы.

Ответ: $M\xi=\dfrac{4}{40}=\dfrac{1}{10}$.

6. Длина стороны AD четырехугольника $ABCD$ вписанного в окружность равна 6 . Точка M делит эту сторону в отношении $AM:MD=1:5$, а прямые MC и MB параллельны сторонам AB и CD соответственно. Найти длину стороны BC четырехугольника.

Ответ: $BC=\sqrt{5}$.

Критерии проверки работ ВЫЕЗДНОГО
финального тура олимпиады Росатом 2023   11 класс

Во всех задачах верный ответ без обоснования   0

1. **задача**
   - есть продвижение в решениии задачи **0.5**
   - использовал целочисленность, а также взаимную простоту аргументов многочлена, фигурирующего в условии **1.0**
   - получил общий вид P(0) , но неверно нашел наименьшее положительное значение **1.5**
   - верный обоснованный ответ **2.0**
2. **задача**
   - представил левую и правую части в виде суммы трех взаимно обратных величин или провел какие-то верные логарифмические преобразования или верно нашел ОДЗ **0.5**
   - выразил одну из величин через две другие и получил правильное разложение на множители **1.0**
   - верно решил тригонометрию **1.5**
   - отобрал корни по ОДЗ **2.0**
3. **задача**
   - верно нашел один или несколько корней многочлена или некоторые его коэффициенты **0.5-1.0**
   - верно нашел разложение на множители на основе всех найденных корней **1.0–1.5**
   - обосновал (при всех найденных корнях), что иных множителей нет **2.0**
   - или составил рекуррентные соотношения и верно нашел все коэффициенты многочлена **2.0**
4. **задача**
   - обнаружил и обосновал инъекцию в одном уравнении системы **0.5**
   - обнаружил и обосновал инъекцию в обоих уравнениях системы **1.0**
   - на основе решенной системы упростил исследуемую на экстремум функцию **1.5**
   - верно нашел решения, реализующие экстремум **2.0**
   - верно нашел точки экстремума без обоснования равенства аргументов **0.5**
5. **задача**
   - есть понимание, каковы элементарные исходы в задаче **0.5**
   - плюс понимание, что такое математическое ожидание **1.0**
   - получен непричесанный ответ (или решение с незначительными погрешностями) **1.5**
   - свернутый (но необязательно сведенный к числу) верный ответ **2.0**

6. задача
- правильный чертёж, на котором видны малый и большой подобные треугольники **0.5**
- плюс использование свойств вписанных четырехугольников или свойств секущих, если использовался другой способ решения **1.0**
- доказано, что треугольник с искомой стороной подобен двум**,** указанным выше **1.5**
- составлена верные пропорции и получен правильный ответ **2.0**
- верный ответ на основе пропорций без достаточного обоснования **1.0**