Объединенная межвузовская математическая олимпиада **05.02.2023**

1 вариант

Задача 1. Точка R_1 — середина отрезка ST; точка R_2 — середина отрезка SR_1; для каждого $n \geqslant 3$ точка R_n — середина отрезка $R_{n-2}R_{n-1}$. Пусть R — предельное положение точки R_n при $n \to \infty$. Найдите длину отрезка RT, если длина отрезка ST равна 15.

Задача 2. При каком наименьшем n можно покрасить каждое натуральное число в один из n цветов так, чтобы любые два числа, отличающиеся на 5, на 8, на 10, на 13 и на 18, были покрашены в разные цвета?

Задача 3. На заводе имеются в достаточном количестве три сплава титана, алюминия и молибдена. Все сплавы с примесями. Процентное содержание компонентов в этих сплавах приведено в таблице.

	1	2	3
Молибден	8%	3%	8%
Титан	36%	21%	6%
Алюминий	55%	76%	15%

Из этих сплавов необходимо приготовить новый сплав, в котором алюминия должно быть не больше 38%, а молибдена — не меньше 5%. Какое наибольшее и какое наименьшее содержание титана (в процентах) может быть в этом сплаве?

Задача 4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 9$, $BC = 2$ и боковыми сторонами $AB = 5$, $CD = 3\sqrt{2}$. Точка P на прямой BC такова, что периметр треугольника APD наименьший из возможных. Найдите этот периметр.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^{10} + x_2^{10} + \ldots + x_{92}^{10} = 3^{10} \\ x_1^{33} + x_2^{33} + \ldots + x_{92}^{33} = 3^{33}. \end{cases}$$

Задача 6. Укажите все значения параметра a, $|a| < 1$, при которых множество решений неравенства

$$\frac{|\cos t - a| - \sin t}{|\cos t - \frac{3}{4}|} > 0$$

для $t \in (0; \pi)$ представимо в виде двух непересекающихся интервалов.

Задача 7. Дано действительное число t, отличное от 0, 1, -1, $\frac{1}{2}$ и 2. Решите уравнение

$$\frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2} = \frac{(t^2 - t + 1)^3}{t^2(t-1)^2}.$$

Ответ может зависеть от t.

Задача 8. В треугольнике ABC точки A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB, а A_1, B_1, C_1 — точки касания этих сторон со вписанной окружностью соответственно. Прямые A_1C_1, B_1C_1 пересекают A_0B_0 в точках X и Y. Докажите, что прямая CC_1 делит отрезок XY пополам.

Задача 9. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых существует такое вещественное число a, что при всех вещественных x, y выполнено равенство

$$2f(xy + 3) = f(x)f(y) - f(x) - 2y + a.$$

Задача 10. В группе из 80 человек некоторые знакомы друг с другом (знакомства взаимны). Известно, что в группе есть человек, который знает ровно 1 из оставшихся, человек, который знает ровно 2 из оставшихся, …, человек, который знает ровно 54 из оставшихся. Докажите, что в группе есть три человека, каждые два из которых знакомы.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **05.02.2023**

2 вариант

Задача 1. Точка R_1 — середина отрезка PQ; точка R_2 — середина отрезка R_1Q; для каждого $n \geqslant 3$ точка R_n — середина отрезка $R_{n-2}R_{n-1}$. Пусть R — предельное положение точки R_n при $n \to \infty$. Найдите длину отрезка RQ, если длина отрезка PQ равна 18.

Задача 2. При каком наименьшем n можно покрасить каждое натуральное число в один из n цветов так, чтобы любые два числа, отличающиеся на 7, на 10, на 14, на 17 и на 24, были покрашены в разные цвета?

Задача 3. На заводе имеются в достаточном количестве три сплава титана, алюминия и молибдена. Все сплавы с примесями. Процентное содержание компонентов в этих сплавах приведено в таблице.

	1	2	3
Алюминий	54%	7%	47%
Молибден	8%	3%	3%
Титан	36%	56%	26%

Из этих сплавов необходимо приготовить новый сплав, в котором алюминия должно быть не больше 39%, а молибдена — не больше 5%. Какое наибольшее и какое наименьшее содержание титана (в процентах) может быть в этом сплаве?

Задача 4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 11$, $BC = 2$ и боковыми сторонами $AB = 5$, $CD = \sqrt{34}$. Точка P на прямой BC такова, что периметр треугольника APD наименьший из возможных. Найдите этот периметр.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^{34} + x_2^{34} + \ldots + x_{32}^{34} = 74^{34} \\ x_1^{55} + x_2^{55} + \ldots + x_{32}^{55} = 74^{55}. \end{cases}$$

Задача 6. Укажите все значения параметра a, $|a| < 1$, при которых множество решений неравенства

$$\frac{|\sin t - a| - \cos t}{|\sin t - \frac{1}{4}|} > 0$$

для $t \in (-\pi/2; \pi/2)$ представимо в виде двух непересекающихся интервалов.

Задача 7. Дано действительное число p, отличное от 0, 1, -1, $-\frac{1}{2}$ и -2. Решите уравнение

$$\frac{(x^2+x+1)^3}{x^2(x+1)^2} = \frac{(p^2+p+1)^3}{p^2(p+1)^2}.$$

Ответ может зависеть от p.

Задача 8. В треугольнике ABC точки A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB, а A_1, B_1, C_1 — точки касания этих сторон со вписанной окружностью соответственно. Прямые A_1C_1, B_1C_1 пересекают A_0B_0 в точках X и Y. Докажите, что $\angle CXC_1 = \angle CYC_1$.

Задача 9. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых существует такое вещественное число a, что при всех вещественных x, y выполнено равенство

$$2f(xy-2) = f(x)f(y) - f(x) - 2y + a.$$

Задача 10. На плоскости отмечены 35 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые отмеченные точки соединены отрезками. Известно, что из какой-то отмеченной точки выходит ровно 1 отрезок в другую отмеченную точку, из какой-то — ровно 2, …, из какой-то — ровно 24. Докажите, что существуют такие три отмеченные точки, что любые две из них соединены отрезком.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **05.02.2023**

3 вариант

Задача 1. Точка L_1 — середина отрезка KM; точка L_2 — середина отрезка L_1M; для каждого $n \geqslant 3$ точка L_n — середина отрезка $L_{n-2}L_{n-1}$. Пусть L — предельное положение точки L_n при $n \to \infty$. Найдите длину отрезка KL, если длина отрезка KM равна 12.

Задача 2. При каком наименьшем n можно покрасить каждое натуральное число в один из n цветов так, чтобы любые два числа, отличающиеся на 8, на 11, на 16, на 19 и на 27, были покрашены в разные цвета?

Задача 3. На заводе имеются в достаточном количестве три сплава титана, алюминия и молибдена. Все сплавы с примесями. Процентное содержание компонентов в этих сплавах приведено в таблице.

	1	2	3
Алюминий	48%	8%	7%
Титан	32%	2%	22%
Молибден	12%	12%	15%

Из этих сплавов необходимо приготовить новый сплав, в котором алюминия должно быть не меньше 39%, а молибдена — не больше 13%. Какое наибольшее и какое наименьшее содержание титана (в процентах) может быть в этом сплаве?

Задача 4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 7$, $BC = 2$ и боковыми сторонами $AB = 5$, $CD = 2\sqrt{5}$. Точка P на прямой BC такова, что периметр треугольника APD наименьший из возможных. Найдите этот периметр.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^{46} + x_2^{46} + \ldots + x_{50}^{46} = 13^{46} \\ x_1^{73} + x_2^{73} + \ldots + x_{50}^{73} = 13^{73}. \end{cases}$$

Задача 6. Укажите все значения параметра a, $|a| < 1$, при которых множество решений неравенства

$$\frac{|\cos t - a| - \sin t}{|\cos t - \frac{1}{3}|} > 0$$

для $t \in (0; \pi)$ представимо в виде двух непересекающихся интервалов.

Задача 7. Дано действительное число q, отличное от $0, 1, -1, -\frac{1}{2}$ и -2. Решите уравнение

$$\frac{x^2(x+1)^2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{q^2(q+1)^2}{(q^2+q+1)^3}.$$

Ответ может зависеть от q.

Задача 8. В треугольнике ABC точки A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB, а A_1, B_1, C_1 — точки касания этих сторон со вписанной окружностью соответственно. Прямые A_1C_1, B_1C_1 пересекают A_0B_0 в точках X и Y. Докажите, что $C_1Y = XC$.

Задача 9. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых существует такое вещественное число a, что при всех вещественных x, y выполнено равенство

$$f(xy+1) = f(x)f(y) - f(x) - y + a.$$

Задача 10. На конференцию приехали 50 учёных, некоторые пары из которых являются соавторами, т.е. опубликовали хотя бы одну совместную статью. Известно, что на конференции есть учёный, у которого на конференции присутствует ровно 1 соавтор, есть учёный, у которого ровно 2, …, есть учёный, у которого ровно 34. Докажите, что на конференции есть три учёных, каждые два из которых — соавторы.

Объединенная межвузовская математическая олимпиада **05.02.2023**

4 вариант

Задача 1. Точка C_1 — середина отрезка AB; точка C_2 — середина отрезка AC_1; для каждого $n \geqslant 3$ точка C_n — середина отрезка $C_{n-2}C_{n-1}$. Пусть C — предельное положение точки C_n при $n \to \infty$. Найдите длину отрезка AC, если длина отрезка AB равна 9.

Задача 2. При каком наименьшем n можно покрасить каждое натуральное число в один из n цветов так, чтобы любые два числа, отличающиеся на 4, на 7, на 8, на 11 и на 15, были покрашены в разные цвета?

Задача 3. На заводе имеются в достаточном количестве три сплава титана, алюминия и молибдена. Все сплавы с примесями. Процентное содержание компонентов в этих сплавах приведено в таблице.

	1	2	3
Титан	45%	15%	30%
Алюминий	28%	68%	18%
Молибден	15%	15%	5%

Из этих сплавов необходимо приготовить новый сплав, в котором алюминия должно быть не меньше 39%, а молибдена — не меньше 12%. Какое наибольшее и какое наименьшее содержание титана (в процентах) может быть в этом сплаве?

Задача 4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 9$, $BC = 2$ и боковыми сторонами $AB = 5$, $CD = 4\sqrt{2}$. Точка P на прямой BC такова, что периметр треугольника APD наименьший из возможных. Найдите этот периметр.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^{20} + x_2^{20} + \ldots + x_{42}^{20} = 33^{20} \\ x_1^{37} + x_2^{37} + \ldots + x_{42}^{37} = 33^{37}. \end{cases}$$

Задача 6. Укажите все значения параметра a, $|a| < 1$, при которых множество решений неравенства

$$\frac{|\sin t - a| - \cos t}{|\sin t - \frac{2}{3}|} > 0$$

для $t \in (-\pi/2; \pi/2)$ представимо в виде двух непересекающихся интервалов.

Задача 7. Дано действительное число s, отличное от 0, 1, -1, $\frac{1}{2}$ и 2. Решите уравнение

$$\frac{x^2(x-1)^2}{(x^2-x+1)^3} = \frac{s^2(s-1)^2}{(s^2-s+1)^3}.$$

Ответ может зависеть от s.

Задача 8. В треугольнике ABC точки A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB, а A_1, B_1, C_1 — точки касания этих сторон со вписанной окружностью соответственно. Прямые A_1C_1, B_1C_1 пересекают A_0B_0 в точках X и Y. Докажите, что $\angle XC_1Y = \angle XCY$.

Задача 9. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых существует такое вещественное число a, что при всех вещественных x, y выполнено равенство

$$f(2xy+1) = f(x)f(y) - f(x) - 2y + a.$$

Задача 10. В стране 20 городов, между некоторыми из них имеются двусторонние беспересадочные авиалинии. Известно, что из какого-то города можно улететь ровно в 1 другой город, из какого-то — ровно в 2, …, из какого-то — ровно в 14. Докажите, что существуют такие три города, что из каждого из них можно улететь в каждый из двух оставшихся.