Вариант I

Задача 1. Точка R_1 — середина отрезка ST; точка R_2 — середина отрезка SR_1; для каждого $n \geqslant 3$ точка R_n — середина отрезка $R_{n-2}R_{n-1}$. Пусть R — предельное положение точки R_n при $n \to \infty$. Найдите длину отрезка RT, если длина отрезка ST равна 15.

Ответ: 10.

Решение. Обозначим $T = R_{-1}$, $S = R_0$, тогда R_n — середина отрезка $R_{n-2}R_{n-1}$ для каждого $n \geqslant 1$. Легко видеть, что на отрезке точки будут расположены в следующем порядке:

$$S = R_0,\ R_2,\ R_4,\ \dots,\ R,\ \dots,\ R_3,\ R_1,\ R_{-1} = T.$$

Поэтому

$$RT = R_{-1}R_1 + R_1R_3 + R_3R_5 + \dots.$$

Далее, длина отрезка $R_{n+1}R_n$ в два раза меньше длины отрезка R_nR_{n-1}, откуда длина отрезка $R_{n+2}R_{n+1}$ в четыре раза меньше длины отрезка R_nR_{n-1}. Значит,

$$RT = R_{-1}R_1\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) = \frac{ST}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{15}{2}\cdot\frac{4}{3} = 10.$$

Задача 2. При каком наименьшем n можно покрасить каждое натуральное число в один из n цветов так, чтобы любые два числа, отличающиеся на 5, на 8, на 10, на 13 и на 18, были покрашены в разные цвета?

Ответ: 5.

Решение. Докажем для начала, что четырьмя и меньше цветами обойтись не удастся. Посмотрим на числа n, $n+5$, $n+10$, $n+18$. Разности между ними равны

$$(n+5)-n = 5, \quad (n+10)-n = 10, \quad (n+18)-n = 18,$$
$$(n+10)-(n+5) = 5, \quad (n+18)-(n+5) = 13, \quad (n+18)-(n+10) = 8,$$

т.е. любые два из этих чисел покрашены в различные цвета. Значит, цветов хотя бы четыре. Предположим, что цветов ровно четыре. Тогда числа n, $n+5$, $n+10$, $n+18$ покрашены во все возможные цвета. Аналогично можно получить, что во все возможные цвета покрашены числа n, $n+5$, $n+13$, $n+18$. Значит, для каждого натурального n числа $n+10$ и $n+13$ должны быть покрашены в один и тот же цвет.

Применим полученное утверждение для $n = 1, 4, 7, \dots, 16$. Тогда числа $11, 14, 17, \dots, 29$ покрашены в один и тот же цвет. Противоречие, ведь $29 - 11 = 18$ и числа 11 и 29 должны быть покрашены в разные цвета.

Докажем теперь, что пять цветов достаточно. Для этого разобьём все натуральные числа на группы по 5 подряд идущих чисел, а группы покрасим так: первую — в первый, вторую — во второй, …, пятую — в пятый, шестую — в первый, седьмую — во второй, …. При такой раскраске числа одного цвета будут или отличаться не более чем на 4, если лежат в одной пятёрке, или хотя бы на 21 — если в разных. Значит, числа, отличающиеся на 5, 8, 10, 13 и 18, будут покрашены в разные цвета.

Задача 3. На заводе имеются в достаточном количестве три сплава титана, алюминия и молибдена. Все сплавы с примесями. Процентное содержание компонентов в этих сплавах приведено в таблице.

	1	2	3
Молибден	8%	3%	8%
Титан	36%	21%	6%
Алюминий	55%	76%	15%

Из этих сплавов необходимо приготовить новый сплав, в котором алюминия должно быть не больше 38%, а молибдена — не меньше 5%. Какое наибольшее и какое наименьшее содержание титана (в процентах) может быть в этом сплаве?

Ответ: 6 и 23,25.

Решение. Заметим, что как бы ни изготавливали новый сплав, содержание титана в нём будет не меньше минимального из содержаний титана в имеющихся сплавах. Поэтому содержание титана в любом изготовленном сплаве будет не менее 6%. С другой стороны, сплав 3 подходит под условия на содержание алюминия и молибдена. Значит, наименьшее содержание титана — 6%.

Теперь найдём наибольшее содержание титана в таком сплаве. Заметим, что если при изготовлении нового сплава мы использовали сплав 2, то можно его заменить на сплав 1: от этого содержание алюминия уменьшится, а молибдена и титана — увеличится. Поэтому в сплаве с наибольшим содержанием титана не участвует сплав 2.

Сразу отметим, что тогда в таком сплаве будет 8% молибдена, т.е. он подходит под условие на молибден. В сплаве 1 титана больше, чем в сплаве 3, но сплав 1 не подходит под условие на алюминий. Понятно, что чем меньше мы возьмём сплава 3, тем больше будет титана в изготовленном сплаве. Возьмём ровно столько, чтобы выполнилось условие на алюминий: $55x + 15y = 38(x + y)$ (x и y — масса сплава 1 и 3 соответственно), откуда $17x = 23y$, т.е. можно взять 23 части сплава 1 и 17 частей сплава 3. Тогда содержание титана в процентах будет

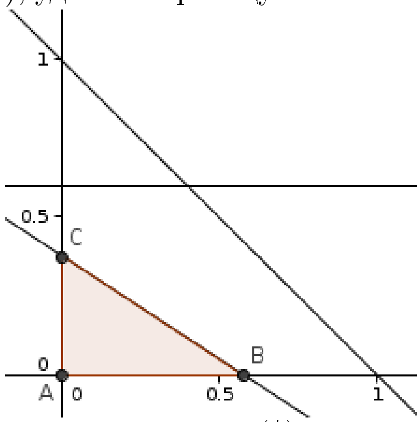
$$\frac{36 \cdot 23 + 6 \cdot 17}{23 + 17} = 23{,}25.$$

Другое решение. Пусть взято x, y и $1 - x - y$ первого, второго и третьего сплава соответственно, причём $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $1 - x - y \geqslant 0$. Тогда условия задачи можно записать так:

$$55x + 76y + 15(1 - x - y) = 40x + 61y + 15 \leqslant 38,$$
$$8x + 3y + 8(1 - x - y) = -5y + 8 \geqslant 5$$

Изобразим на координатной плоскости область (см. рисунок), удовлетворяющую системе неравенств

$$\begin{cases} 40x + 61y - 23 \leqslant 0, \\ -5y + 3 \geqslant 0 \\ x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x + y - 1 \leqslant 0. \end{cases}$$



Процентное содержание титана $36x + 21y + 6(1 - x - y) = 6 + 30x + 15y$ (*). Легко видеть, что минимум этого числа достигается в точке A и равен 6. Чтобы найти максимум, заметим, что абсцисса точки B равна $\frac{23}{40} > \frac{1}{2}$, а ордината точки C — $\frac{23}{61} < \frac{1}{2}$. При этом коэффициент при x в (*) больше. Значит, значение в точке B точно больше (мы большее число умножаем на большее число), и равно $6 + 30 \cdot \frac{23}{40} = 23{,}25$.

Комментарий. При другом выборе переменных (например, x первого сплава, $1 - x - y$ второго и y третьего) будут получаться другие функции и другие области. При этом решение может стать как чуть проще, так и немного сложнее. В решении выше специально выбран наиболее «бездумный» путь.

Комментарий. Задача имеет отношение к теме «линейное программирование»: нахождение экстремумов на множествах, задаваемых системами линейных уравнений и неравенств. Несложно показать, что для линейной функции максимум и минимум достигаются в одной из вершин многоугольника — множества всех точек, для которых выполняются условия. Тогда задача решается чисто алгоритмически: достаточно построить многоугольник, найти все его вершины и в каждой посчитать значение требуемой функции (так устроено второе решение выше).

Для произвольных констант такая задача нагружена технически и для олимпиады скорее неудачна. В предложенных вариантах числа подобраны так, чтобы экстремум можно было найти несложными рассуждениями (так устроение первое решение выше), а не просто технически.

Задача 4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 9$, $BC = 2$ и боковыми сторонами $AB = 5$, $CD = 3\sqrt{2}$. Точка P на прямой BC такова, что периметр треугольника APD наименьший из возможных. Найдите этот периметр.

Ответ: $9 + \sqrt{117}$.

Решение. Воспользуемся следующим утверждением, которое наиболее известно как «принцип наименьшего времени Ферма» в физике:

> Для данных точек A, B и данной прямой ℓ из всех точек $L \in \ell$ сумма $AL + BL$ будет минимальной, когда углы между прямыми AL и ℓ и BL и ℓ будут равны.

Тогда для искомой точки P на прямой BC должно выполняться равенство $\angle XPA = \angle YPD$ (точки X и Y — где-то «далеко» на прямой BC). Поскольку $BC \parallel AD$, то

$$\angle PAD = \angle XPA = \angle YPD = \angle PDA,$$

т.е. треугольник PAD — равнобедренный. Значит, нам достаточно найти периметр равнобедренного треугольника PAD, где P — точка на прямой BC.

По теореме Пифагора этот периметр равен

$$9 + 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 + h^2} = 9 + \sqrt{81 + 4h^2},$$

где h — расстояние между прямыми AD и BC, т.е. высота трапеции.

Найти высоту трапеции можно разными способами. Например, проведём через точку B, прямую, параллельную CD, до пересечения с основанием AD в точке K. Тогда искомая высота — это высота из вершины B в треугольнике ABK. Поскольку $BCDK$ — параллелограмм, то $BK = CD = 3\sqrt{2}$, $AK = AD - DK = AD - BC = 9 - 2 = 7$.

Итого, нам достаточно найти длину высоты на сторону длины 7 в треугольнике со сторонами 5, 7, $3\sqrt{2}$. По формуле площади и формуле Герона имеем

$$4h^2 \cdot 7^2 = 16S^2 = (5 + 7 + 3\sqrt{2})(5 + 7 - 3\sqrt{2})(5 - 7 + 3\sqrt{2})(-5 + 7 + 3\sqrt{2})$$

откуда

$$4h^2 = \frac{(12 + 3\sqrt{2})(12 - 3\sqrt{2})(-2 + 3\sqrt{2})(2 + 3\sqrt{2})}{7^2} = \frac{(12^2 - (3\sqrt{2})^2)((3\sqrt{2})^2 - 2^2)}{7^2} = 36,$$

и окончательный ответ $9 + \sqrt{81 + 4h^2} = 9 + \sqrt{117}$.

Другое решение. Также, как и в первом решении, найдём высоту трапеции. Покажем здесь, как можно это было сделать по-другому. Опустим высоты BE и CF трапеции. Обозначим их длины через h, длину отрезка AE обозначим через ℓ. Поскольку $EF = BC = 2$, для FD получим $FD = 7 - \ell$. Из прямоугольных треугольников ABE и CDF по теореме Пифагора получим $AB^2 = BE^2 + AE^2$ и $CD^2 = CF^2 + DF^2$.

Подставив в эти равенства известные длины, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 5^2 = h^2 + \ell^2 \\ 18 = h^2 + (7 - \ell)^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $\big(\ell + (7 - \ell)\big)\big(\ell - (7 - \ell)\big) = 7$, откуда $\ell = 4$. Тогда $h = 3$, $FD = 3$.

Рассмотрим треугольник APD. Обозначим $BP = x$, тогда $PC = 2 - x$ (здесь и далее все расстояния со знаком, т.е. могут быть отрицательные). Опустим высоту PQ. Тогда треугольник APQ прямоугольный и по теореме Пифагора

$$AP = \sqrt{AQ^2 + QP^2} = \sqrt{(4 + x)^2 + 3^2}.$$

Аналогично, из прямоугольного треугольника DPQ

$$DP = \sqrt{(5-x)^2+3^2}.$$

Тогда периметр треугольника APD равен

$$P(x) = 9 + \sqrt{(4+x)^2+3^2} + \sqrt{(5-x)^2+3^2}.$$

Найдём производную этой функции:

$$P'(x) = \frac{4+x}{\sqrt{(4+x)^2+3^2}} - \frac{5-x}{\sqrt{(5-x)^2+3^2}}.$$

Из уравнения $P'(x) = 0$ получаем

$$(4+x)^2\big((5-x)^2+3^2\big) = (5-x)^2\big((4+x)^2+3^2\big),$$

откуда $(5-x)^2 = (4+x)^2$, $x = \frac{1}{2}$. Несложно видеть, что $x = \frac{1}{2}$ именно точка минимума, откуда минимальный периметр равен $P\left(\frac{1}{2}\right) = 9 + \sqrt{117}$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^{10} + x_2^{10} + \ldots + x_{92}^{10} = 3^{10} \\ x_1^{33} + x_2^{33} + \ldots + x_{92}^{33} = 3^{33}. \end{cases}$$

Ответ: один из x_i равен 3, все остальные равны 0.

Решение. Заметим, что

$$\left(\frac{x_1}{3}\right)^{10} + \left(\frac{x_2}{3}\right)^{10} + \ldots + \left(\frac{x_{92}}{3}\right)^{10} = 1.$$

Тогда для каждого $1 \leqslant k \leqslant 92$ имеем $\left|\frac{x_k}{3}\right| \leqslant 1$, откуда $\left|\frac{x_k}{3}\right|^{33} \leqslant \left|\frac{x_k}{3}\right|^{10}$. Окончательно получим

$$1 = \left|\left(\frac{x_1}{3}\right)^{33} + \left(\frac{x_2}{3}\right)^{33} + \ldots + \left(\frac{x_{92}}{3}\right)^{33}\right| \leqslant \left|\frac{x_1}{3}\right|^{33} + \left|\frac{x_2}{3}\right|^{33} + \ldots + \left|\frac{x_{92}}{3}\right|^{33} \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{x_1}{3}\right|^{10} + \left|\frac{x_2}{3}\right|^{10} + \ldots + \left|\frac{x_{92}}{3}\right|^{10} = \left(\frac{x_1}{3}\right)^{10} + \left(\frac{x_2}{3}\right)^{10} + \ldots + \left(\frac{x_{92}}{3}\right)^{10} = 1.$$

Значит, для каждого k выполнено $\left|\frac{x_k}{3}\right|^{33} = \left|\frac{x_k}{3}\right|^{10}$, откуда $x_k \in \{-3, 0, 3\}$. Отсюда несложно получаем, что тогда один из x_k равен 3, а все остальные равны 0.

Задача 6. Укажите все значения параметра a, $|a| < 1$, при которых множество решений неравенства

$$\frac{|\cos t - a| - \sin t}{|\cos t - \frac{3}{4}|} > 0$$

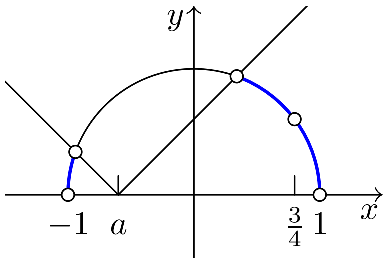
для $t \in (0; \pi)$ представимо в виде двух непересекающихся интервалов.

Ответ: $[\frac{3-\sqrt{7}}{4}, 1)$.

Решение. Пусть $x = \cos t$, $y = \sin t$. Тогда, с учётом допустимых значений t, неравенство равносильно системе

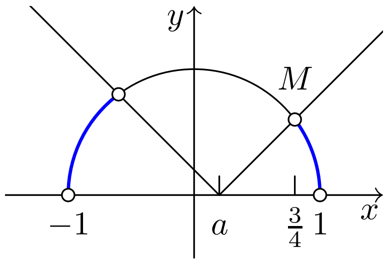
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y > 0, \\ x \neq \frac{3}{4}, \\ y < |x - a|. \end{cases}$$

Решения этой системы — точки на полуокружности $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$, лежащие ниже графика функции $y = |x - a|$.



При изменении параметра a график функции $y = |x - a|$ перемещается параллельно оси x. При значениях a, близких к -1, в качестве множества решений имеем 3 непересекающихся интервала. При значениях a, близких к 1, получается 2 интервала.

Крайнее положение графика, при котором получается два интервала, изображено на рисунке:



Координаты точки M пересечения окружности и прямой $y = x - a$ равны $x_M = \frac{3}{4}, y_M = \sqrt{1-(3/4)^2} = = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Так как $\frac{3}{4} - a = y_M$, то $a = \frac{3-\sqrt{7}}{4}$.

Таким образом, ответом является множество $[\frac{3-\sqrt{7}}{4}, 1)$.

Задача 7. Дано действительное число t, отличное от 0, 1, -1, $\frac{1}{2}$ и 2. Решите уравнение

$$\frac{(x^2-x+1)^3}{x^2(x-1)^2} = \frac{(t^2-t+1)^3}{t^2(t-1)^2}.$$

Ответ может зависеть от t.

Ответ: t, $\frac{1}{t}$, $1-t$, $\frac{1}{1-t}$, $\frac{t}{t-1}$, $\frac{t-1}{t}$.

Решение. Докажем два утверждения:

- если x_0 — решение уравнения, то и $1 - x_0$ также решение; действительно,

$$\frac{((1-x_0)^2-(1-x_0)+1)^3}{(1-x_0)^2((1-x_0)-1)^2} = \frac{(x_0^2-x_0+1)^3}{x_0^2(x_0-1)^2},$$

поэтому если второе равняется $\frac{(t^2-t+1)^3}{t^2(t-1)^2}$, то и первое — тоже.

- если x_0 — решение уравнения, то и $\frac{1}{x_0}$ также решение; действительно,

$$\frac{((1/x_0)^2-(1/x_0)+1)^3}{(1/x_0)^2((1/x_0)-1)^2} = \frac{(x_0^2-x_0+1)^3}{x_0^2(x_0-1)^2},$$

поэтому если второе равняется $\frac{(t^2-t+1)^3}{t^2(t-1)^2}$, то и первое — тоже.

Заметим теперь, что t — точно корень исходного уравнения. Тогда, корнями являются также числа $1/t$, $1-t$, а тогда и $\frac{1}{1-t}$, $1 - \frac{1}{1-t} = \frac{t}{t-1}$, $1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$.

Можно показать, что при данных ограничениях на t получившиеся 6 чисел — различны. Кроме того, исходное уравнение при $x \neq 0$, $x \neq 1$ равносильно уравнению 6-й степени, которое не может иметь больше 6 корней. Значит, найденные числа и есть все корни.

Комментарий. По сути мы доказали, что при $x \neq 0$, $x \neq 1$ исходное уравнение равносильно уравнению

$$(x-t)\,(x-(1-t))\left(x-\frac{1}{t}\right)\left(x-\frac{1}{1-t}\right)\left(x-\frac{t}{t-1}\right)\left(x-\frac{t-1}{t}\right) = 0,$$

поэтому указанные числа являются всеми корнями и при отстутствии ограничений на t.

Комментарий. Аналогичное множество встречалось в ОММО–2022, в задаче 10.

Задача 8. В треугольнике ABC точки A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB, а A_1, B_1, C_1 — точки касания этих сторон со вписанной окружностью соответственно. Прямые A_1C_1, B_1C_1 пересекают A_0B_0 в точках X и Y. Докажите, что прямая CC_1 делит отрезок XY пополам.

Решение. Докажем, что точки X, Y лежат на биссектрисах углов A, B соответственно.

Так как $AB_1 = AC_1$ и $B_0Y \parallel AC_1$, то $B_0Y = B_0B_1 = \frac{|AB-BC|}{2}$, следовательно, $A_0Y = A_0B$ и $\angle YBA_0 = \angle BYA_0 = \angle YBA$. Аналогично $\angle XAC = \angle XAB$.

Кроме того, поскольку точки, симметричные C относительно X и Y, лежат на AB, то $\angle CYB = \angle CXA = 90°$, т.е. CXC_1Y — параллелограмм. Значит, диагонали делятся точкой пересечения пополам, откуда CC_1 делит XY пополам.

Комментарий. Для доказательства, что X и Y лежат на биссектрисах углов A и B соответственно можно сразу сослаться на следующее утверждение.

> В треугольнике ABC следующие четыре прямые пересекаются в одной точке:
>
> - биссектриса угла A,
> - перпендикуляр из вершины B на эту биссектрису,
> - прямая, соединяющая точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и BC,
> - средняя линия, параллельная стороне AC.

Чаще всего его упоминают под названием «задача 255». Это и вправду почти задача номер 255 из книги И.Ф. Шарыгина «Геометрия: 9–11 кл.: От учебной задачи к творческой». Не стоит учить наизусть номера задач из этого задачника. Популярность именно этой задачи можно понять из предисловия автора (а заодно и убедиться в его правоте):

> P.S. А все же, откуда берутся геометрические задачи? Общий и полный ответ здесь вряд ли возможен. А в частности… В частности, очень много новых задач содержится в этой книге. Надо только суметь их извлечь. Наверное, каждая содержательная геометрическая задача может быть источником целого ряда новых. Для этого надо с ней «повозиться», посмотреть с разных сторон, попробовать перефразировать, обобщить. В результате удивительным образом может возникнуть совершенно не похожая на «родителя» задача. Например, возьмём ту же задачу № 255…

Задача 9. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых существует такое вещественное число a, что при всех вещественных x, y выполнено равенство

$$2f(xy+3) = f(x)f(y) - f(x) - 2y + a.$$

Ответ: $f(x) = 2x + 1$.

Решение. Заметим, что

$$f(x)f(y) - f(x) - 2y + a = 2f(xy+3) = 2f(yx+3) = f(y)f(x) - f(y) - 2x + a.$$

Значит, при всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено $f(x) - 2x = f(y) - 2y$. Значит, разность $f(x) - 2x$ постоянна и $f(x) = 2x + C$, для некоторого $C \in \mathbb{R}$. Подставляя в исходное равенство, получаем, что при всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство:

$$2(2xy + 6 + C) = 4xy + 2Cx + 2Cy + C^2 - 2x - C - 2y + a.$$

Оно тождественно выполнено только при $C = 1$; при этом $a = 14$.

Задача 10. В группе из 80 человек некоторые знакомы друг с другом (знакомства взаимны). Известно, что в группе есть человек, который знает ровно 1 из оставшихся, человек, который знает ровно 2 из оставшихся, ..., человек, который знает ровно 54 из оставшихся. Докажите, что в группе есть три человека, каждые два из которых знакомы.

Решение. Посмотрим на человека A, который знает ровно 54 из оставшихся. Из них максимум 26 — люди, про количество знакомых в условии ничего не сказано. Осталось как минимум 28 человек, про количество знакомых которых сказано в условии. Среди них тогда найдётся человек B, количество знакомых которого хотя бы 28.

У A, кроме B, есть ещё 53 знакомых, а у B, кроме A — ещё 27. Поскольку $53 + 27 = 80 > 78$, то у A и B есть хотя бы один общий знакомый C. Тройка A, B, C и есть искомая тройка человек.

Вариант II

Задача 1. Точка R_1 — середина отрезка PQ; точка R_2 — середина отрезка R_1Q; для каждого $n \geqslant 3$ точка R_n — середина отрезка $R_{n-2}R_{n-1}$. Пусть R — предельное положение точки R_n при $n \to \infty$. Найдите длину отрезка RQ, если длина отрезка PQ равна 18.

Ответ: 6.

Решение. Обозначим $P = R_{-1}$, $Q = R_0$, тогда R_n — середина отрезка $R_{n-2}R_{n-1}$ для каждого $n \geqslant 1$. Легко видеть, что на отрезке точки будут расположены в следующем порядке:

$$P = R_{-1},\ R_1,\ R_3,\ \ldots,\ R,\ \ldots,\ R_4,\ R_2,\ R_0 = Q.$$

Поэтому

$$RQ = R_0R_2 + R_2R_4 + R_4R_6 + \ldots.$$

Далее, длина отрезка $R_{n+1}R_n$ в два раза меньше длины отрезка R_nR_{n-1}, откуда длина отрезка $R_{n+2}R_{n+1}$ в четыре раза меньше длины отрезка R_nR_{n-1}. Значит,

$$RQ = R_0R_2\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) = \frac{PQ}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{18}{4} \cdot \frac{4}{3} = 6.$$

Задача 2. При каком наименьшем n можно покрасить каждое натуральное число в один из n цветов так, чтобы любые два числа, отличающиеся на 7, на 10, на 14, на 17 и на 24, были покрашены в разные цвета?

Ответ: 5.

Решение. Докажем для начала, что четырьмя и меньше цветами обойтись не удастся. Посмотрим на числа n, $n+7$, $n+14$, $n+24$. Разности между ними равны

$$(n+7) - n = 7, \quad (n+14) - n = 14, \quad (n+24) - n = 24,$$
$$(n+14) - (n+7) = 7, \quad (n+24) - (n+7) = 17, \quad (n+24) - (n+14) = 10,$$

т.е. любые два из этих чисел покрашены в различные цвета. Значит, цветов хотя бы четыре. Предположим, что цветов ровно четыре. Тогда числа n, $n+7$, $n+14$, $n+24$ покрашены во все возможные цвета. Аналогично можно получить, что во все возможные цвета покрашены числа n, $n+7$, $n+17$, $n+24$. Значит, для каждого натурального n числа $n+14$ и $n+17$ должны быть покрашены в один и тот же цвет.

Применим полученное утверждение для $n = 1, 4, 7, \ldots, 22$. Тогда числа $15, 18, 21, \ldots, 39$ покрашены в один и тот же цвет. Противоречие, ведь $39 - 15 = 24$ и числа 15 и 39 должны быть покрашены в разные цвета.

Докажем теперь, что пять цветов достаточно. Для этого разобьём все натуральные числа на группы по 7 подряд идущих чисел, а группы покрасим так: первую — в первый, вторую — во второй, …, пятую — в пятый, шестую — в первый, седьмую — во второй, …. При такой раскраске числа одного цвета будут или отличаться не более чем на 6, если лежат в одной семёрке, или хотя бы на 29 — если в разных. Значит, числа, отличающиеся на 7, 10, 14, 17 и 24, будут покрашены в разные цвета.

Задача 3. На заводе имеются в достаточном количестве три сплава титана, алюминия и молибдена. Все сплавы с примесями. Процентное содержание компонентов в этих сплавах приведено в таблице.

	1	2	3
Алюминий	54%	7%	47%
Молибден	8%	3%	3%
Титан	36%	56%	26%

Из этих сплавов необходимо приготовить новый сплав, в котором алюминия должно быть не больше 39%, а молибдена — не больше 5%. Какое наибольшее и какое наименьшее содержание титана (в процентах) может быть в этом сплаве?

Ответ: 32 и 56.

Решение. Заметим, что как бы ни изготавливали новый сплав, содержание титана в нём будет не больше максимального из содержаний титана в имеющихся сплавах. Поэтому содержание титана в любом изготовленном сплаве будет не больше 56%. С другой стороны, сплав 2 подходит под условия на содержание алюминия и молибдена. Значит, наибольшее содержание титана — 56%.

Теперь найдём наименьшее содержание титана в таком сплаве. Заметим, что если при изготовлении нового сплава мы использовали сплав 1, то можно его заменить на сплав 3: от этого содержание алюминия, молибдена и титана — уменьшится. Поэтому в сплаве с наименьшим содержанием титана не участвует сплав 1.

Сразу отметим, что тогда в таком сплаве будет 3% молибдена, т.е. он подходит под условие на молибден. В сплаве 3 титана меньше, чем в сплаве 2, но сплав 3 не подходит под условие на алюминий. Понятно, что чем меньше мы возьмём сплава 2, тем меньше будет титана в изготовленном сплаве. Возьмём ровно столько, чтобы выполнилось условие на алюминий: $7x + 47y = 39(x + y)$ (x и y — масса сплава 2 и 3 соответственно), откуда $32x = 8y$, т.е. можно взять 1 часть сплава 2 и 4 части сплава 3. Тогда содержание титана в процентах будет

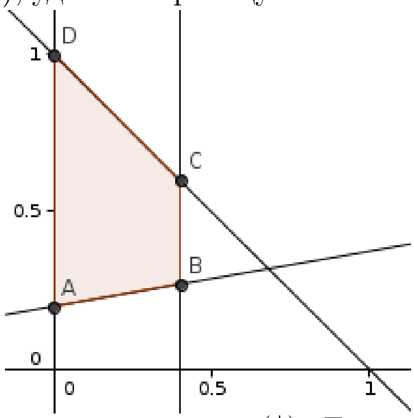
$$\frac{56 \cdot 1 + 26 \cdot 4}{1 + 4} = 32.$$

Другое решение. Пусть взято x, y и $1 - x - y$ первого, второго и третьего сплава соответственно, причём $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $1 - x - y \geqslant 0$. Тогда условия задачи можно записать так:

$$54x + 7y + 47(1 - x - y) = 7x - 40y + 47 \leqslant 39,$$
$$8x + 3y + 3(1 - x - y) = 5x + 3 \leqslant 5$$

Изобразим на координатной плоскости область (см. рисунок), удовлетворяющую системе неравенств

$$\begin{cases} 7x - 40y + 8 \leqslant 0, \\ 5x - 2 \leqslant 0 \\ x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x + y - 1 \leqslant 0. \end{cases}$$



Процентное содержание титана $36x + 56y + 26(1 - x - y) = 26 + 10x + 30y$ (*). Легко видеть, что минимум этого числа достигается в точке A (там наименьший и x, и y) и равен $26 + 30 \cdot \frac{1}{5} = 32$. Кроме того, при любом фиксированном x мы можем увеличить y до того момента, пока точка не попадёт на отрезок CD. На отрезке CD же нас интересует точка с наибольшим y (поскольку содержание титана равно $26 + 10(x + y) + 20y = 36 + 20y$), т.е. точка C. В ней содержание титана равно 56 процентов.

Комментарий. При другом выборе переменных (например, x первого сплава, $1 - x - y$ второго и y третьего) будут получаться другие функции и другие области. При этом решение может стать как чуть проще, так и немного сложнее. В решении выше специально выбран наиболее «бездумный» путь.

Комментарий. Задача имеет отношение к теме «линейное программирование»: нахождение экстремумов на множествах, задаваемых системами линейных уравнений и неравенств. Несложно показать, что для линейной функции максимум и минимум достигаются в одной из вершин многоугольника — множества всех точек, для которых выполняются условия. Тогда задача решается чисто алгоритмически: достаточно построить многоугольник, найти все его вершины и в каждой посчитать значение требуемой функции (так устроено второе решение выше).

Для произвольных констант такая задача нагружена технически и для олимпиады скорее неудачна. В предложенных вариантах числа подобраны так, чтобы экстремум можно было найти несложными рассуждениями (так устроение первое решение выше), а не просто технически.

Задача 4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 11$, $BC = 2$ и боковыми сторонами $AB = 5$, $CD = \sqrt{34}$. Точка P на прямой BC такова, что периметр треугольника APD наименьший из возможных. Найдите этот периметр.

Ответ: $11 + \sqrt{157}$.

Решение. Воспользуемся следующим утверждением, которое наиболее известно как «принцип наименьшего времени Ферма» в физике:

> Для данных точек A, B и данной прямой ℓ из всех точек $L \in \ell$ сумма $AL + BL$ будет минимальной, когда углы между прямыми AL и ℓ и BL и ℓ будут равны.

Тогда для искомой точки P на прямой BC должно выполняться равенство $\angle XPA = \angle YPD$ (точки X и Y — где-то «далеко» на прямой BC). Поскольку $BC \parallel AD$, то

$$\angle PAD = \angle XPA = \angle YPD = \angle PDA,$$

т.е. треугольник PAD — равнобедренный. Значит, нам достаточно найти периметр равнобедренного треугольника PAD, где P — точка на прямой BC.

По теореме Пифагора этот периметр равен

$$11 + 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{11}{2}\right)^2 + h^2} = 11 + \sqrt{121 + 4h^2},$$

где h — расстояние между прямыми AD и BC, т.е. высота трапеции.

Найти высоту трапеции можно разными способами. Например, проведём через точку B, прямую, параллельную CD, до пересечения с основанием AD в точке K. Тогда искомая высота — это высота из вершины B в треугольнике ABK. Поскольку $BCDK$ — параллелограмм, то $BK = CD = \sqrt{34}$, $AK = AD - DK = AD - BC = 11 - 2 = 9$.

Итого, нам достаточно найти длину высоты на сторону длины 9 в треугольнике со сторонами 5, 9, $\sqrt{34}$. По формуле площади и формуле Герона имеем

$$4h^2 \cdot 9^2 = 16S^2 = (5 + 9 + \sqrt{34})(5 + 9 - \sqrt{34})(5 - 9 + \sqrt{34})(-5 + 9 + \sqrt{34})$$

откуда

$$4h^2 = \frac{(14 + \sqrt{34})(14 - \sqrt{34})(-4 + \sqrt{34})(4 + \sqrt{34})}{9^2} = \frac{(14^2 - (\sqrt{4})^2)((\sqrt{34})^2 - 4^2)}{9^2} = 36,$$

и окончательный ответ $11 + \sqrt{121 + 4h^2} = 11 + \sqrt{157}$.

Другое решение. Также, как и в первом решении, найдём высоту трапеции. Покажем здесь, как можно это было сделать по-другому. Опустим высоты BE и CF трапеции. Обозначим их длины через h, длину отрезка AE обозначим через ℓ. Поскольку $EF = BC = 2$, для FD получим $FD = 9 - \ell$. Из прямоугольных треугольников ABE и CDF по теореме Пифагора получим $AB^2 = BE^2 + AE^2$ и $CD^2 = CF^2 + DF^2$.

Подставив в эти равенства известные длины, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 5^2 = h^2 + \ell^2 \\ 34 = h^2 + (9 - \ell)^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $\big(\ell + (9 - \ell)\big)\big(\ell - (9 - \ell)\big) = -9$, откуда $\ell = 4$. Тогда $h = 3$, $FD = 5$.

Рассмотрим треугольник APD. Обозначим $BP = x$, тогда $PC = 2 - x$ (здесь и далее все расстояния со знаком, т.е. могут быть отрицательные). Опустим высоту PQ. Тогда треугольник APQ прямоугольный и по теореме Пифагора

$$AP = \sqrt{AQ^2 + QP^2} = \sqrt{(4 + x)^2 + 3^2}.$$

Аналогично, из прямоугольного треугольника DPQ

$$DP = \sqrt{(7-x)^2 + 3^2}.$$

Тогда периметр треугольника APD равен

$$P(x) = 11 + \sqrt{(4+x)^2 + 3^2} + \sqrt{(7-x)^2 + 3^2}.$$

Найдём производную этой функции:

$$P'(x) = \frac{4+x}{\sqrt{(4+x)^2+3^2}} - \frac{7-x}{\sqrt{(7-x)^2+3^2}}.$$

Из уравнения $P'(x) = 0$ получаем

$$(4+x)^2\big((7-x)^2+3^2\big) = (7-x)^2\big((4+x)^2+3^2\big),$$

откуда $(7-x)^2 = (4+x)^2$, $x = \frac{3}{2}$. Несложно видеть, что $x = \frac{3}{2}$ именно точка минимума, откуда минимальный периметр равен $P\left(\frac{3}{2}\right) = 11 + \sqrt{157}$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^{34} + x_2^{34} + \ldots + x_{32}^{34} = 74^{34} \\ x_1^{55} + x_2^{55} + \ldots + x_{32}^{55} = 74^{55}. \end{cases}$$

Ответ: один из x_i равен 74, все остальные равны 0.

Решение. Заметим, что

$$\left(\frac{x_1}{74}\right)^{34} + \left(\frac{x_2}{74}\right)^{34} + \ldots + \left(\frac{x_{32}}{74}\right)^{34} = 1.$$

Тогда для каждого $1 \leqslant k \leqslant 32$ имеем $\left|\frac{x_k}{74}\right| \leqslant 1$, откуда $\left|\frac{x_k}{74}\right|^{55} \leqslant \left|\frac{x_k}{74}\right|^{34}$. Окончательно получим

$$1 = \left|\left(\frac{x_1}{74}\right)^{55} + \left(\frac{x_2}{74}\right)^{55} + \ldots + \left(\frac{x_{32}}{74}\right)^{55}\right| \leqslant \left|\frac{x_1}{74}\right|^{55} + \left|\frac{x_2}{74}\right|^{55} + \ldots + \left|\frac{x_{32}}{74}\right|^{55} \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{x_1}{74}\right|^{34} + \left|\frac{x_2}{74}\right|^{34} + \ldots + \left|\frac{x_{32}}{74}\right|^{34} = \left(\frac{x_1}{74}\right)^{34} + \left(\frac{x_2}{74}\right)^{34} + \ldots + \left(\frac{x_{32}}{74}\right)^{34} = 1.$$

Значит, для каждого k выполнено $\left|\frac{x_k}{74}\right|^{55} = \left|\frac{x_k}{74}\right|^{34}$, откуда $x_k \in \{-74, 0, 74\}$. Отсюда несложно получаем, что тогда один из x_k равен 74, а все остальные равны 0.

Задача 6. Укажите все значения параметра a, $|a| < 1$, при которых множество решений неравенства

$$\frac{|\sin t - a| - \cos t}{|\sin t - \frac{1}{4}|} > 0$$

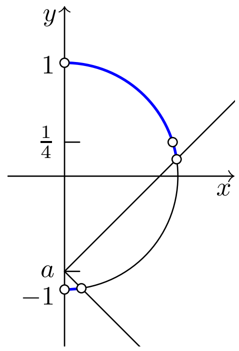
для $t \in (-\pi/2; \pi/2)$ представимо в виде двух непересекающихся интервалов.

Ответ: $[\frac{1-\sqrt{15}}{4}, 1)$.

Решение. Пусть $x = \cos t$, $y = \sin t$. Тогда, с учётом допустимых значений t, это неравенство равносильно системе

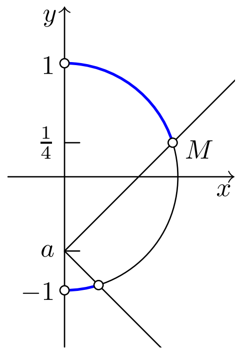
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x > 0, \\ y \neq \frac{1}{4}, \\ x < |y - a|. \end{cases}$$

Решения этой системы — точки на полуокружности $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, лежащие левее кривой $x = |y - a|$.



При изменении параметра a кривая $x = |y - a|$ перемещается параллельно оси y. При значениях a, близких к -1, в качестве множества решений имеем 3 непересекающихся интервала. При значениях a, близких к 1, получается 2 интервала.

Крайнее положение графика, при котором получается два интервала, изображено на рисунке:



Координаты точки M пересечения окружности и прямой $x = y - a$ равны $y_M = \frac{1}{4}, x_M = \sqrt{1 - (1/4)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4}$. Так как $\frac{1}{4} - a = x_M$, то $a = \frac{1-\sqrt{15}}{4}$.

Таким образом, ответом является множество $[\frac{1-\sqrt{15}}{4}, 1)$.

Задача 7. Дано действительное число p, отличное от 0, 1, -1, $-\frac{1}{2}$ и -2. Решите уравнение

$$\frac{(x^2+x+1)^3}{x^2(x+1)^2} = \frac{(p^2+p+1)^3}{p^2(p+1)^2}.$$

Ответ может зависеть от p.

Ответ: p, $\frac{1}{p}$, $-1-p$, $-\frac{1}{1+p}$, $-\frac{p}{1+p}$, $-\frac{p+1}{p}$.

Решение. Докажем два утверждения:

- если x_0 — решение уравнения, то и $-1 - x_0$ также решение; действительно,

$$\frac{((-1-x_0)^2 + (-1-x_0) + 1)^3}{(-1-x_0)^2((-1-x_0)+1)^2} = \frac{(x_0^2+x_0+1)^3}{x_0^2(x_0+1)^2},$$

  поэтому если второе равняется $\frac{(p^2+p+1)^3}{p^2(p+1)^2}$, то и первое — тоже.

- если x_0 — решение уравнения, то и $\frac{1}{x_0}$ также решение; действительно,

$$\frac{((1/x_0)^2 + (1/x_0) + 1)^3}{(1/x_0)^2((1/x_0)+1)^2} = \frac{(x_0^2+x_0+1)^3}{x_0^2(x_0+1)^2},$$

  поэтому если второе равняется $\frac{(p^2+p+1)^3}{p^2(p+1)^2}$, то и первое — тоже.

Заметим теперь, что p — точно корень исходного уравнения. Тогда, корнями являются также числа $1/p$, $-1-p$, а тогда и $-\frac{1}{1+p}$, $-1 + \frac{1}{1+p} = -\frac{p}{1+p}$, $-1 - \frac{1}{p} = -\frac{p+1}{p}$.

Можно показать, что при данных ограничениях на p получившиеся 6 чисел — различны. Кроме того, исходное уравнение при $x \neq 0$, $x \neq 1$ равносильно уравнению 6-й степени, которое не может иметь больше 6 корней. Значит, найденные числа и есть все корни.

Комментарий. По сути мы доказали, что при $x \neq 0$, $x \neq 1$ исходное уравнение равносильно уравнению

$$(x-p)\,(x-(-1-p))\left(x-\frac{1}{p}\right)\left(x+\frac{1}{1+p}\right)\left(x+\frac{p}{1+p}\right)\left(x+\frac{p+1}{p}\right)=0,$$

поэтому указанные числа являются всеми корнями и при отстутствии ограничений на p.

Комментарий. Аналогичное множество встречалось в ОММО–2022, в задаче 10.

Задача 8. В треугольнике ABC точки A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB, а A_1, B_1, C_1 — точки касания этих сторон со вписанной окружностью соответственно. Прямые A_1C_1, B_1C_1 пересекают A_0B_0 в точках X и Y. Докажите, что $\angle CXC_1 = \angle CYC_1$.

Решение. Докажем, что точки X, Y лежат на биссектрисах углов A, B соответственно.

Так как $AB_1 = AC_1$ и $B_0Y \parallel AC_1$, то $B_0Y = B_0B_1 = \frac{|AB-BC|}{2}$, следовательно, $A_0Y = A_0B$ и $\angle YBA_0 = \angle BYA_0 = \angle YBA$. Аналогично $\angle XAC = \angle XAB$.

Кроме того, поскольку точки, симметричные C относительно X и Y, лежат на AB, то $\angle CYB = \angle CXA = 90°$, т.е. CXC_1Y — параллелограмм. Значит, $\angle CXC_1 = \angle CYC_1$.

Комментарий. Для доказательства, что X и Y лежат на биссектрисах углов A и B соответственно можно сразу сослаться на следующее утверждение.

> В треугольнике ABC следующие четыре прямые пересекаются в одной точке:
>
> - биссектриса угла A,
> - перпендикуляр из вершины B на эту биссектрису,
> - прямая, соединяющая точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и BC,
> - средняя линия, параллельная стороне AC.

Чаще всего его упоминают под названием «задача 255». Это и вправду почти задача номер 255 из книги И.Ф. Шарыгина «Геометрия: 9–11 кл.: От учебной задачи к творческой». Не стоит учить наизусть номера задач из этого задачника. Популярность именно этой задачи можно понять из предисловия автора (а заодно и убедиться в его правоте):

> P.S. А все же, откуда берутся геометрические задачи? Общий и полный ответ здесь вряд ли возможен. А в частности... В частности, очень много новых задач содержится в этой книге. Надо только суметь их извлечь. Наверное, каждая содержательная геометрическая задача может быть источником целого ряда новых. Для этого надо с ней «повозиться», посмотреть с разных сторон, попробовать перефразировать, обобщить. В результате удивительным образом может возникнуть совершенно не похожая на «родителя» задача. Например, возьмём ту же задачу № 255...

Задача 9. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых существует такое вещественное число a, что при всех вещественных x, y выполнено равенство

$$2f(xy-2) = f(x)f(y) - f(x) - 2y + a.$$

Ответ: $f(x) = 2x + 1$.

Решение. Заметим, что

$$f(x)f(y) - f(x) - 2y + a = 2f(xy-2) = 2f(yx-2) = f(y)f(x) - f(y) - 2x + a.$$

Отсюда следует, что при всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено $f(x) - 2x = f(y) - 2y$. Значит, разность $f(x) - 2x$ постоянна и $f(x) = 2x + C, C \in \mathbb{R}$. Подставляя в исходное равенство, получаем, что при всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство:

$$2(2xy - 4 + C) = 4xy + 2Cx + 2Cy + C^2 - 2x - C - 2y + a.$$

Оно тождественно выполнено лишь при $C = 1$; при этом $a = -6$.

Задача 10. На плоскости отмечены 35 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые отмеченные точки соединены отрезками. Известно, что из какой-то отмеченной точки выходит ровно 1 отрезок в другую отмеченную точку, из какой-то — ровно 2, ..., из какой-то — ровно 24. Докажите, что существуют такие три отмеченные точки, что любые две из них соединены отрезком.

Решение. Посмотрим на точку A, из которой выходит 24 отрезка. Из них максимум 11 — точки, про количество отрезков из которых в условии ничего не сказано. Осталось как минимум 13 точек, про количество отрезков из которых сказано в условии. Среди них тогда найдётся точка B, из которой выходит хотя бы 13 отрезков.

У A, кроме B, есть ещё 23 смежные точки, а у B, кроме A — ещё 12. Поскольку $23 + 12 = 35 > 33$, то у A и B есть хотя бы одна общая смежная точка C. Тройка A, B, C и есть искомая тройка точек.

Вариант III

Задача 1. Точка L_1 — середина отрезка KM; точка L_2 — середина отрезка L_1M; для каждого $n \geqslant 3$ точка L_n — середина отрезка $L_{n-2}L_{n-1}$. Пусть L — предельное положение точки L_n при $n \to \infty$. Найдите длину отрезка KL, если длина отрезка KM равна 12.

Ответ: 8.

Решение. Обозначим $K = L_{-1}$, $M = L_0$, тогда L_n — середина отрезка $L_{n-2}L_{n-1}$ для каждого $n \geqslant 1$. Легко видеть, что на отрезке точки будут расположены в следующем порядке:

$$K = L_{-1},\ L_1,\ L_3,\ \ldots,\ L,\ \ldots,\ L_4,\ L_2,\ L_0 = M.$$

Поэтому

$$KL = L_{-1}L_1 + L_1L_3 + L_3L_5 + \ldots.$$

Далее, длина отрезка $L_{n+1}L_n$ в два раза меньше длины отрезка L_nL_{n-1}, откуда длина отрезка $L_{n+2}L_{n+1}$ в четыре раза меньше длины отрезка L_nL_{n-1}. Значит,

$$KL = L_{-1}L_1\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) = \frac{KM}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{12}{2} \cdot \frac{4}{3} = 8.$$

Задача 2. При каком наименьшем n можно покрасить каждое натуральное число в один из n цветов так, чтобы любые два числа, отличающиеся на 8, на 11, на 16, на 19 и на 27, были покрашены в разные цвета?

Ответ: 5.

Решение. Докажем для начала, что четырьмя и меньше цветами обойтись не удастся. Посмотрим на числа n, $n+8$, $n+16$, $n+27$. Разности между ними равны

$$(n+8) - n = 8, \quad (n+16) - n = 16, \quad (n+27) - n = 27,$$
$$(n+16) - (n+8) = 8, \quad (n+27) - (n+8) = 19, \quad (n+27) - (n+16) = 11,$$

т.е. любые два из этих чисел покрашены в различные цвета. Значит, цветов хотя бы четыре. Предположим, что цветов ровно четыре. Тогда числа n, $n+8$, $n+16$, $n+27$ покрашены во все возможные цвета. Аналогично можно получить, что во все возможные цвета покрашены числа n, $n+8$, $n+19$, $n+27$. Значит, для каждого натурального n числа $n+16$ и $n+19$ должны быть покрашены в один и тот же цвет.

Применим полученное утверждение для $n = 1, 4, 7, \ldots, 25$. Тогда числа $17, 20, 23, \ldots, 44$ покрашены в один и тот же цвет. Противоречие, ведь $44 - 17 = 27$ и числа 17 и 44 должны быть покрашены в разные цвета.

Докажем теперь, что пять цветов достаточно. Для этого разобьём все натуральные числа на группы по 8 подряд идущих чисел, а группы покрасим так: первую — в первый, вторую — во второй, ..., пятую — в пятый, шестую — в первый, седьмую — во второй, ... При такой раскраске числа одного цвета будут или отличаться не более чем на 7, если лежат в одной восьмёрке, или хотя бы на 33 — если в разных. Значит, числа, отличающиеся на 8, 11, 16, 19 и 27, будут покрашены в разные цвета.

Задача 3. На заводе имеются в достаточном количестве три сплава титана, алюминия и молибдена. Все сплавы с примесями. Процентное содержание компонентов в этих сплавах приведено в таблице.

	1	2	3
Алюминий	48%	8%	7%
Титан	32%	2%	22%
Молибден	12%	12%	15%

Из этих сплавов необходимо приготовить новый сплав, в котором алюминия должно быть не меньше 39%, а молибдена — не больше 13%. Какое наибольшее и какое наименьшее содержание титана (в процентах) может быть в этом сплаве?

Ответ: 25,25 и 32.

Решение. Заметим, что как бы ни изготавливали новый сплав, содержание титана в нём будет не больше максимального из содержаний титана в имеющихся сплавах. Поэтому содержание титана в любом изготовленном сплаве будет не больше 32%. С другой стороны, сплав 1 подходит под условия на содержание алюминия и молибдена. Значит, наибольшее содержание титана — 32%.

Теперь найдём наименьшее содержание титана в таком сплаве. Заметим, что если при изготовлении нового сплава мы использовали сплав 3, то можно его заменить на сплав 2: от этого содержание молибдена и титана уменьшится, а алюминия — увеличится. Поэтому в сплаве с наименьшим содержанием титана не участвует сплав 3.

Сразу отметим, что тогда в таком сплаве будет 12% молибдена, т.е. он подходит под условие на молибден. В сплаве 2 титана меньше, чем в сплаве 1, но сплав 2 не подходит под условие на алюминий. Понятно, что чем меньше мы возьмём сплава 1, тем меньше будет титана в изготовленном сплаве. Возьмём ровно столько, чтобы выполнилось условие на алюминий: $48x + 8y = 39(x + y)$ (x и y — масса сплава 1 и 2 соответственно), откуда $9x = 31y$, т.е. можно взять 31 часть сплава 1 и 9 частей сплава 2. Тогда содержание титана в процентах будет

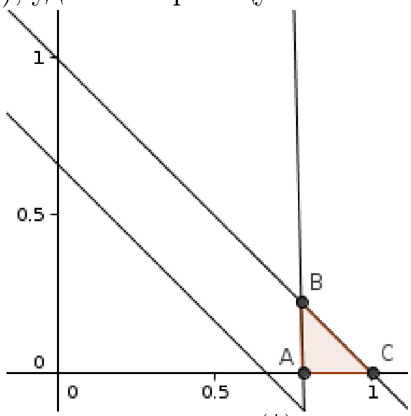
$$\frac{32 \cdot 31 + 2 \cdot 9}{31 + 9} = 25{,}25.$$

Другое решение. Пусть взято x, y и $1 - x - y$ первого, второго и третьего сплава соответственно, причём $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $1 - x - y \geqslant 0$. Тогда условия задачи можно записать так:

$$48x + 8y + 7(1 - x - y) = 41x + y + 7 \geqslant 39,$$
$$12x + 12y + 15(1 - x - y) = -3x - 3y + 15 \leqslant 13$$

Изобразим на координатной плоскости область (см. рисунок), удовлетворяющую системе неравенств

$$\begin{cases} 41x + y - 32 \geqslant 0, \\ -3x - 3y + 2 \leqslant 0 \\ x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x + y - 1 \leqslant 0. \end{cases}$$



Процентное содержание титана $32x + 2y + 22(1 - x - y) = 22 + 10x - 20y$ (*). Легко видеть, что максимум этого выражения достигается в точке C и равен 32. Для каждой точки внутри треугольника мы можем увеличивать y, пока точка не попадёт на отрезок BC (и тогда процент титана будет уменьшатся). На отрезке BC мы знаем, что C — максимум, а значит B — минимум. Координаты точки B равны $x = \frac{31}{40}$, $y = \frac{9}{40}$. Подставляем: $22 + 10 \cdot \frac{31}{40} - 20 \cdot \frac{9}{40} = 25{,}25$.

Комментарий. При другом выборе переменных (например, x первого сплава, $1 - x - y$ второго и y третьего) будут получаться другие функции и другие области. При этом решение может стать как чуть проще, так и немного сложнее. В решении выше специально выбран наиболее «бездумный» путь.

Комментарий. Задача имеет отношение к теме «линейное программирование»: нахождение экстремумов на множествах, задаваемых системами линейных уравнений и неравенств. Несложно показать, что для линейной функции максимум и минимум достигаются в одной из вершин многоугольника — множества всех точек, для которых выполняются условия. Тогда задача решается чисто алгоритмически: достаточно построить многоугольник, найти все его вершины и в каждой посчитать значение требуемой функции (так устроено второе решение выше).

Для произвольных констант такая задача нагружена технически и для олимпиады скорее неудачна. В предложенных вариантах числа подобраны так, чтобы экстремум можно было найти несложными рассуждениями (так устроение первое решение выше), а не просто технически.

Задача 4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 7$, $BC = 2$ и боковыми сторонами $AB = 5$, $CD = 2\sqrt{5}$. Точка P на прямой BC такова, что периметр треугольника APD наименьший из возможных. Найдите этот периметр.

Ответ: $7+\sqrt{113}$.

Решение. Воспользуемся следующим утверждением, которое наиболее известно как «принцип наименьшего времени Ферма» в физике:

> Для данных точек A, B и данной прямой ℓ из всех точек $L \in \ell$ сумма $AL + BL$ будет минимальной, когда углы между прямыми AL и ℓ и BL и ℓ будут равны.

Тогда для искомой точки P на прямой BC должно выполняться равенство $\angle XPA = \angle YPD$ (точки X и Y — где-то «далеко» на прямой BC). Поскольку $BC \parallel AD$, то

$$\angle PAD = \angle XPA = \angle YPD = \angle PDA,$$

т.е. треугольник PAD — равнобедренный. Значит, нам достаточно найти периметр равнобедренного треугольника PAD, где P — точка на прямой BC.

По теореме Пифагора этот периметр равен

$$7 + 2\cdot\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + h^2} = 7 + \sqrt{49+4h^2},$$

где h — расстояние между прямыми AD и BC, т.е. высота трапеции.

Найти высоту трапеции можно разными способами. Например, проведём через точку B, прямую, параллельную CD, до пересечения с основанием AD в точке K. Тогда искомая высота — это высота из вершины B в треугольнике ABK. Поскольку $BCDK$ — параллелограмм, то $BK = CD = 2\sqrt{5}$, $AK = AD - DK = AD - BC = 7 - 2 = 5$.

Итого, нам достаточно найти длину высоты на сторону длины 5 в треугольнике со сторонами 5, 5, $2\sqrt{5}$. По формуле площади и формуле Герона имеем

$$4h^2\cdot 5^2 = 16S^2 = (5+5+2\sqrt{5})(5+5-2\sqrt{5})(5-5+2\sqrt{5})(-5+5+\sqrt{5})$$

откуда

$$4h^2 = \frac{(10+2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})(2\sqrt{5}^2)}{5^2} = \frac{(100^2-(2\sqrt{5})^2)(2\sqrt{5})^2}{5^2} = 64,$$

и окончательный ответ $7+\sqrt{49+4h^2} = 7+\sqrt{113}$.

Другое решение. Также, как и в первом решении, найдём высоту трапеции. Покажем здесь, как можно это было сделать по-другому. Опустим высоты BE и CF трапеции. Обозначим их длины через h, длину отрезка AE обозначим через ℓ. Поскольку $EF = BC = 2$, для FD получим $FD = 5 - \ell$. Из прямоугольных треугольников ABE и CDF по теореме Пифагора получим $AB^2 = BE^2 + AE^2$ и $CD^2 = CF^2 + DF^2$.

Подставив в эти равенства известные длины, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 5^2 = h^2 + \ell^2 \\ 20 = h^2 + (5-\ell)^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $\big(\ell + (5-\ell)\big)\big(\ell - (5-\ell)\big) = 5$, откуда $\ell = 3$. Тогда $h = 4$, $FD = 2$.

Рассмотрим треугольник APD. Обозначим $BP = x$, тогда $PC = 2 - x$ (здесь и далее все расстояния со знаком, т.е. могут быть отрицательные). Опустим высоту PQ. Тогда треугольник APQ прямоугольный и по теореме Пифагора

$$AP = \sqrt{AQ^2 + QP^2} = \sqrt{(3+x)^2 + 4^2}.$$

Аналогично, из прямоугольного треугольника DPQ

$$DP = \sqrt{(4-x)^2 + 4^2}.$$

Тогда периметр треугольника APD равен

$$P(x) = 7 + \sqrt{(3+x)^2 + 4^2} + \sqrt{(4-x)^2 + 4^2}.$$

Найдём производную этой функции:

$$P'(x) = \frac{3+x}{\sqrt{(3+x)^2+4^2}} - \frac{4-x}{\sqrt{(4-x)^2+4^2}}.$$

Из уравнения $P'(x) = 0$ получаем

$$(3+x)^2\big((4-x)^2+4^2\big) = (4-x)^2\big((3+x)^2+4^2\big),$$

откуда $(4-x)^2 = (3+x)^2$, $x = \frac{1}{2}$. Несложно видеть, что $x = \frac{1}{2}$ именно точка минимума, откуда минимальный периметр равен $P\left(\frac{1}{2}\right) = 7 + \sqrt{113}$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^{46} + x_2^{46} + \ldots + x_{50}^{46} = 13^{46} \\ x_1^{73} + x_2^{73} + \ldots + x_{50}^{73} = 13^{73}. \end{cases}$$

Ответ: один из x_i равен 13, все остальные равны 0.

Решение. Заметим, что

$$\left(\frac{x_1}{13}\right)^{46} + \left(\frac{x_2}{13}\right)^{46} + \ldots + \left(\frac{x_{50}}{13}\right)^{46} = 1.$$

Тогда для каждого $1 \leqslant k \leqslant 50$ имеем $\left|\frac{x_k}{13}\right| \leqslant 1$, откуда $\left|\frac{x_k}{13}\right|^{73} \leqslant \left|\frac{x_k}{13}\right|^{46}$. Окончательно получим

$$1 = \left|\left(\frac{x_1}{13}\right)^{73} + \left(\frac{x_2}{13}\right)^{73} + \ldots + \left(\frac{x_{50}}{13}\right)^{73}\right| \leqslant \left|\frac{x_1}{13}\right|^{73} + \left|\frac{x_2}{13}\right|^{73} + \ldots + \left|\frac{x_{50}}{13}\right|^{73} \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{x_1}{13}\right|^{46} + \left|\frac{x_2}{13}\right|^{46} + \ldots + \left|\frac{x_{50}}{13}\right|^{46} = \left(\frac{x_1}{13}\right)^{46} + \left(\frac{x_2}{13}\right)^{46} + \ldots + \left(\frac{x_{50}}{13}\right)^{46} = 1.$$

Значит, для каждого k выполнено $\left|\frac{x_k}{13}\right|^{73} = \left|\frac{x_k}{13}\right|^{46}$, откуда $x_k \in \{-13, 0, 13\}$. Отсюда несложно получаем, что тогда один из x_k равен 13, а все остальные равны 0.

Задача 6. Укажите все значения параметра a, $|a| < 1$, при которых множество решений неравенства

$$\frac{|\cos t - a| - \sin t}{|\cos t - \frac{1}{3}|} > 0$$

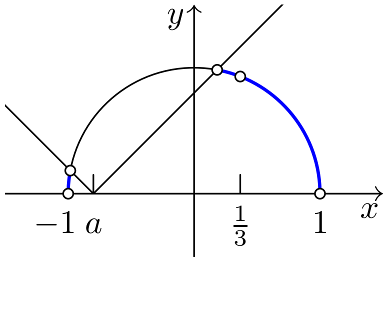
для $t \in (0;\pi)$ представимо в виде двух непересекающихся интервалов.

Ответ: $[\frac{1-2\sqrt{2}}{3}, 1)$.

Решение. Пусть $x = \cos t$, $y = \sin t$. Тогда, с учётом допустимых значений t, неравенство равносильно системе

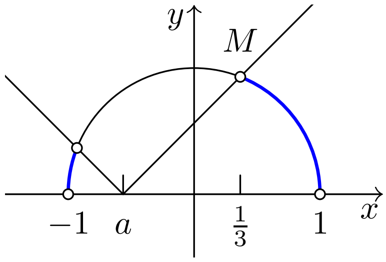
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y > 0, \\ x \neq \frac{1}{3}, \\ y < |x-a|. \end{cases}$$

Решения этой системы — точки на полуокружности $x^2 + y^2 = 1$, $y > 0$, лежащие ниже графика функции $y = |x - a|$.



При изменении параметра a график функции $y = |x - a|$ перемещается параллельно оси x. При значениях a, близких к -1, в качестве множества решений имеем 3 непересекающихся интервала. При значениях a, близких к 1, получается 2 интервала.

Крайнее положение графика, при котором получается два интервала, изображено на рисунке:



Координаты точки M пересечения окружности и прямой $y = x - a$ равны $x_M = \frac{1}{3}, y_M = \sqrt{1 - (1/3)^2} = = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Так как $\frac{1}{3} - a = y_M$, то $a = \frac{1-2\sqrt{2}}{3}$.

Таким образом, ответом является множество $[\frac{1-2\sqrt{2}}{3}, 1)$.

Задача 7. Дано действительное число q, отличное от 0, 1, -1, $-\frac{1}{2}$ и -2. Решите уравнение

$$\frac{x^2(x+1)^2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{q^2(q+1)^2}{(q^2+q+1)^3}.$$

Ответ может зависеть от q.

Ответ: q, $\frac{1}{q}$, $-1-q$, $-\frac{1}{1+q}$, $-\frac{q}{1+q}$, $-\frac{q+1}{q}$.

Решение. Докажем два утверждения:

- если x_0 — решение уравнения, то и $-1-x_0$ также решение; действительно,

$$\frac{(-1-x_0)^2((-1-x_0)+1)^2}{((-1-x_0)^2+(-1-x_0)+1)^3} = \frac{x_0^2(x_0+1)^2}{(x_0^2+x_0+1)^3},$$

  поэтому если второе равняется $\frac{q^2(q+1)^2}{(q^2+q+1)^3}$, то и первое — тоже.

- если x_0 — решение уравнения, то и $\frac{1}{x_0}$ также решение; действительно,

$$\frac{(1/x_0)^2((1/x_0)+1)^2}{((1/x_0)^2+(1/x_0)+1)^3} = \frac{x_0^2(x_0+1)^2}{(x_0^2+x_0+1)^3},$$

  поэтому если второе равняется $\frac{q^2(q+1)^2}{(q^2+q+1)^3}$, то и первое — тоже.

Заметим теперь, что q — точно корень исходного уравнения. Тогда, корнями являются также числа $1/q$, $-1-q$, а тогда и $-\frac{1}{1+q}$, $-1+\frac{1}{1+q} = -\frac{q}{1+q}$, $-1-\frac{1}{q} = -\frac{q+1}{q}$.

Можно показать, что при данных ограничениях на q получившиеся 6 чисел — различны. Кроме того, исходное уравнение при $x \neq 0$, $x \neq 1$ равносильно уравнению 6-й степени, которое не может иметь больше 6 корней. Значит, найденные числа и есть все корни.

Комментарий. По сути мы доказали, что при $x \neq 0$, $x \neq 1$ исходное уравнение равносильно уравнению

$$(x-q)(x-(-1-q))\left(x-\frac{1}{q}\right)\left(x+\frac{1}{1+q}\right)\left(x+\frac{q}{1+q}\right)\left(x+\frac{q+1}{q}\right) = 0,$$

поэтому указанные числа являются всеми корнями и при отстутствии ограничений на q.

Комментарий. Аналогичное множество встречалось в ОММО–2022, в задаче 10.

Задача 8. В треугольнике ABC точки A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB, а A_1, B_1, C_1 — точки касания этих сторон со вписанной окружностью соответственно. Прямые A_1C_1, B_1C_1 пересекают A_0B_0 в точках X и Y. Докажите, что $C_1Y = XC$.

Решение. Докажем, что точки X, Y лежат на биссектрисах углов A, B соответственно.

Так как $AB_1 = AC_1$ и $B_0Y \parallel AC_1$, то $B_0Y = B_0B_1 = \frac{|AB-BC|}{2}$, следовательно, $A_0Y = A_0B$ и $\angle YBA_0 = \angle BYA_0 = \angle YBA$. Аналогично $\angle XAC = \angle XAB$.

Кроме того, поскольку точки, симметричные C относительно X и Y, лежат на AB, то $\angle CYB = \angle CXA = 90°$, т.е. CXC_1Y — параллелограмм. Значит, $C_1Y = XC$.

Комментарий. Для доказательства, что X и Y лежат на биссектрисах углов A и B соответственно можно сразу сослаться на следующее утверждение.

> В треугольнике ABC следующие четыре прямые пересекаются в одной точке:
>
> - биссектриса угла A,
> - перпендикуляр из вершины B на эту биссектрису,
> - прямая, соединяющая точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и BC,
> - средняя линия, параллельная стороне AC.

Чаще всего его упоминают под названием «задача 255». Это и вправду почти задача номер 255 из книги И.Ф. Шарыгина «Геометрия: 9–11 кл.: От учебной задачи к творческой». Не стоит учить наизусть номера задач из этого задачника. Популярность именно этой задачи можно понять из предисловия автора (а заодно и убедиться в его правоте):

> P.S. А все же, откуда берутся геометрические задачи? Общий и полный ответ здесь вряд ли возможен. А в частности… В частности, очень много новых задач содержится в этой книге. Надо только суметь их извлечь. Наверное, каждая содержательная геометрическая задача может быть источником целого ряда новых. Для этого надо с ней «повозиться», посмотреть с разных сторон, попробовать перефразировать, обобщить. В результате удивительным образом может возникнуть совершенно не похожая на «родителя» задача. Например, возьмём ту же задачу № 255…

Задача 9. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых существует такое вещественное число a, что при всех вещественных x, y выполнено равенство

$$f(xy+1) = f(x)f(y) - f(x) - y + a.$$

Ответ: $f(x) = x + 1$.

Решение. Заметим, что

$$f(x)f(y) - f(x) - y + a = f(xy+1) = f(yx+1) = f(y)f(x) - f(y) - x + a.$$

Отсюда следует, что при всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено $f(x) - x = f(y) - y$. Значит, разность $f(x) - x$ постоянна и $f(x) = x + C, C \in \mathbb{R}$. Подставляя в исходное равенство, получаем, что при всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство:

$$xy + 1 + C = xy + Cx + Cy + C^2 - x - C - y + a.$$

Оно тождественно выполнено лишь при $C = 1$; при этом $a = 2$.

Задача 10. На конференцию приехали 50 учёных, некоторые пары из которых являются соавторами, т.е. опубликовали хотя бы одну совместную статью. Известно, что на конференции есть учёный, у которого на конференции присутствует ровно 1 соавтор, есть учёный, у которого ровно 2, …, есть учёный, у которого ровно 34. Докажите, что на конференции есть три учёных, каждые два из которых — соавторы.

Решение. Посмотрим на учёного A, у которого на конференции 34 соавтора. Из них максимум 16 — учёные, про количество соавторов которых в условии ничего не сказано. Осталось как минимум 18 учёных, про количество соавторов которых сказано в условии. Среди них тогда найдётся учёный B, у которого на конференции хотя бы 18 соавторов.

У A, кроме B, есть ещё 33 соавтора, а у B, кроме A — ещё 17. Поскольку $33 + 17 = 50 > 48$, то у A и B есть хотя бы один общий соавтор C. Тройка A, B, C и есть искомая тройка учёных.

Вариант IV

Задача 1. Точка C_1 — середина отрезка AB; точка C_2 — середина отрезка AC_1; для каждого $n \geqslant 3$ точка C_n — середина отрезка $C_{n-2}C_{n-1}$. Пусть C — предельное положение точки C_n при $n \to \infty$. Найдите длину отрезка AC, если длина отрезка AB равна 9.

Ответ: 3.

Решение. Обозначим $B = C_{-1}$, $A = C_0$, тогда C_n — середина отрезка $C_{n-2}C_{n-1}$ для каждого $n \geqslant 1$. Легко видеть, что на отрезке точки будут расположены в следующем порядке:

$$A = C_0,\ C_2,\ C_4,\ \ldots,\ C,\ \ldots,\ C_3,\ C_1,\ C_{-1} = B.$$

Поэтому

$$AC = C_0C_2 + C_2C_4 + C_4C_6 + \ldots.$$

Далее, длина отрезка $C_{n+1}C_n$ в два раза меньше длины отрезка C_nC_{n-1}, откуда длина отрезка $C_{n+2}C_{n+1}$ в четыре раза меньше длины отрезка C_nC_{n-1}. Значит,

$$AC = C_0C_2\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right) = \frac{AB}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{9}{4} \cdot \frac{4}{3} = 3.$$

Задача 2. При каком наименьшем n можно покрасить каждое натуральное число в один из n цветов так, чтобы любые два числа, отличающиеся на 4, на 7, на 8, на 11 и на 15, были покрашены в разные цвета?

Ответ: 5.

Решение. Докажем для начала, что четырьмя и меньше цветами обойтись не удастся. Посмотрим на числа n, $n+4$, $n+8$, $n+15$. Разности между ними равны

$$(n+4) - n = 4, \quad (n+8) - n = 8, \quad (n+15) - n = 15,$$
$$(n+8) - (n+4) = 4, \quad (n+15) - (n+4) = 11, \quad (n+15) - (n+8) = 7,$$

т.е. любые два из этих чисел покрашены в различные цвета. Значит, цветов хотя бы четыре. Предположим, что цветов ровно четыре. Тогда числа n, $n+4$, $n+8$, $n+15$ покрашены во все возможные цвета. Аналогично можно получить, что во все возможные цвета покрашены числа n, $n+4$, $n+11$, $n+15$. Значит, для каждого натурального n числа $n+8$ и $n+11$ должны быть покрашены в один и тот же цвет.

Применим полученное утверждение для $n = 1, 4, 7, \ldots, 13$. Тогда числа $9, 12, 15, \ldots, 24$ покрашены в один и тот же цвет. Противоречие, ведь $24 - 9 = 15$ и числа 9 и 24 должны быть покрашены в разные цвета.

Докажем теперь, что пять цветов достаточно. Для этого разобьём все натуральные числа на группы по 4 подряд идущих числа, а группы покрасим так: первую — в первый, вторую — во второй, ..., пятую — в пятый, шестую — в первый, седьмую — во второй, ... При такой раскраске числа одного цвета будут или отличаться не более чем на 3, если лежат в одной четвёрке, или хотя бы на 17 — если в разных. Значит, числа, отличающиеся на 4, 7, 8, 11 и 15, будут покрашены в разные цвета.

Задача 3. На заводе имеются в достаточном количестве три сплава титана, алюминия и молибдена. Все сплавы с примесями. Процентное содержание компонентов в этих сплавах приведено в таблице.

	1	2	3
Титан	45%	15%	30%
Алюминий	28%	68%	18%
Молибден	15%	15%	5%

Из этих сплавов необходимо приготовить новый сплав, в котором алюминия должно быть не меньше 39%, а молибдена — не меньше 12%. Какое наибольшее и какое наименьшее содержание титана (в процентах) может быть в этом сплаве?

Ответ: 15 и 36,75.

Решение. Заметим, что как бы ни изготавливали новый сплав, содержание титана в нём будет не меньше минимального из содержаний титана в имеющихся сплавах. Поэтому содержание титана в любом изготовленном сплаве будет не менее 15%. С другой стороны, сплав 2 подходит под условия на содержание алюминия и молибдена. Значит, наименьшее содержание титана — 15%.

Теперь найдём наибольшее содержание титана в таком сплаве. Заметим, что если при изготовлении нового сплава мы использовали сплав 3, то можно его заменить на сплав 1: от этого содержание алюминия, молибдена и титана увеличится. Поэтому в сплаве с наибольшим содержанием титана не участвует сплав 3.

Сразу отметим, что тогда в таком сплаве будет 15% молибдена, т.е. он подходит под условие на молибден. В сплаве 1 титана больше, чем в сплаве 2, но сплав 1 не подходит под условие на алюминий. Понятно, что чем меньше мы возьмём сплава 2, тем больше будет титана в изготовленном сплаве. Возьмём ровно столько, чтобы выполнилось условие на алюминий: $28x + 68y = 39(x + y)$ (x и y — масса сплава 1 и 2 соответственно), откуда $11x = 29y$, т.е. можно взять 29 частей сплава 1 и 11 частей сплава 2. Тогда содержание титана в процентах будет

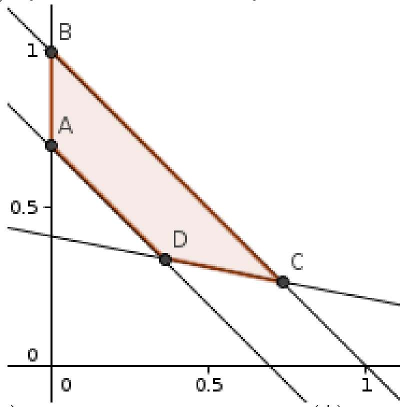
$$\frac{45 \cdot 29 + 15 \cdot 11}{29 + 11} = 36{,}75.$$

Другое решение. Пусть взято x, y и $1 - x - y$ первого, второго и третьего сплава соответственно, причём $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $1 - x - y \geqslant 0$. Тогда условия задачи можно записать так:

$$28x + 68y + 18(1 - x - y) = 10x + 50y + 18 \geqslant 39,$$
$$15x + 15y + 5(1 - x - y) = 10x + 10y + 5 \geqslant 12$$

Изобразим на координатной плоскости область (см. рисунок), удовлетворяющую системе неравенств

$$\begin{cases} 10x + 50y - 21 \geqslant 0, \\ 10x + 10y - 7 \geqslant 0 \\ x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad x + y - 1 \leqslant 0. \end{cases}$$



Процентное содержание титана $45x + 15y + 30(1 - x - y) = 30 + 15x - 15y$ (*). Легко видеть, что максимум этого выражения достигается в точке C (в ней x наибольшее, а y — наименьшее из возможных), а минимум — в точке B. Для минимума легко находим содержание титана, оно равно 15%. Для максимума же придётся искать координаты точки C. Они равны $(\frac{29}{40}, \frac{11}{40})$, откуда максимум содержания титана равен $30 + 15 \cdot \frac{29}{40} - 15 \cdot \frac{11}{40} = 36{,}75$.

Комментарий. При другом выборе переменных (например, x первого сплава, $1 - x - y$ второго и y третьего) будут получаться другие функции и другие области. При этом решение может стать как чуть проще, так и немного сложнее. В решении выше специально выбран наиболее «бездумный» путь.

Комментарий. Задача имеет отношение к теме «линейное программирование»: нахождение экстремумов на множествах, задаваемых системами линейных уравнений и неравенств. Несложно показать, что для линейной функции максимум и минимум достигаются в одной из вершин многоугольника — множества всех точек, для которых выполняются условия. Тогда задача решается чисто алгоритмически: достаточно построить многоугольник, найти все его вершины и в каждой посчитать значение требуемой функции (так устроено второе решение выше).

Для произвольных констант такая задача нагружена технически и для олимпиады скорее неудачна. В предложенных вариантах числа подобраны так, чтобы экстремум можно было найти несложными рассуждениями (так устроение первое решение выше), а не просто технически.

Задача 4. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 9$, $BC = 2$ и боковыми сторонами $AB = 5$, $CD = 4\sqrt{2}$. Точка P на прямой BC такова, что периметр треугольника APD наименьший из возможных. Найдите этот периметр.

Ответ: $9+\sqrt{145}$.

Решение. Воспользуемся следующим утверждением, которое наиболее известно как «принцип наименьшего времени Ферма» в физике:

> Для данных точек A, B и данной прямой ℓ из всех точек $L \in \ell$ сумма $AL+BL$ будет минимальной, когда углы между прямыми AL и ℓ и BL и ℓ будут равны.

Тогда для искомой точки P на прямой BC должно выполняться равенство $\angle XPA = \angle YPD$ (точки X и Y — где-то «далеко» на прямой BC). Поскольку $BC \parallel AD$, то

$$\angle PAD = \angle XPA = \angle YPD = \angle PDA,$$

т.е. треугольник PAD — равнобедренный. Значит, нам достаточно найти периметр равнобедренного треугольника PAD, где P — точка на прямой BC.

По теореме Пифагора этот периметр равен

$$9+2\cdot\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2+h^2} = 9+\sqrt{81+4h^2},$$

где h — расстояние между прямыми AD и BC, т.е. высота трапеции.

Найти высоту трапеции можно разными способами. Например, проведём через точку B, прямую, параллельную CD, до пересечения с основанием AD в точке K. Тогда искомая высота — это высота из вершины B в треугольнике ABK. Поскольку $BCDK$ — параллелограмм, то $BK = CD = 4\sqrt{2}$, $AK = AD - DK = AD - BC = 9 - 2 = 7$.

Итого, нам достаточно найти длину высоты на сторону длины 7 в треугольнике со сторонами 5, 7, $4\sqrt{2}$. По формуле площади и формуле Герона имеем

$$4h^2\cdot 7^2 = 16S^2 = (5+7+4\sqrt{2})(5+7-4\sqrt{2})(5-7+4\sqrt{2})(-5+7+4\sqrt{2})$$

откуда

$$4h^2 = \frac{(12+4\sqrt{2})(12-4\sqrt{2})(-2+4\sqrt{2})(2+4\sqrt{2})}{7^2} = \frac{(12^2-(4\sqrt{2})^2)((4\sqrt{2})^2-2^2)}{7^2} = 64,$$

и окончательный ответ $9+\sqrt{81+4h^2} = 9+\sqrt{145}$.

Другое решение. Также, как и в первом решении, найдём высоту трапеции. Покажем здесь, как можно это было сделать по-другому. Опустим высоты BE и CF трапеции. Обозначим их длины через h, длину отрезка AE обозначим через ℓ. Поскольку $EF = BC = 2$, для FD получим $FD = 7-\ell$. Из прямоугольных треугольников ABE и CDF по теореме Пифагора получим $AB^2 = BE^2 + AE^2$ и $CD^2 = CF^2 + DF^2$.

Подставив в эти равенства известные длины, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 5^2 = h^2+\ell^2 \\ 32 = h^2 + (7-\ell)^2. \end{cases}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим $\big(\ell+(7-\ell)\big)\big(\ell-(7-\ell)\big) = -7$, откуда $\ell = 3$. Тогда $h = 4$, $FD = 4$.

Рассмотрим треугольник APD. Обозначим $BP = x$, тогда $PC = 2 - x$ (здесь и далее все расстояния со знаком, т.е. могут быть отрицательные). Опустим высоту PQ. Тогда треугольник APQ прямоугольный и по теореме Пифагора

$$AP = \sqrt{AQ^2+QP^2} = \sqrt{(3+x)^2+4^2}.$$

Аналогично, из прямоугольного треугольника DPQ

$$DP = \sqrt{(6-x)^2+4^2}.$$

Тогда периметр треугольника APD равен

$$P(x) = 9 + \sqrt{(3+x)^2 + 4^2} + \sqrt{(6-x)^2 + 4^2}.$$

Найдём производную этой функции:

$$P'(x) = \frac{3+x}{\sqrt{(3+x)^2 + 4^2}} - \frac{6-x}{\sqrt{(6-x)^2 + 4^2}}.$$

Из уравнения $P'(x) = 0$ получаем

$$(3+x)^2\big((6-x)^2 + 4^2\big) = (6-x)^2\big((3+x)^2 + 4^2\big),$$

откуда $(6-x)^2 = (3+x)^2$, $x = \frac{3}{2}$. Несложно видеть, что $x = \frac{3}{2}$ именно точка минимума, откуда минимальный периметр равен $P\left(\frac{3}{2}\right) = 9 + \sqrt{145}$.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1^{20} + x_2^{20} + \ldots + x_{42}^{20} = 33^{20} \\ x_1^{37} + x_2^{37} + \ldots + x_{42}^{37} = 33^{37}. \end{cases}$$

Ответ: один из x_i равен 33, все остальные равны 0.

Решение. Заметим, что

$$\left(\frac{x_1}{33}\right)^{20} + \left(\frac{x_2}{33}\right)^{20} + \ldots + \left(\frac{x_{42}}{33}\right)^{20} = 1.$$

Тогда для каждого $1 \leqslant k \leqslant 42$ имеем $\left|\frac{x_k}{33}\right| \leqslant 1$, откуда $\left|\frac{x_k}{33}\right|^{37} \leqslant \left|\frac{x_k}{33}\right|^{20}$. Окончательно получим

$$1 = \left|\left(\frac{x_1}{33}\right)^{37} + \left(\frac{x_2}{33}\right)^{37} + \ldots + \left(\frac{x_{42}}{33}\right)^{37}\right| \leqslant \left|\frac{x_1}{33}\right|^{37} + \left|\frac{x_2}{33}\right|^{37} + \ldots + \left|\frac{x_{42}}{33}\right|^{37} \leqslant$$
$$\leqslant \left|\frac{x_1}{33}\right|^{20} + \left|\frac{x_2}{33}\right|^{20} + \ldots + \left|\frac{x_{42}}{33}\right|^{20} = \left(\frac{x_1}{33}\right)^{20} + \left(\frac{x_2}{33}\right)^{20} + \ldots + \left(\frac{x_{42}}{33}\right)^{20} = 1.$$

Значит, для каждого k выполнено $\left|\frac{x_k}{33}\right|^{37} = \left|\frac{x_k}{33}\right|^{20}$, откуда $x_k \in \{-33, 0, 33\}$. Отсюда несложно получаем, что тогда один из x_k равен 33, а все остальные равны 0.

Задача 6. Укажите все значения параметра a, $|a| < 1$, при которых множество решений неравенства

$$\frac{|\sin t - a| - \cos t}{|\sin t - \frac{2}{3}|} > 0$$

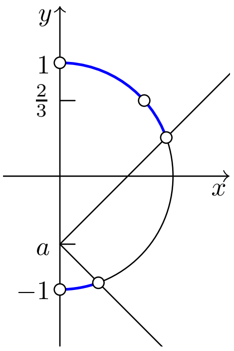
для $t \in (-\pi/2; \pi/2)$ представимо в виде двух непересекающихся интервалов.

Ответ: $[\frac{2-\sqrt{5}}{3}, 1)$.

Решение. Пусть $x = \cos t$, $y = \sin t$. Тогда, с учётом допустимых значений t, это неравенство равносильно системе

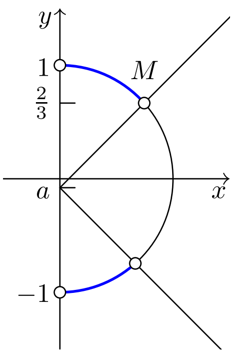
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x > 0, \\ y \neq \frac{2}{3}, \\ x < |y - a|. \end{cases}$$

Решения этой системы — точки на полуокружности $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, лежащие левее кривой $x = |y - a|$.



При изменении параметра a кривая $x = |y - a|$ перемещается параллельно оси y. При значениях a, близких к -1, в качестве множества решений имеем 3 непересекающихся интервала. При значениях a, близких к 1, получается 2 интервала.

Крайнее положение графика, при котором получается два интервала, изображено на рисунке:



Координаты точки M пересечения окружности и прямой $x = y - a$ равны $y_M = \frac{2}{3}, x_M = \sqrt{1 - (2/3)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Так как $\frac{2}{3} - a = x_M$, то $a = \frac{2-\sqrt{5}}{3}$.

Таким образом, ответом является множество $[\frac{2-\sqrt{5}}{3}, 1)$.

Задача 7. Дано действительное число s, отличное от 0, 1, -1, $\frac{1}{2}$ и 2. Решите уравнение

$$\frac{x^2(x-1)^2}{(x^2-x+1)^3} = \frac{s^2(s-1)^2}{(s^2-s+1)^3}.$$

Ответ может зависеть от s.

Ответ: s, $\frac{1}{s}$, $1-s$, $\frac{1}{1-s}$, $\frac{s}{s-1}$, $\frac{s-1}{s}$.

Решение. Докажем два утверждения:

- если x_0 — решение уравнения, то и $1 - x_0$ также решение; действительно,

$$\frac{(1-x_0)^2((1-x_0)-1)^2}{((1-x_0)^2-(1-x_0)+1)^3} = \frac{x_0^2(x_0-1)^2}{(x_0^2-x_0+1)^3},$$

  поэтому если второе равняется $\frac{s^2(s-1)^2}{(s^2-s+1)^3}$, то и первое — тоже.

- если x_0 — решение уравнения, то и $\frac{1}{x_0}$ также решение; действительно,

$$\frac{(1/x_0)^2((1/x_0)-1)^2}{((1/x_0)^2-(1/x_0)+1)^3} = \frac{x_0^2(x_0-1)^2}{(x_0^2-x_0+1)^3},$$

  поэтому если второе равняется $\frac{s^2(s-1)^2}{(s^2-s+1)^3}$, то и первое — тоже.

Заметим теперь, что s — точно корень исходного уравнения. Тогда, корнями являются также числа $1/s$, $1-s$, а тогда и $\frac{1}{1-s}$, $1 - \frac{1}{1-s} = \frac{s}{s-1}$, $1 - \frac{1}{s} = \frac{s-1}{s}$.

Можно показать, что при данных ограничениях на s получившиеся 6 чисел — различны. Кроме того, исходное уравнение при $x \neq 0$, $x \neq 1$ равносильно уравнению 6-й степени, которое не может иметь больше 6 корней. Значит, найденные числа и есть все корни.

Комментарий. По сути мы доказали, что при $x \neq 0$, $x \neq 1$ исходное уравнение равносильно уравнению

$$(x-s)\,(x-(1-s))\left(x-\frac{1}{s}\right)\left(x-\frac{1}{1-s}\right)\left(x-\frac{s}{s-1}\right)\left(x-\frac{s-1}{s}\right)=0,$$

поэтому указанные числа являются всеми корнями и при отстутствии ограничений на s.

Комментарий. Аналогичное множество встречалось в ОММО–2022, в задаче 10.

Задача 8. В треугольнике ABC точки A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB, а A_1, B_1, C_1 — точки касания этих сторон со вписанной окружностью соответственно. Прямые A_1C_1, B_1C_1 пересекают A_0B_0 в точках X и Y. Докажите, что $\angle XC_1Y = \angle XCY$.

Решение. Докажем, что точки X, Y лежат на биссектрисах углов A, B соответственно.

Так как $AB_1 = AC_1$ и $B_0Y \parallel AC_1$, то $B_0Y = B_0B_1 = \frac{|AB-BC|}{2}$, следовательно, $A_0Y = A_0B$ и $\angle YBA_0 = \angle BYA_0 = \angle YBA$. Аналогично $\angle XAC = \angle XAB$.

Кроме того, поскольку точки, симметричные C относительно X и Y, лежат на AB, то $\angle CYB = \angle CXA = 90°$, т.е. CXC_1Y — параллелограмм. Значит, $\angle XC_1Y = \angle XCY$.

Комментарий. Для доказательства, что X и Y лежат на биссектрисах углов A и B соответственно можно сразу сослаться на следующее утверждение.

> В треугольнике ABC следующие четыре прямые пересекаются в одной точке:
>
> - биссектриса угла A,
> - перпендикуляр из вершины B на эту биссектрису,
> - прямая, соединяющая точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и BC,
> - средняя линия, параллельная стороне AC.

Чаще всего его упоминают под названием «задача 255». Это и вправду почти задача номер 255 из книги И.Ф. Шарыгина «Геометрия: 9–11 кл.: От учебной задачи к творческой». Не стоит учить наизусть номера задач из этого задачника. Популярность именно этой задачи можно понять из предисловия автора (а заодно и убедиться в его правоте):

> P.S. А все же, откуда берутся геометрические задачи? Общий и полный ответ здесь вряд ли возможен. А в частности... В частности, очень много новых задач содержится в этой книге. Надо только суметь их извлечь. Наверное, каждая содержательная геометрическая задача может быть источником целого ряда новых. Для этого надо с ней «повозиться», посмотреть с разных сторон, попробовать перефразировать, обобщить. В результате удивительным образом может возникнуть совершенно не похожая на «родителя» задача. Например, возьмём ту же задачу № 255...

Задача 9. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых существует такое вещественное число a, что при всех вещественных x, y выполнено равенство

$$f(2xy+1) = f(x)f(y) - f(x) - 2y + a.$$

Ответ: $f(x) = 2x + 1$.

Решение. Заметим, что

$$f(x)f(y) - f(x) - 2y + a = f(2xy+1) = f(2yx+1) = f(y)f(x) - f(y) - 2x + a.$$

Отсюда следует, что при всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено $f(x) - 2x = f(y) - 2y$. Значит, разность $f(x) - 2x$ постоянна и $f(x) = 2x + C, C \in \mathbb{R}$. Подставляя в исходное равенство, получаем, что при всех $x, y \in \mathbb{R}$ выполнено равенство:

$$4xy + 2 + C = 4xy + 2Cx + 2Cy + C^2 - 2x - C - 2y + a.$$

Оно тождественно выполнено лишь при $C = 1$; при этом $a = 3$.

Задача 10. В стране 20 городов, между некоторыми из них имеются двусторонние беспересадочные авиалинии. Известно, что из какого-то города можно улететь ровно в 1 другой город, из какого-то — ровно в 2, ..., из какого-то — ровно в 14. Докажите, что существуют такие три города, что из каждого из них можно улететь в каждый из двух оставшихся.

Решение. Посмотрим на город A, из которого можно улететь в 14 городов. Из них максимум 6 — города, про количество авиалиний из которых в условии ничего не сказано. Осталось как минимум 8 городов, про количество авиалиний из которых сказано в условии. Среди них тогда найдётся город B, из которого можно улететь хотя бы в 8 городов.

Из A, кроме B, можно улететь ещё в 13 городов, а из B, кроме A — ещё в 7. Поскольку $13 + 7 = 20 > 18$, то для A и B есть хотя бы один общий город C, в который можно улететь. Тройка A, B, C и есть искомая тройка городов.