Межрегиональная олимпиада школьников на базе ведомственных образовательных организаций по математике

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ

Москва 2023

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП 3
9 КЛАСС 3
10 КЛАСС 8
11 КЛАСС 12
ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА 16
ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП 17
9 КЛАСС 17
10 КЛАСС 18
11 КЛАСС 19

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП
9 КЛАСС

1. Решите уравнение в целых числах $3^{x+y} = 6 \cdot 3^x + 3^y$.

Решение. Пусть $y \geq 1$. Исходное уравнение равносильно уравнению. $3^{x+1}(3^{y-1} - 2) = 3^y$. Следовательно, $3^{y-1} - 2 = 1$. Отсюда находим $y = 2, x = 1$. Пусть $x \geq 1$. Тогда исходное уравнение равносильно уравнению $3^y(3^x - 1) = 2 \cdot 3^{x+1}$. Тогда $3^x - 1 = 2 \cdot 3^t$, где $t \geq 1$, $3^t(3^{x-t} - 2) = 1$. Следовательно, $t = 0$, $x = 1, y = 2$. Пусть $y \leq 0, y \leq 0$. Заменим $x = -k,\ y \ = = -s$. Тогда $k, s \in \mathbb{N}_0$. Получим уравнение $\frac{1}{3^{k+s}} = \frac{6}{3^k} + \frac{1}{3^s} \Leftrightarrow 1 = 6 \cdot 3^s + 3^k$, не имеющее решений.

Ответ: $(1,2)$.

2. а) Найдите многочлен наименьшей положительной степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число $x_0 = \sqrt{5} - 1$;

б) с помощью пункта а) найдите $f(x_0)$, где

$$f(x) = x^{10} + x^9 - 6x^8 + 4x^7 - x^6 - 2x^5 + 4x^4 + x^3 + 3x^2 - x.$$

Ответ представьте в виде $a\sqrt{5} + b$, где a и b – целые числа.

Решение.

а) $g(x) = x^2 + 2x - 4$.

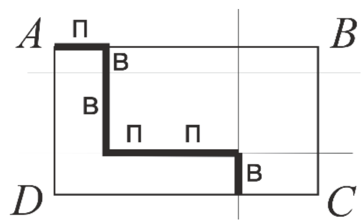
б) Поделим $f(x)$ на $g(x)$ с остатком. $f(x) = h(x)g(x) + x + 4$.

Тогда $f(x_0) = x_0 + 4 = \sqrt{5} + 3$.

Ответ: $\sqrt{5} + 3$

3. Прямоугольник разбит прямыми, параллельными его сторонам на некоторое количество маленьких прямоугольников. У каждого маленького прямоугольника длины сторон выражаются целыми числами, при этом длина хотя бы одной его стороны чётна. Докажите, что длина хотя бы стороны исходного прямоугольника также является чётным числом.

Решение: На рисунке изображен исходный прямоугольник $ABCD$, разбитый на маленькие прямоугольники. Предположим, что путник, находящийся сейчас в вершине A, хочет добраться или до стороны BC, или до стороны CD (до какой получится раньше – путнику все равно). При этом ему разрешается двигаться только



- по сторонам маленьких прямоугольников;
- только вниз (**в**) или вправо (**п**);
- только по сторонам, имеющим четную длину (у каждого прямоугольника хоть одна сторона четная, поэтому путнику всегда будет куда пойти).

На рисунке путник добрался до стороны CD по траектории **пввппв** (за один ход путник смещается вниз или вправо на расстояние, не менее 1, а значит, рано или поздно, цели своего путешествия он достигнет). Ясно, что длина стороны AD равна сумме длин всех отрезков в его траектории. Каждый такой отрезок четен, а значит и длина стороны AD четна. Аналогично доказывается четность длины стороны AB в случае, если путник прежде достиг стороны BC. Утверждение доказано.

4. Существуют ли такие функции $f(x,y)$ и $g(x,z)$, что для любых действительных значений x,y,z выполняется равенство $f(x,y)-g(x,z)=|y-z|$? Ответ обоснуйте.

Решение. Докажем, что таких функций не существует. Предположим, что существуют функции $f(x,y)$ и $g(x,z)$ такие, что для любых действительных значений x,y,z выполняется равенство $f(x,y)-g(x,z)=|y-z|$. Положим $x=0$. Обозначим $f(0,y)=F(y), g(0,z)=G(z)$.

Тогда $F(y)-G(z)=|y-z|$. Очевидно, что хотя бы одна из функций $F(y)$ или $G(z)$ не является константой. Пусть $G(z)$ не является константой. Тогда существуют такие $z_1\neq z_2$, что $G(z_1)\neq G(z_2)$. Но тогда $F(y)=G(z_1)-|y-z_1|, F(y)=G(z_2)-|y-z_2|$ и для любого y выполняется $|y-z_1|-|y-z_2|=G(z_1)-G(z_2)=const$. Очевидно, что это не так. Следовательно, таких функций не существует

Ответ: таких функций не существует.

5. В Криптоландии в тире действуют следующие правила. Перед началом стрельбы стрелок приобретает 100 патронов. На мишени нарисованы три концентрические окружности радиусов 3, 6 и 12 сантиметров. За попадание в круг, ограниченный первой из них, даётся 3 очка и 4 дополнительных патрона. За попадание в кольцевую область между первой и второй окружностями даётся 2 очка и 3 дополнительных патрона. За попадание в зону между второй и третьей окружностями даётся одно очко и 2 дополнительных патрона. Если стрелок не попал в мишень, то ни очков, ни дополнительных патронов он не получает. Считаем, что в границы кругов стрелок не попадает. Стрельба заканчивается, когда у стрелка не остаётся ни одного патрона. Юра пошёл в тир и завершил стрельбу, допустив 2023 промаха. Сколько очков набрал Юра?

Решение. Обозначим $N = 2023, k = 100$. Пусть n_1, n_2, n_3 – числа выстрелов, результатом которых было получение 1, 2 и 3 очков соответственно. Тогда общее число выстрелов m равно:

$$m = N + n_1 + n_2 + n_3$$

Каждый выстрел имеет *результат*, который может быть равен 0, 1, 2 и 3 очкам. При этом с каждым результатом связано определённое число выстрелов, а именно:

1. Если был промах, то этот результат не даёт дополнительных выстрелов, и с ним связан единственный выстрел, который и дал промах;

2. Если было получено одно очко, то с этим результатом связано 3 выстрела, а именно, тот, который дал этот результат, и плюс два дополнительных премиальных;

3. Если было получено 2 очка, то с этим результатом связано 4 выстрела: один – который дал результат, и 3 премиальных.

4. Если было получено 3 очка, то с этим результатом связано 5 выстрелов (аналогичные рассуждения: один исходный+4 премиальных).

Теперь если мы составим сумму

$$1 \times N + 3 \times n_1 + 4 \times n_2 + 5 \times n_3 + k$$

то мы сосчитаем каждый выстрел ровно 2 раза, то есть,

$$N + 3n_1 + 4n_2 + 5n_3 + k = 2m = 2(N + n_1 + n_2 + n_3)$$

откуда получаем число очков, полученных Юрой:

$$n_1 + 2\,n_2 + 3\,n_3 = N - k$$

Ответ: 1923.

6. Обозначим $a = 729$, $b = 241$, $N = 7169$. Известно, что остаток от деления числа b^2 на N равен a. Найдите разложение числа N на простые множители.

Решение. Заметим, что $a = 729 = 27^2$. Тогда:

$b^2 = 27^2(mod\ N) \Leftrightarrow (b - 27)(b + 27) = 0(mod\ N)$.

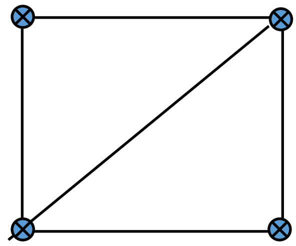
Следовательно, пары чисел $(b - 27)$ и N или $(b + 27)$ и N имеют общие делители, отличные от 1. Найдём наибольший общий делитель чисел $(b + 27)$ и N по алгоритму Евклида.

$$7169 = 26 \cdot 268 + 201,$$
$$268 = 201 + 67.$$

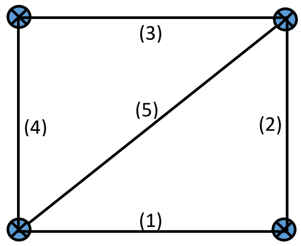
Следовательно, НОД$((b + 59), N) = 67$ – простое число. Остаётся разделить N на 67.

Ответ: $7169 = 67 \cdot 107$.

7. Компьютеры соединены в сеть, как показано на рисунке. Для этого использовали пять соединительных проводов. Злоумышленник пытается перерезать каждый провод. Вероятность того, что провод будет перерезан равна $\frac{1}{2}$. Найдите вероятность того, что в результате таких действий целостность сети не нарушится, то есть каждый компьютер сможет обменяться информацией с каждым (возможно и по цепочке с другими компьютерами).



Решение. Занумеруем отрезки как показано на рисунке.



Обозначим 0 – провод перерезан, 1 – нет. Выпишем все варианты, при которых целостность сети нарушится.

(5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1)	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
(2)	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
(3)	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
(4)	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0

(5)	1	1	1	1	1	1	1
(1)	0	1	0	0	0	1	0
(2)	0	1	0	0	1	0	0
(3)	1	0	0	1	0	0	0
(4)	1	0	1	0	0	0	0

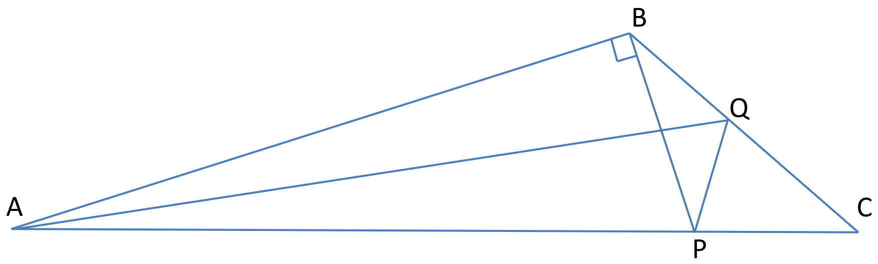
Общее количество векторов равно 32, из них подходящих векторов – 18. Вероятность получения каждого вектора равна $\frac{\mathbf{18}}{\mathbf{32}}$.

Ответ: $\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{16}}$.

8. В треугольнике ABC угол BAC равен 14°, а угол ACB равен 31°. На стороне AC взята точка P так, что угол ABP – прямой. Пусть AQ – биссектриса треугольника ABC. Найдите угол QPC.

Решение. Так как $\angle A = 14^{\circ}$, то $\angle QAC = \angle QAB = 7^{\circ},\ \angle C = 31^{\circ},\ \angle ABC = 135^{\circ}$.

Но тогда BQ – биссектриса внешнего угла треугольника ABC.



Так как AQ – биссектриса внешнего угла BAC, то PQ – биссектриса внешнего угла BPC. Следовательно, $\angle QPC = \frac{1}{2}\angle BPC = 52^{\circ}$.

Ответ: 52°

10 КЛАСС

1. Решите уравнение в целых числах $3^{x+y} = 6 \cdot 3^x + 3^y$.

Решение. Пусть $y \geq 1$. Исходное уравнение равносильно уравнению $3^{x+1}(3^{y-1} - 2) = 3^y$. Следовательно, $3^{y-1} - 2 = 1$. Отсюда находим $y = 2, x = 1$. Пусть $x \geq 1$. Тогда исходное уравнение равносильно уравнению $3^y(3^x - 1) = 2 \cdot 3^{x+1}$. Тогда $3^x - 1 = 2 \cdot 3^t$, где $t \geq 1$, $3^t(3^{x-t} - 2) = 1$. Следовательно, $t = 0$, $x = 1, y = 2$. Пусть $y \leq 0, y \leq 0$. Заменим $x = -k$, $y = = -s$. Тогда $k, s \in \mathbb{N}_0$. Получим уравнение $\frac{1}{3^{k+s}} = \frac{6}{3^k} + \frac{1}{3^s} \Leftrightarrow 1 = 6 \cdot 3^s + 3^k$, не имеющее решений.

Ответ: $(1{,}2)$.

2. а) Найдите многочлен наименьшей положительной степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число $x_0 = \sqrt{5} - 1$; б) с помощью пункта а) найдите $f(x_0)$, где

$$f(x) = x^{10} + x^9 - 6x^8 + 4x^7 - x^6 - 2x^5 + 4x^4 + x^3 + 3x^2 - x.$$

Ответ представьте в виде $a\sqrt{5} + b$, где a и b – целые числа.

Решение. а) $g(x) = x^2 + 2x - 4$.

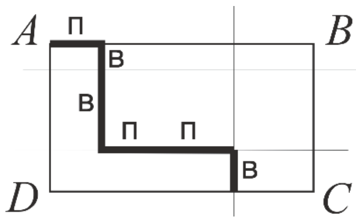
б) Поделим $f(x)$ на $g(x)$ с остатком. $f(x) = h(x)g(x) + x + 4$. Тогда

$$f(x_0) = x_0 + 4 = \sqrt{5} + 3.$$

Ответ: $\sqrt{5} + 3$

3. Прямоугольник разбит прямыми, параллельными его сторонам на некоторое количество маленьких прямоугольников. У каждого маленького прямоугольника длины сторон выражаются целыми числами, при этом длина хотя бы одной его стороны чётна. Докажите, что длина хотя бы стороны исходного прямоугольника также является чётным числом.

Решение: На рисунке изображен исходный прямоугольник $ABCD$, разбитый на маленькие прямоугольники. Предположим, что путник, находящийся сейчас в вершине A, хочет добраться или до стороны BC, или до стороны CD (до какой получится раньше – путнику все равно). При этом ему разрешается двигаться только



- по сторонам маленьких прямоугольников;
- только вниз (**в**) или вправо (**п**);
- только по сторонам, имеющим четную длину (у каждого прямоугольника хоть одна сторона четная, поэтому путнику всегда будет куда пойти).

На рисунке путник добрался до стороны CD по траектории **пввппв** (за один ход путник смещается вниз или вправо на расстояние, не менее 1, а значит, рано или поздно, цели своего путешествия он достигнет). Ясно, что длина стороны AD равна сумме длин всех отрезков в его траектории. Каждый такой отрезок четен, а значит и длина стороны AD четна. Аналогично доказывается четность длины стороны AB в случае, если путник прежде достиг стороны BC. Утверждение доказано.

4. Существуют ли такие функции $f(x,y)$ и $g(x,z)$, что для любых действительных значений x,y,z выполняется равенство $f(x,y)-g(x,z)=|y-z|$? Ответ обоснуйте.

Решение. Докажем, что таких функций не существует. Предположим, что существуют функции $f(x,y)$ и $g(x,z)$ такие, что для любых действительных значений x,y,z выполняется равенство $f(x,y)-g(x,z)=|y-z|$. Положим $x=0$. Обозначим $f(0,y)=F(y), g(0,z)=G(z)$.

Тогда $F(y)-G(z)=|y-z|$. Очевидно, что хотя бы одна из функций $F(y)$ или $G(z)$ не является константой. Пусть $G(z)$ не является константой. Тогда существуют такие $z_1\neq z_2$, что $G(z_1)\neq G(z_2)$. Но тогда $F(y)=G(z_1)-|y-z_1|, F(y)=G(z_2)-|y-z_2|$ и для любого y выполняется $|y-z_1|-|y-z_2|=G(z_1)-G(z_2)=const$. Очевидно, что это не так. Следовательно, таких функций не существует

Ответ: таких функций не существует.

5. В Криптоландии в тире действуют следующие правила. Перед началом стрельбы стрелок приобретает 100 патронов. На мишени нарисованы три концентрические окружности радиусов 3, 6 и 12 сантиметров. За попадание в круг, ограниченный первой из них, даётся 3 очка и 4 дополнительных патрона. За попадание в кольцевую область между первой и второй окружностями даётся 2 очка и 3 дополнительных патрона. За попадание в зону между второй и третьей окружностями даётся одно очко и 2 дополнительных патрона. Если стрелок не попал в мишень, то ни очков, ни дополнительных патронов он не получает. Считаем, что в границы кругов стрелок не попадает. Стрельба заканчивается, когда у стрелка не остаётся ни одного патрона. Юра пошёл в тир и завершил стрельбу, допустив 2023 промаха. Сколько очков набрал Юра?

Решение. Обозначим $N=2023, k=100$. Пусть n_1,n_2,n_3 – числа выстрелов, результатом которых было получение 1, 2 и 3 очков соответственно. Тогда общее число выстрелов m равно:

$$m=N+n_1+n_2+n_3$$

Каждый выстрел имеет *результат*, который может быть равен 0, 1, 2 и 3 очкам. При этом с каждым результатом связано определённое число выстрелов, а именно:

5. Если был промах, то этот результат не даёт дополнительных выстрелов, и с ним связан единственный выстрел, который и дал промах;

6. Если было получено одно очко, то с этим результатом связано 3 выстрела, а именно, тот, который дал этот результат, и плюс два дополнительных премиальных;

7. Если было получено 2 очка, то с этим результатом связано 4 выстрела: один – который дал результат, и 3 премиальных.

8. Если было получено 3 очка, то с этим результатом связано 5 выстрелов (аналогичные рассуждения: один исходный+4 премиальных).

Теперь если мы составим сумму

$$1 \times N + 3 \times n_1 + 4 \times n_2 + 5 \times n_3 + k$$

то мы сосчитаем каждый выстрел ровно 2 раза, то есть,

$$N + 3n_1 + 4n_2 + 5n_3 + k = 2m = 2(N + n_1 + n_2 + n_3)$$

откуда получаем число очков, полученных Юрой:

$$n_1 + 2\,n_2 + 3\,n_3 = N - k$$

Ответ: 1923.

6. Обозначим $a = 729$, $b = 241$, $N = 7169$. Известно, что остаток от деления числа b^2 на N равен a. Найдите разложение числа N на простые множители.

Решение. Заметим, что $a = 729 = 27^2$. Тогда

$$b^2 = 27^2(mod\ N) \Leftrightarrow (b - 27)(b + 27) = 0(mod\ N).$$

Следовательно, пары чисел $(b - 27)$ и N или $(b + 27)$ и N имеют общие делители, отличные от 1. Найдём наибольший общий делитель чисел $(b + 27)$ и N по алгоритму Евклида.

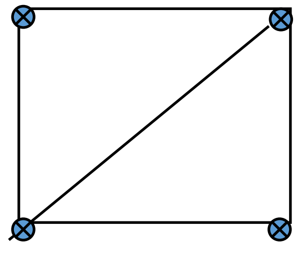
$$7169 = 26 \cdot 268 + 201,$$

$$268 = 201 + 67.$$

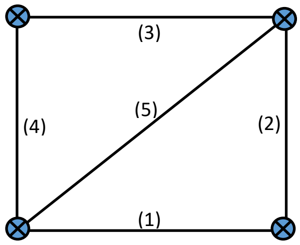
Следовательно, НОД$((b + 59), N) = 67$ – простое число. Остаётся разделить N на 67.

Ответ: $7169 = 67 \cdot 107$.

7. Компьютеры соединены в сеть, как показано на рисунке. Для этого использовали пять соединительных проводов. Злоумышленник пытается перерезать каждый провод. Вероятность того, что провод будет перерезан равна $\frac{1}{2}$. Найдите вероятность того, что в результате таких действий целостность сети не нарушится, то есть каждый компьютер сможет обменяться информацией с каждым (возможно и по цепочке с другими компьютерами).



Решение. Занумеруем отрезки как показано на рисунке.



Обозначим 0 – провод перерезан, 1 – нет. Выпишем все варианты, при которых целостность сети нарушится.

(5)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(1)	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	0
(2)	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
(3)	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0
(4)	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0

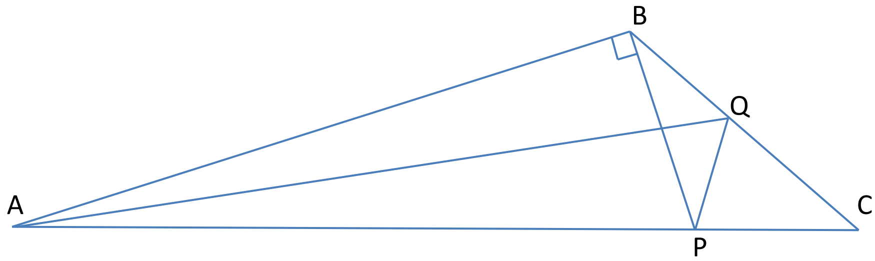
(5)	1	1	1	1	1	1	1
(1)	0	1	0	0	0	1	0
(2)	0	1	0	0	1	0	0
(3)	1	0	0	1	0	0	0
(4)	1	0	1	0	0	0	0

Общее количество векторов равно 32, из них подходящих векторов – 18. Вероятность получения каждого вектора равна $\mathbf{\frac{18}{32}}$.

Ответ: $\mathbf{\frac{9}{16}}$.

8. В треугольнике ABC угол BAC равен 14°, а угол ACB равен 31°. На стороне AC взята точка P так, что угол ABP – прямой. Пусть AQ – биссектриса треугольника ABC. Найдите угол QPC.

Решение. Так как $\angle A = 14^\circ$, то $\angle QAC = \angle QAB = 7^\circ$, $\angle C = 31^\circ$, $\angle ABC = 135^\circ$. Но тогда BQ – биссектриса внешнего угла треугольника ABC. Так как AQ – биссектриса внешнего угла BAC, то PQ – биссектриса внешнего угла BPC. Следовательно, $\angle QPC = \frac{1}{2}\angle BPC = 52^\circ$.



Ответ: 52°

11 КЛАСС

1. Найдите количество целых решений уравнения на отрезке $[1;90]$.

$$sin(\pi \cdot log_2 x) + cos(\pi \cdot log_2 x) = 1$$

Решение.

$$sin(\pi \cdot log_2 x) + cos(\pi \cdot log_2 x) = 1 \iff \left[\begin{array}{l} \pi \cdot log_2 x = 2\pi n \\ \pi \cdot log_2 x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \end{array}\right., n \in \mathbb{Z}.$$

Отсюда получаем $x = 2^{2n}$ или $x = 2^{\frac{1}{2}+2n}$. Поскольку число $2^{\frac{1}{2}+2n}$ не является целым, остается найти количество целых значений n таких, что $1 \le 2^{2n} \le 90$. Решениями неравенства являются целые числа 0, 1, 2, 3.

Ответ: 4 решения.

2. Решите уравнение в целых числах $12 \cdot 3^{x+y} = 3^x + 3^y$.

Решение. Пусть $y \ge 0$. Исходное уравнение равносильно уравнению $3^x(12 \cdot 3^y - 1) = 3^y$. Тогда $12 \cdot 3^y - 1 = 3^t$, где $y \ge 0, t \ge 0$, чего быть не может. Следовательно, $y \le -1$. Аналогично $x \le -1$. Заменим $x = -k, y = -s$. Тогда $k, s \in \mathbb{N}$. Получим равенство $\frac{12}{3^{k+s}} = \frac{1}{3^k} + \frac{1}{3^s} \iff 12 = 3^s + 3^k$. Тогда $k = 1, s = 2$ или $k = 2, s = 1$.

Ответ: $(-1,-2), (-2,-1)$ **.**

3. а) Найдите многочлен наименьшей положительной степени с целыми коэффициентами, корнем которого является число $x_0 = \sqrt{5} - 1$;

б) с помощью пункта а) найдите $f(x_0)$, где

$$f(x) = x^{10} + x^9 - 6x^8 + 4x^7 - x^6 - 2x^5 + 4x^4 + x^3 + 3x^2 - x.$$

Ответ представьте в виде $a\sqrt{5} + b$, где a и b – целые числа.

Решение.

а) $g(x) = x^2 + 2x - 4$.

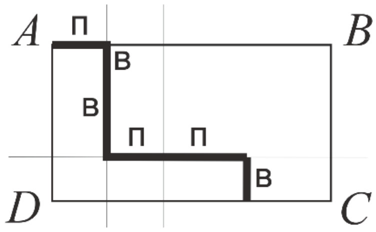
б) Поделим $f(x)$ на $g(x)$ с остатком. $f(x) = h(x)g(x) + x + 4$. Тогда $f(x_0) = x_0 + 4 = \sqrt{5} + 3$.

Ответ: $\sqrt{5} + 3$.

4. На листе клетчатой бумаги с размером клетки 1×1 изображен прямоугольник. Прямоугольник разбит прямыми, параллельными его сторонам на некоторое количество маленьких прямоугольников. У каждого маленького прямоугольника длины сторон выражаются целыми числами, при этом длина хотя бы одной его стороны чётна.

Докажите, что длина хотя бы стороны исходного прямоугольника также является чётным числом.

Решение: На рисунке изображен исходный прямоугольник $ABCD$, разбитый на маленькие прямоугольники. Предположим, что путник, находящийся сейчас в вершине A, хочет добраться или до стороны BC, или до стороны CD (до какой получится раньше – путнику все равно). При этом ему разрешается двигаться только



- по сторонам маленьких прямоугольников;
- только вниз (**в**) или вправо (**п**);
- только по сторонам, имеющим четную длину (у каждого прямоугольника хоть одна сторона четная, поэтому путнику всегда будет куда пойти).

На рисунке путник добрался до стороны CD по траектории **пввппв** (за один ход путник смещается вниз или вправо на расстояние, не менее 1, а значит, рано или поздно, цели своего путешествия он достигнет). Ясно, что длина стороны AD равна сумме длин всех отрезков в его траектории. Каждый такой отрезок четен, а значит и длина стороны AD четна.

Аналогично доказывалась бы четность длины AB,если бы путник прежде достиг стороны BC. Утверждение доказано.

5. Существуют ли такие функции $f(x, y)$ и $g(x, z)$, что для любых действительных значений x, y, z выполняется равенство $f(x, y) - g(x, z) = |y - z|$? Ответ обоснуйте.

Решение. Докажем, что таких функций не существует. Предположим, что существуют функции $f(x, y)$ и $g(x, z)$ такие, что для любых действительных значений x, y, z выполняется равенство $f(x, y) - g(x, z) = |y - z|$. Положим $x = 0$. Обозначим $f(0, y) = F(y), g(0, z) = G(z)$.

Тогда $F(y) - G(z) = |y - z|$. Очевидно, что хотя бы одна из функций $F(y)$ или $G(z)$ не является константой. Пусть $G(z)$ не является константой. Тогда существуют такие $z_1 \neq z_2$, что $G(z_1) \neq G(z_2)$. Но тогда $F(y) = G(z_1) - |y - z_1|, F(y) = G(z_2) - |y - z_2|$. Но тогда для любого y выполняется $|y - z_1| - |y - z_2| = G(z_1) - G(z_2) = const$. Очевидно, что это не так. Следовательно, таких функций не существует

Ответ: таких функций не существует.

6. В Криптоландии в тире действуют следующие правила. Перед началом стрельбы стрелок приобретает 100 патронов. На мишени нарисованы три концентрические окружности радиусов 3, 6 и 12 сантиметров. За попадание в круг, ограниченный первой из них, даётся 3 очка и 4 дополнительных патрона. За попадание в кольцевую область между первой и второй окружностями даётся 2 очка и 3 дополнительных патрона. За попадание в зону между второй и третьей окружностями даётся одно очко и 2 дополнительных патрона. Если стрелок не попал в мишень, то ни очков, ни дополнительных патронов он не получает. Считаем, что в границы кругов стрелок не попадает. Стрельба заканчивается, когда у стрелка не остаётся ни одного патрона. Юра пошёл в тир и завершил стрельбу, допустив 2023 промаха. Сколько очков набрал Юра?

Решение. Обозначим $N = 2023, k = 100$. Пусть n_1, n_2, n_3 – числа выстрелов, результатом которых было получение 1, 2 и 3 очков соответственно. Тогда общее число выстрелов m равно:

$$m = N + n_1 + n_2 + n_3$$

Каждый выстрел имеет *результат*, который может быть равен 0, 1, 2 и 3 очкам. При этом с каждым результатом связано определённое число выстрелов, а именно:

1. Если был промах, то этот результат не даёт дополнительных выстрелов, и с ним связан единственный выстрел, который и дал промах;

2. Если было получено одно очко, то с этим результатом связано 3 выстрела, а именно, тот, который дал этот результат, и плюс два дополнительных премиальных;

3. Если было получено 2 очка, то с этим результатом связано 4 выстрела: один – который дал результат, и 3 премиальных.

4. Если было получено 3 очка, то с этим результатом связано 5 выстрелов (аналогичные рассуждения: один исходный+4 премиальных).

Теперь если мы составим сумму

$$1 \times N + 3 \times n_1 + 4 \times n_2 + 5 \times n_3 + k$$

то мы сосчитаем каждый выстрел ровно 2 раза, то есть,

$$N + 3n_1 + 4n_2 + 5n_3 + k = 2m = 2(N + n_1 + n_2 + n_3)$$

откуда получаем число очков, полученных Юрой:

$$n_1 + 2\,n_2 + 3\,n_3 = N - k$$

Ответ: 1923.

7. Обозначим $a = 3481$, $b = 4120$, $N = 26069$. Известно, что остаток от деления числа b^2 на N равен a. Найдите разложение числа N на простые множители.

Решение. Заметим, что $a = 3481 = 59^2$. Тогда

$$b^2 = 59^2 (mod\ N) \Leftrightarrow (b - 59)(b + 59) = 0 (mod\ N).$$

Следовательно, пары чисел $(b - 59)$ и N или $(b + 59)$ и N имеют общие делители, отличные от 1. Найдём наибольший общий делитель чисел $(b + 59)$ и N по алгоритму Евклида.

$$26069 = 6 \cdot 4179 + 995,$$

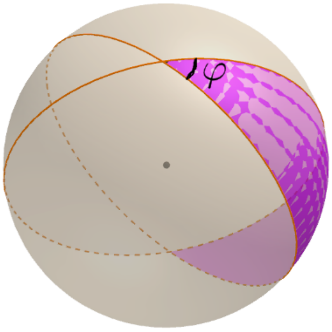
$$4179 = 4 \cdot 995 + 199,$$
$$995 = 5 \cdot 199.$$

Следовательно, НОД$((b + 59), N) = 199$ – простое число. Остаётся разделить N на 199.

Ответ: $26069 = 131 \cdot 199$.

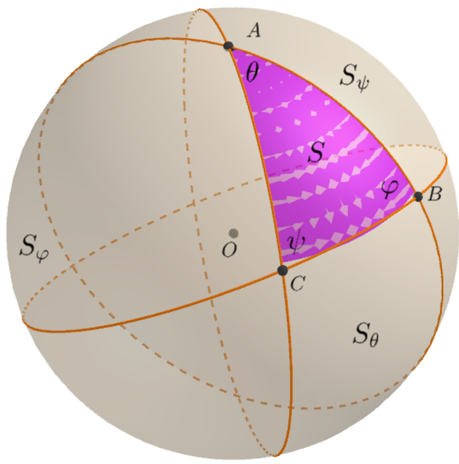
8. Из центра O сферы радиуса R проведены три луча, пересекающие сферу в точках A, B и C. Известно, что $\angle AOB = \angle AOC = \angle BOC = 60^{\circ}$. Найдите площадь части сферы, ограниченной плоскостями $(AOB), (AOC)$ и (BOC).

Решение. В задаче речь идет о трехгранном угле с вершиной в центре сферы, высекающем на сфере криволинейный треугольник. Площадь этого треугольника требуется выразить через радиус сферы и данные в условии плоские углы трехгранного угла, которые будем обозначать $\angle AOB = \alpha, \angle AOC = \beta, \angle BOC = \gamma$.



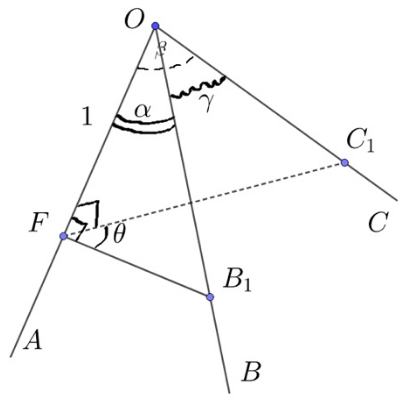
Рассмотрим сначала две различные плоскости, проходящие через центр сферы. Пусть угол между этими плоскостями равен φ. Плоскости пересекают сферу по большим окружностям. Касательные к окружностям в их точке пересечения также образуют угол φ. Площадь поверхности сферы равна $4\pi R^2$. Площадь высекаемой плоскостями «дольки» (указанной на рисунке цветом) очевидно пропорциональна величине φ и равна $4\pi R^2 \cdot \frac{\varphi}{2\pi} = 2R^2\varphi$.

Три плоскости (содержащие грани трехгранного угла) разбивают сферу на 8 треугольников. Искомую площадь криволинейного треугольника ABC обозначим через S, а его углы (которые, очевидно, являются двугранными углами трехгранного угла $OABC$) за φ, ψ, θ. Площади криволинейных треугольников, примыкающих к сторонам треугольника ABC, обозначим $S_\varphi, S_\psi, S_\theta$. С каждым из этих треугольников $\Delta\, ABC$ образует «дольку», поэтому $S + S_\varphi = 2R^2\varphi$, $S + S_\psi = 2R^2\psi$, $S + S_\theta = 2R^2\theta$. Оставшиеся из 4-х нерассмотренных криволинейных треугольников симметричны 4-м рассмотренным относительно центра сферы. Значит, суммарная площадь рассматриваемых четырех треугольников равна половине площади сферы, то есть $S_\varphi + S_\psi + S_\theta + S = 2\pi R^2$. Отсюда после несложных



преобразований для площади S криволинейного ΔABC с углами φ, ψ, θ получим известную формулу

$$S = R^2 \cdot (\varphi + \psi + \theta - \pi). \qquad (1)$$



Остается для трехгранного угла $OABC$ выразить его двугранные угла φ, ψ, θ через данные в задаче плоские углы α, β, γ. Для этого применим известную теорему косинусов для трехгранного угла.

Теорема. *Дан трехгранный угол* $OABC$, *в котором* $\angle AOB = \alpha$, $\angle AOC = \beta$, $\angle BOC = \gamma$. *Пусть* θ *– величина двугранного угла при ребре* AO. *Тогда*

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\theta. \qquad (2)$$

По условию все плоские углы одинаковы $\alpha = \beta = \gamma = 60^0$. Поэтому все двугранные углы φ, ψ, θ также равны между собой. Согласно (2), $\cos\theta = {}^1/_3$ и $\theta = \arccos\frac{1}{3}$. Подставляя найденные значения в формулу (1), получаем $S = \left(3 \cdot \arccos\frac{1}{3} - \pi\right) \cdot R^2$.

Ответ: $\left(3 \cdot \arccos\frac{1}{3} - \pi\right) \cdot R^2$.

ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА

9 КЛАСС

1. $(1,2)$.
2. $\sqrt{5} + 3$.
3. См. решение
4. Таких функций не существует.
5. 1923.
6. $7169 = 67 \cdot 107$.
7. $\frac{9}{16}$.
8. 52°

10 КЛАСС

1. $(1,2)$.
2. $\sqrt{5} + 3$.
3. См. решение
4. Таких функций не существует.
5. 1923.
6. $7169 = 67 \cdot 107$.
7. $\frac{9}{16}$.
8. 52°

11 КЛАСС

1. 4 решения.
2. $(-1,-2), (-2,-1)$ **.**
3. $\sqrt{5} + 3$.
4. См. решение
5. Таких функций не существует.
6. 1923.
7. $26069 = 131 \cdot 199$.
8. $\left(3 \cdot \arccos\frac{1}{3} - \pi\right) \cdot R^2$.

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП
9 КЛАСС

1. Сколько существует пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих уравнению $2^x = 3^y + 5$? Ответ запишите числом.

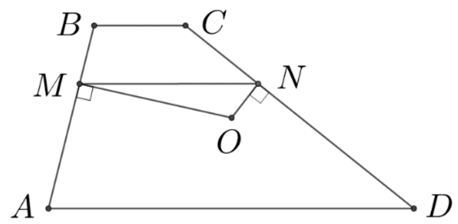
2. Найдите значение выражения:

$$2 \cdot \left(cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right).$$

3. Пусть A – множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде $x^2 + 2y^2$ где x, y – целые числа. Пусть B – множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде $x^2 - 6xy + 11y^2$ где x, y – целые числа (например, $6 \in A$, т.к. $6 = 2^2 + 2 \cdot 1^2$). Равны ли множества A и B?

4. Есть 5 клеток. Двое поочередно слева направо вписывают в эти клеточки по одной из цифр 1 или 2. Если получившееся в итоге 5-значное число будет делиться на 3, то выиграет игрок, ходивший первым, а если не будет делиться на 3 – то вторым. Какой из игроков выиграет при правильной своей игре и любой игре соперника?

5. Основания трапеции $ABCD$ связаны соотношением $AD = 4 \cdot BC$, сумма углов $\angle A + \angle D = 120^0$. На боковых сторонах выбраны точки M и N таким образом, что $CN: ND = BM: MA = 1: 2$. Перпендикуляры, восстановленные в точках M и N к боковым сторонам трапеции, пересекаются в точке O. Найдите AD, если $AO = 1$.



6. Обозначим через $a_{n,m}$ число, полученное записью подряд всех чисел от n до m включительно, здесь n и m – натуральные числа, причем $n > m$. Так, например, число $a_{4,2} = 432$, а число $a_{11,7} = 1110987$. Есть ли среди таких чисел число, делящееся на 2023?

7. 78– значное число имеет вид $a = 1777 \ldots 76$ (посередине – 76 цифр 7). Число $\frac{1}{a}$ представили в виде бесконечной периодической дроби. Найдите ее период и запишите его в ответ числом.

8. Найдите количество цифр в десятичной записи числа 2^{120}, если известно, что десятичная запись числа 2^{200} содержит 61 цифру.

10 КЛАСС

1. Найдите значение выражения:

$$(tg(7°30') + \sqrt{3} + 2) \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

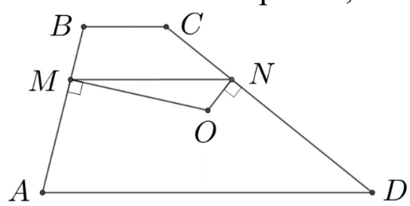
2. Найдите значение выражения:

$$2 \cdot \left(cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right).$$

3. Пусть A – множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде $x^2 + 2y^2$ где x, y – целые числа. Пусть B – множество всех таких целых чисел, которые представимы в виде $x^2 - 6xy + 11y^2$ где x, y – целые числа (например, $6 \in A,$ т. к. $6 = 2^2 + 2 \cdot 1^2$). Равны ли множества A и B?

4. Есть 7 клеток. Двое поочередно слева направо вписывают в эти клеточки по одной из цифр от 1 до 8. Если получившееся в итоге 7-ми значное число будет делиться на 9, то выиграет игрок, ходивший первым, а если не будет делиться на 9 – то вторым. Какой из игроков выиграет при правильной своей игре и любой игре соперника?

5. Основания трапеции $ABCD$ связаны соотношением $AD = 3 \cdot BC$, сумма углов $\angle A + \angle D = 120°$. На боковых сторонах выбраны точки M и N таким образом, что $CN{:}ND = BM{:}MA = 1{:}3$. Перпендикуляры, восстановленные в точках M и N к боковым сторонам трапеции, пересекаются в точке O. Найдите AD, если $AO = 4\sqrt{3}$. Ответ запишите числом.



6. Обозначим через $a_{n,m}$ число, полученное записью подряд всех чисел от n до m включительно, здесь n и m – натуральные числа, причем $n > m$. Так, например, число $a_{4,2} = 432$, а число $a_{11,7} = 1110987$. Есть ли среди таких чисел число, делящееся на 2026?

7. 89– значное число имеет вид $a = 1777 \dots 76$ (посередине – 87 цифр 7). Число $\frac{1}{a}$ представили в виде бесконечной периодической дроби. Найдите ее период и запишите его в ответ числом.

8. Найдите количество цифр в десятичной записи числа 2^{140} если известно, что десятичная запись числа 2^{200} содержит 61 цифру. Ответ запишите числом.

11 КЛАСС

1. Найдите значение выражения:

$$(tg(15°) + tg(7°30') + \sqrt{3} - 2) \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{3}).$$

2. Найдите значение выражения:

$$2 \cdot \left(cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)\right).$$

3. Два игрока по очереди пишут на доске по одной цифре (от 0 до 9). Игра прекращается, когда на доске написана 101 цифра. Если сумма всех написанных цифр делится на 13, то выиграл игрок, сделавший ход первым, а если не делится, то – вторым. Кто из игроков сможет гарантированно победить, как бы ни играл соперник?

4. Обозначим через $a_{n,m}$ число, полученное записью подряд всех чисел от n до m включительно, здесь n и m – натуральные числа, причем $n > m$. Так, например, число $a_{4,2} = 432$, а число $a_{11,7} = 1110987$. Есть ли среди таких чисел число, делящееся на 2029?

5. Найдите количество цифр в десятичной записи числа 2^{130} если известно, что десятичная запись числа 2^{200} содержит 61 цифру. Ответ запишите числом.

6. Решите уравнение $8cos^4(x) - 3cos(2x) = 3$. Найдите наименьший по модулю корень x_1 и запишите в ответе числом значение выражения $\frac{12 \cdot x_1}{\pi}$.

7. Известно, что положительные числа x, y, z удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 529 \\ x^2 + z^2 + \sqrt{3}xz = 441 \\ z^2 + y^2 = 144 \end{cases}$$

Найдите значение выражения $\sqrt{3}xy + 2yz + xz$.

8. Сократите дробь $\frac{15x^6+26x^4+34x^3+8x^2+22x+15}{6x^6-x^4+22x^3-12x^2+x+20}$. В результате сокращения степени многочленов в числителе и знаменателе должны уменьшиться. В ответе запишите числовое значение произведения максимальных степеней одночленов из числителя и знаменателя. Например, после сокращения имеем дробь $\frac{15x^5+2x+1}{6x^4-20}$. Тогда произведение максимальных степеней одночленов числителя и знаменателя равно $5 \cdot 4 = 20$.